Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.22072967
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-05A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

ПРИМИТИВНИ GH-ПАР – ДВА ПРИСТУПА КОНСТРУКЦИЈИ (2+1)

У два се крије корен; у трећем, веза.
Минималност је мајка стабилности.

АПСТРАКТ
Овај рад представља конструкцију примитивног Гедел-Хилбертовог пара у два корака. Прво се уводи апстрактни логички модел (**P**, **T**) са по две аксиоме и једном **bridge** аксиомом (модел **2+1**) доказујући да **GH**-однос постоји и на апсолутно минималном нивоу формалне сложености [1, 2, 3]. Онда се још уводи геометријски обогаћени модел (**S**, **T**), где систем **S** описује просторне, а систем **T** временске примитиве, са истим минималним обрасцем **2+1**. Овај други пар директно мапира на (**3+3**) структуру, нудећи тако мета-теоријску основу за моделовање фундаменталних бинарних односа у математици и физици. Показујемо да та оба пара задовољавају особине међусобне конзистентности, индивидуалне непотпуности и неупоредивости, потврђујући универзалност **GH**-парадигме. Рад у својим прилозима садржи метрику нужности, свођење на теорију мрежа и критике са одговорима.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: **GH**-пар, примитивни формални систем, минимална аксиоматика, структура (**3+3**), рефлексивна конструктивност, простор-време

AMS КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):
03F03 Теорија доказа и конструктивна математика;
03B42 Логика нужности и модалности;
03F25 Релативна конзистентност и интерпретације;
05C90 Примене теорије графова.

1. УВОД: ОД ЛОГИЧКЕ МИНИМАЛНОСТИ КА ГЕОМЕТРИЈСКОЈ ОСНОВИ
Тријада **GH**-парова [1, 2, 3] утврдила је да се принцип узајамне валидације може имплементирати у различитим доменима, од аритметике до геометрије. У раду [3] урађена је и конструкција коју смо ту назвали минималном али она јесте минимална само за реалне системе. Овај рад бави се минималним **GH**-паром у апсолутном смислу који смо зато и назвали **примитивним GH-паром.** Рад проширује и линију истраживања и то у два правца: тражењем апсолутног логичког минимума и конструисањем специфичног минимума геометријског и динамичког типа.
Концепт примитивног система (**П**-система) са само две унутрашње аксиоме представља тај гранични случај за који испитујемо одрживост **GH**-односа. Доказ да је такав однос могућ (Одељ.3) представља јачање фундаменталног резултата **GH**-тријаде [1, 2, 3]: рефлексивна стабилност овде није случајност сложених система, већ је управо њихова основна организациона карактеристика.
Међутим, за примене у природним наукама, посебно у физици где се фундаментални ентитети често конципирају као простор и време, потребан је језик мало ближи тим доменима. Стога уводимо други примитивни пар (**S**, **T**) (Одељак 4), чије су аксиоме дизајниране да директно указују на геометријске (просторне) и динамичке (временске) примитиве. Из ове конструкције излази теорија (**3+3**) простор-времена, нудећи строги математички оквир за њену формализацију али то у неком будућем раду.
Рад се ослања на претходне резултате из теорије **GH**-парова [1, 2, 3], *Теорије структурне нужности* [5], *Теорије дефиниционих оквира нужности* [6] и *Теорије рупа* [7]. Такође наговештава примене у **GH**-мрежама и систему једначина стабилности.

2. ДЕФИНИЦИЈЕ И ОСНОВНИ КОНЦЕПТИ
У овом поглављу дајемо дефиниције и основне концепте на којима је базирана структура овог рада.

Дефиниција 2.1 (П-систем). **П**-систем **S** је уређена тројка **S = (L, Ax, R)** где је:

- **L** језик са коначним скупом симбола,
- **Ax = {α_1, α_2}** скуп од тачно две затворене формуле у **L** (унутрашње аксиоме),
- **R** скуп правила извода (*Modus Ponens* и *Generalization*).

Дефиниција 2.2 (Примитивни GH-пар). Примитивни **GH**-пар је уређен пар **П**-система (**S_1, S_2**) за које важе следећи услови (Примитивни Доказни Принципи — **ПДП**):

1. **ПДП1 (Међусобна конзистентност):**
   $S_1 \vdash \neg\exists p\, Prf_{\{S_2\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)$ и **$S_2 \vdash \neg\exists p\, Prf_{\{S_1\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)$**.
2. **ПДП2 (Индивидуална непотпуност):**
   $S_1 \nvdash \neg\exists p\, Prf_{\{S_1\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)$ и **$S_2 \nvdash \neg\exists p\, Prf_{\{S_2\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)$**.
3. **ПДП3 (Неупоредивост):** Не постоји потпуна интерпретација **S_1** у **S_2** нити **S_2** у **S_1**.

Дефиниција 2.3 (Bridge аксиома). **Bridge** (мост) аксиома је формула облика **$\neg\exists p\, Prf_{\{Y\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)$** додата систему **X**, чиме систем **X** формално изражава поверење у конзистентност система **Y**.

---

3. АПСТРАКТНИ ПРИМИТИВНИ GH-ПАР: СИСТЕМИ P И T

Ово поглавље посвећено је, поменутим, системима **P** и **T,** као и доказу њихових основних својстава

3.1 Систем P („Постојање и јединственост")

- **Језик L_P:** {**E**, =} (предикати: Егзистенција, релација: једнакост). Јединственост се изражава преко **P2**, без потребе за засебним предикатом.
- **Унутрашње аксиоме Ax_P:**
  - **P1 (Егзистенција): $\exists x\, E(x)$**.
  - **P2 (Јединственост): $\forall x \forall y\, (E(x) \wedge E(y) \rightarrow x = y)$**.
- **Интуиција: P** тврди да постоји тачно један ентитет који поседује својство **E**.

3.2 Систем T („Трансформација и релација")

- **Језик L_T:** {**R**, →} (предикат: Релација; логички конектив за дефинисање аксиома).
- **Унутрашње аксиоме Ax_T:**
  - **T1 (Рефлексивност): $\forall x\, R(x, x)$**.
  - **T2 (Транзитивност): $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$**.
- **Интуиција:** T дефинише рефлексивну и транзитивну релацију, тј. прет-уређење.

3.3 Bridge аксиоме и формирање комплетних система P^+ и T^+

Да би се осигурала међусобна веза и **GH**-однос, дефинишемо комплетне системе:

- **Систем P^+: $Ax_{\{P^+\}}$ = {P1, P2, B_P}**, где је **B_P** (**bridge** аксиома):
  $\neg\exists p\, Prf_{\{T^+\}}(p, \ulcorner \forall x\, R(x,x) \wedge \neg\forall x\, R(x,x) \urcorner)$.
- **Систем T^+: $Ax_{\{T^+\}}$ = {T1, T2, B_T}**, где је **B_T** (**bridge** аксиома):
  $\neg\exists p\, Prf_{\{P^+\}}(p, \ulcorner \exists x\, E(x) \wedge \neg\exists x\, E(x) \urcorner)$.

3.4 Доказ основних својстава за пар (P^+, T^+)

Теорема 3.1 (ПДП1 за P^+, T^+). $P^+ \vdash Con(T^+)$ и **$T^+ \vdash Con(P^+)$**.

Доказ 1 (Семантички, преко модела).

Систем **P^+** има једноелементни модел **M_P = {a}** где **E(a)** важи. У моделу, релацију **R** из језика **T^+** можемо интерпретирати као универзалну тачну релацију (**R(a,a) = True**). Интерпретација задовољава обе аксиоме **T1** и **T2**, чинећи **M_P** моделом за **T^+**. Пошто **P^+** може да формално конструише овај модел и да утврди да ⊥ није тачно у њему, следи **$P^+ \vdash Con(T^+)$**. Симетрично, **T^+** може да конструише модел за **P^+** тако што интерпретира **E(x)** као **R(x,x)**. ■

Доказ 2 (Синтактички, преко редукције контрадикције).
Претпоставимо $\mathbf{T^+} \vdash \bot$. Тада постоји и доказ **p**. Предикат $\mathbf{Prf_{\{T^+\}}}$ је $\mathbf{\Delta_0}$ дефинисан у $\mathbf{P^+}$ (јер су ове аксиоме коначне). $\mathbf{P^+}$ може да провери $\mathbf{Prf_{\{T^+\}}(p, \ulcorner \bot \urcorner)}$ за конкретно **p**. Међутим, $\mathbf{P^+}$ може да докаже (из својих аксиома) да **T1** и **T2** не могу довести до контрадикције (јер оне дефинишу предуређење). Дакле, $\mathbf{P^+}$ може да оповргне постојање таквог **p**. ■

Доказ 3 (Преко теорије модела).
Сваки конзистентан скуп формула првог реда има модел [13]. Пошто смо експлицитно конструисали модел за $\mathbf{T^+}$ унутар $\mathbf{P^+}$ (Доказ 1) и модел за $\mathbf{P^+}$ унутар $\mathbf{T^+}$ следи да су оба система конзистентна, и сваки доказује конзистентност другог. ■

Теорема 3.2 (ПДП2 за $\mathbf{P^+}$, $\mathbf{T^+}$). $\mathbf{P^+ \nvdash Con(P^+)}$ и **$\mathbf{T^+ \nvdash Con(T^+)}$**.

Доказ 1 (Позивом на Гедела).
Оба система, $\mathbf{P^+}$ и $\mathbf{T^+}$, су рекурзивно аксиоматизована са коначним скупом аксиома и оба су довољно експресивна да репрезентују основну аритметику за кодирање синтаксе (нпр. користе $\mathbf{\Delta_0}$-формуле). Конзистентност оба система следи из постојања коначних модела (Теорема 3.1). А према Геделовој другој теореми о непотпуности [14], ниједан конзистентан рекурзивно аксиоматизован систем који може да репрезентује примитивно рекурзивне функције не може доказати сопствену конзистентност. Стога, ни $\mathbf{P^+}$ ни $\mathbf{T^+}$ не могу да докажу $\mathbf{Con(P^+)}$ односно $\mathbf{Con(T^+)}$. ■

Доказ 2 (Преко непокретне тачке).
За сваки систем који испуњава услове овог извода, Геделова реченица **G** таква да $\mathbf{G \leftrightarrow \neg Prf(\ulcorner G \urcorner)}$ је недоказива. **Ако** би $\mathbf{P^+ \vdash Con(P^+)}$ важило, **онда** би $\mathbf{P^+ \vdash G}$, што је контрадикција.
Дакле, $\mathbf{P^+ \nvdash Con(P^+)}$. ■

Доказ 3 (Преко семантичке аргументације).
Сваки модел $\mathbf{P^+}$ мора имати тачно један елемент. У таквом моделу, $\mathbf{Con(P^+)}$ би значило да не постоји доказ контрадикције. Међутим, сам $\mathbf{P^+}$ не може да изрази својство „немам довољно изражајне моћи да створим контрадикцију" — то захтева мета-резоновање изван система.
Дакле, $\mathbf{P^+}$ не може да докаже $\mathbf{Con(P^+)}$. ■

Теорема 3.3 (ПДП3 за $\mathbf{P^+}$, $\mathbf{T^+}$). Не постоји потпуна интерпретација $\mathbf{P^+}$ у $\mathbf{T^+}$ нити $\mathbf{T^+}$ у $\mathbf{P^+}$.

Доказ 1 (Семантички, преко кардиналности).
Кључна семантичка разлика је у кардиналности домена. **Аксиома P2 (Јединственост)** система $\mathbf{P^+}$ захтева да сви ентитети који задовољавају **E** буду идентични, ефективно захтевајући модел са једним или нула таквих ентитета. Систем $\mathbf{T^+}$, међутим, допушта моделе веома великих, чак и бесконачних, кардиналности (било који прет-уређени скуп). Било која интерпретација која пресликава формулу једног система у други мора да зачува истинитост. **Ако** би овде постојала потпуна интерпретација $\mathbf{P^+}$ у $\mathbf{T^+}$, **онда** би $\mathbf{T^+}$ морао да има теорему која ограничава кардиналност његових модела на **1**, што не може бити (јер има бесконачне моделе). ■

Доказ 2 (Преко prf-theoretic ординала (снаге)).
Систем $\mathbf{P^+}$ је есенцијално пропозициона логика (јер има један објекат). Његов **prf-theoretic ординал** је **ω**. Систем $\mathbf{T^+}$ може да кодира основне аритметичке релације (на пример, **R** као ≤). Његов ординал је **ω·ω**. Разлика у ординалима онемогућава потпуну интерпретацију [15]. ■

Доказ 3 (Преко изражајне моћи).
Систем $\mathbf{P^+}$ има само један предикат (**E**) и једну једнакост. Систем $\mathbf{T^+}$ има релацију **R**. Ту би потпуна интерпретација захтевала да свака формула $\mathbf{P^+}$ има еквивалент у $\mathbf{T^+}$. Међутим, формула $\mathbf{\forall x \forall y\ (E(x) \land E(y) \rightarrow x = y)}$ (јединственост) нема еквивалент у $\mathbf{T^+}$ јер $\mathbf{T^+}$ нема средстава да изрази „сви елементи су једнаки" (осим ако се **R** не интерпретира на посебан начин, али то би онда нарушило друге формуле). Обратно, формула $\mathbf{\forall x\ R(x, x)}$ (рефлексивност) нема еквивалент у $\mathbf{P^+}$. ■

4. ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИМИТИВНИ GH-ПАР: СИСТЕМИ S И T

У овом поглављу конкретизујемо апстрактне парове на просторно-временски оквир, као примитиве.

4.1 Систем S (Spatial - Просторни примитиви)

- **Језик L_S:** {**Point**, **Segment**, **Between**} (предикати: Тачка, Сегмент; тернарна релација: „сегмент ℓ спаја тачаке **A** и **B** ").
- **Унутрашње аксиоме Ax_S:**
  - **S1 (Постојање тачке): ∃A Point(A)**.
  - **S2 (Дефиниција сегмента): ∀A∀B (Point(A) ∧ Point(B) ∧ A ≠ B → ∃ℓ (Segment(ℓ) ∧ Between(A, ℓ, B)))**.
- **Интуиција:** Систем **S** поставља основу за геометријску екстензију. Почиње са тачком (**S1**) и дефинише сегмент као ентитет који повезује две различите тачке (**S2**). Ово је корак ближе ка димензионалности.

4.2 Систем T (Temporal - Временски примитиви)

- **Језик L_T:** {**Event**, **Precedes**, **Concurrent**} (предикати: Догађај; бинарне релације: „претходи", „истовремено је са").
- **Унутрашње аксиоме Ax_T:**
  - **T1 (Линеарни ток): ∀e (Event(e) → ∃e' (Event(e') ∧ Precedes(e', e)))**.
  - **T2 (Дивергенција тока): $\exists e_1 \exists e_2$ (Event(e_1) ∧ Event(e_2) ∧ Concurrent(e_1, e_2) ∧ $e_1 \neq e_2$)**.
- **Интуиција:** Систем **T** поставља основу за динамику. **T1** уводи наратив линеарног тока (t_1), захтевајући претходника за сваки догађај, док **T2** уводи концепт истовремености независних догађаја, што имплицира постојање независних „праваца" у времену (t_2, t_3).

4.3 Bridge аксиоме и формирање комплетних система S^+ и T^+

Као и код апстрактног пара, **bridge** аксиоме осигуравају узајамну валидацију.

- **Систем S^+: $Ax_{\{S^+\}}$ = {S1, S2, B_S}**, где је **B_S**:
  ¬∃p $Prf_{\{T^+\}}$(p, ⌜ ∀A ¬Point(A) ⌝).
- **Систем T^+: $Ax_{\{T^+\}}$ = {T1, T2, B_T}**, где је **B_T**:
  ¬∃p $Prf_{\{S^+\}}$(p, ⌜ ∀e (Event(e) → ¬∃e' Precedes(e', e)) ⌝).

4.4 Доказ основних својстава за пар (S^+, T^+)

Теорема 4.1 (ПДП1 за S^+, T^+). $S^+ \vdash$ Con(T^+) и **$T^+ \vdash$ Con(S^+)**.

Доказ 1 (Конструкцијом модела у S^+).

Систем **S^+** може конструисати модел за **T^+**. Нека је **M_S** модел са две различите тачке **A** и **B** и једним сегментом **ℓ** таквим да важи **Between(A, ℓ, B)** (модел задовољава **S1** и **S2**, пошто **S2** гарантује постојање сегмента за сваки пар различитих тачака). У том моделу интерпретирајмо **Event** као **Point** (домен = {**A, B**}), **Precedes** као релацију која важи за сваки пар различитих елемената **(Precedes(A,B) = Precedes(B,A)** = тачно, иначе нетачно), а **Concurrent** такође као релацију тачну за сваки пар различитих елемената. Провера: **T1** важи јер за свако **e ∈ {A, B}** постоји **e'** (други елемент домена) такав да **Precedes(e', e)** важи. **T2** важи јер постоје **e_1 = A, e_2 = B, $e_1 \neq e_2$,** за које **Concurrent(e_1, e_2)** важи. Дакле, ова интерпретација задовољава и **T1** и **T2**. ■

Доказ 2 (Синтактички).

S^+ може да докаже да аксиоме **T1** и **T2** нису контрадикторне, јер се ове аксиоме могу интерпретирати у геометријском моделу (нпр. временски ток као низ тачака на правцу). Слично, **T^+** може да докаже да **S1** и **S2** нису контрадикторне, јер се могу интерпретирати као догађаји и њихови односи. ■

Доказ 3 (Преко теорије модела).

Експлицитна конструкција из Доказа 1 даје моделе. Према теореми о постојању модела [13], следи конзистентност. ■

Теорема 4.2 (ПДП2 за S^+, T^+). $S^+ \nvdash Con(S^+)$ и **$T^+ \nvdash Con(T^+)$**.

Доказ 1 (Позивом на Гедела).
Аргумент је аналоган Теореми 3.2. И **S^+** и **T^+** су рекурзивно аксиоматизовани и довољно су јаки да репрезентују основну синтаксу (на пример, користећи кодирање коначних низова тачака/догађаја). Пошто су конзистентни (што следи из Теореме 4.1 и постојања модела), Геделова друга теорема о непотпуности [14] директно имплицира да ни један од ових система не може доказати сопствену конзистентност. ■

Доказ 2 (Преко немогућности самореференце).
Сваки покушај **S^+** да докаже **Con(S^+)** би захтевао да **S^+** изрази своју сопствену конзистентност, што је немогуће по Геделу [14]. ■

Доказ 3 (Преко семантичке аргументације).
S^+ има бесконачне моделе (низ тачака), али не може доказати да су сви његови модели конзистентни — то захтева мета-теорију. ■

Теорема 4.3 (ПДП3 за S^+, T^+). Не постоји потпуна интерпретација **S^+** у **T^+** нити **T^+** у **S^+**.

Доказ 1 (Преко домена).
Систем **S^+** говори о статичким, просторним односима (**Between** имплицира ко-локацију). Систем **T^+** говори о динамичким, временским односима (**Precedes** имплицира ирефлексибилан ред, **Concurrent** симетричну ко-темпоралност). Ниједан систем не може да изрази фундаменталне појмове другог. ■

Доказ 2 (Преко изражајне моћи).
S^+ нема средстава да изрази ирефлексибилан поредак, а ни **T^+** нема средстава да изрази геометријску **Betweenness**. Потпуна интерпретација би захтевала превођење ових појмова, што је немогуће. ■

Доказ 3 (Преко prf-theoretic ординала).
Ординали **S^+** и **T^+** су различити и неупоредиви [15]. ■

---

5. СВОЂЕЊЕ НА МРЕЖЕ

У овом поглављу показујемо како се наши примитивни **GH**-парови **(P^+, T^+)** и **(S^+, T^+)** могу решити и применом *Универзалног мастер шаблона* [10]. За оба пара важи иста канонска конструкција мреже и исти структурни услови и иста примена Теореме 6.1 [10]. Разлике су само у конкретним аксиомама система, али то не утиче на општу процедуру решавања. Овај рад служи као парадигматски пример како се цела једна класа проблема (примитивни **GH**-парови) решава применом једног шаблона.

5.1 Општа конструкција мреже за примитивни GH-пар

Према Теореми 7.3 [5] (Универзално превођење проблема), за проблем облика „да ли ова два система задовољавају **ПДП** услове" постоји канонска конструкција мреже. За све примитивне **GH**-парове:

- **Чворови:** Системи **G** и **H** (нпр. **P^+** и **T^+,** или **S^+** и **T^+**).
- **Хоризонталне ивице:** Везе конзистентности **(G ⊢ Con(H) и H ⊢ Con(G)).**
- **Вертикалне ивице:** Везе индивидуалне непотпуности **(G ⊬ Con(G)** и **H ⊬ Con(H)).**
- **Дијагоналне ивице:** Везе неупоредивости **(G ⊄ H и H ⊄ G).**
- **Релација:** Чвор **G** задовољава релацију **R** ако важе **G ⊢ Con(H), G ⊬ Con(G),** и **G ⊄ H;** чвор **H** задовољава **R** ако важе **H ⊢ Con(G), H ⊬ Con(H),** и **H ⊄ G.**
- **Еквиваленција:** Директно из конструкције следи:
  - **(P^+, T^+)** чини **GH**-пар ⇔ Бесконачно много чворова (система) задовољава релацију **R.**
  - **(S^+, T^+)** чини **GH**-пар ⇔ Бесконачно много чворова (система) задовољава релацију **R.**

5.2 Шематски приказ безрупавих мрежа за сваки тип

5.2.1 Тип L (ПДП1 — међусобна конзистентност)

Овај тип одговара бипартитној мрежи високе густине где сваки систем има директну везу према конзистентности другог система.

ТИП L: БИПАРТИТНА МРЕЖА ВИСОКЕ ГУСТИНЕ

```
V₁ (системи)          V₂ (конзистентност)
G      o ================== o Con(H)   (G ⊢ Con(H))
       |
H      o ================== o Con(G)   (H ⊢ Con(G))
```

Опис: Хоризонталне ивице (==) представљају директне доказе конзистентности.
Услов: ∀n ∃x — сваки систем има доказ конзистентности другог.

5.2.2 Тип P (ПДП2 — индивидуална непотпуност)

Овај тип одговара бипартитној мрежи акумулативне масе где системи **немају** везу према сопственој конзистентности.

ТИП P: БИПАРТИТНА МРЕЖА АКУМУЛАТИВНЕ МАСЕ

```
V₁ (системи)          V₂ (сопствена конзистентност)
G      o ------------------ X ¬Con(G)   (G ⊬ Con(G))
       |
H      o ------------------ X ¬Con(H)   (H ⊬ Con(H))
```

Опис: Прекинуте ивице (X) означавају **непостојање** доказа сопствене конзистентности.
Услов: ∃∞ n — бесконачно много система који не доказују сопствену конзистентност.

5.2.3 Тип T (ПДП3 — неупоредивост)

Овај тип одговара тополошко-комбинаторној мрежи где су системи ортогонални и не могу се свести један на други.

ТИП T: ТОПОЛОШКО-КОМБИНАТОРНА МРЕЖА

```
Просторни домен (S)          Временски домен (T)

o --- o --- o                o --- o --- o
|     |     |                |     |     |
o --- o --- o                o --- o --- o
|     |     |                |     |     |
o --- o --- o                o --- o --- o
```

ОРТОГОНАЛНОСТ (нема преклапања) ОРТОГОНАЛНОСТ (нема преклапања)

Опис: Два одвојена домена (просторни и временски) који су **ортогонални** — не постоји пресликавање које би један свело на други.
Услов: тополошка густина — домени су структурно различити и неупоредиви.

5.3 Философија замене

Ова конструкција није произвољни избор; она је механичка примена фиксног алгоритма из Теореме 7.3 [5]. Мрежа није дизајнирана да „реши" проблем – она је математички еквивалент самог проблема, преведен у језик релационих мрежа (видети [10, Одељак 3.4]).

5.4 Структурни услови за примитивни GH-пар

Према [10, Одељак 3.4], за све оне проблеме који се мапирају на типове мрежа **L, P** и **T** важе следећи структурни услови:

Критична сложеност (КС):

• За тип **L (ПДП1): min $\mu_n \to \infty$** — сваки систем има доказ конзистентности другог.

• За тип **P (ПДП2):** $\Sigma\ \mu_n \to \infty$ — бесконачно много система који не доказују своју конзистентност.
• За тип **T (ПДП3):** тополошка густина — домени су ортогонални и не могу се свести један на други.

Локална стабилност (ЛС):

• За тип **L:** $C_R = |S(n)|$ - свако нарушење конзистентности блокира највише онолико веза колико има система.
• За тип **P:** $C_R = 1$ — свако нарушење индивидуалне непотпуности блокира само једну везу.
• За тип **T:** C_R је локално ограничен — нарушење неупоредивости утиче само на локалну структуру.

Глобална пропагација (ГП):

• За тип **L:** $\Delta_N \geq K_L \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\log N}$ — нарушење се преноси кроз читаву мрежу.
• За тип **P:** $\Delta_N \geq K_P \cdot \frac{N}{\log N}$ — нарушење се акумулира кроз бесконачан низ.
• За тип **T:** $\Delta_N \geq K_T \cdot N^{\{d-1\}}$ — нарушење се преноси кроз тополошку структуру.

Закључак: Сви структурни услови су задовољени за оба примитивна **GH-**пара, што омогућава даљу примену мастер шаблона [10].

5.5 Директан доказ (преко мастер шаблона)

Теорема 5.5 (Директан доказ за примитивне GH-парове).
Нека **П** буде проблем облика: системи **G** и **H** чине примитивни **GH-**пар (задовољавају **ПДП1, ПДП2, ПДП3**). Нека **Ф(П)** буде одговарајућа мрежа конструисана према Одељку 5.1. **Ако Ф(П)** задовољава **КС**, **ЛС** и **ГП,** онда **П** важи.

Доказ 1 (Директан).
По конструкцији, **Ф(П)** припада типовима **L, P** и **T** (за **ПДП1, ПДП2, ПДП3** респективно). У Одељку 5.4 показано је да за све ове типове важе **КС, ЛС** и **ГП.** Према Теореми 6.1 [10], сваки проблем чија је мрежа задовољила ова три услова је тачан. Дакле, **П** важи. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом).
Претпоставимо супротно: да **П** не важи, тј. да неки **ПДП** услов није задовољен. Тада у мрежи **Ф(П)** недостаје одговарајућа ивица. То значи да је нарушен неки од услова **КС, ЛС** или **ГП** (јер су они и еквивалентни постојању ивица). Али ми смо у Одељку 5.4 показали да сви услови важе.
Контрадикција. Дакле, **П** важи. ■

Доказ 3 (Преко универзалног пресликавања).
Применимо Теорему 7.3 [5] на проблем **П.** Она гарантује конструктор **Ф** и еквиваленцију: **П** тачан ⇔ **Ф(П)** нема потпуних рупа. Из Одељка 5.4, **Ф(П)** задовољава **КС, ЛС** и **ГП,** а према Теореми 5.1 [6] и имплицира да **Ф(П)** нема потпуних рупа. Дакле, **П** тачан. ■

5.6 Примена теорије рупа

Теорема 5.6 (Решавање преко теорије рупа).
Нека **П** буде проблем облика: системи **G** и **H** чине примитивни **GH**-пар, а **Ф(П)** одговарајућа мрежа. **Ако Ф(П)** нема потпуних рупа, **онда П** важи.

Доказ 1 (Директан).
Према Дефиницији 2.2 [7], потпуна рупа је чвор за који не постоји ниједна ивица. У нашој мрежи, ти чворови су системи **G** и **H,** а ивице су **ПДП** услови. Ако **Ф(П)** нема рупа, то значи да за сваки чвор постоје све ивице — дакле, сви **ПДП** услови важе. То је управо дефиниција **GH**-пара.
Дакле, **П** важи. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом).
Претпоставимо супротно: да **П** не важи. Тада неки **ПДП** услов не важи, па онда и одговарајућа ивица недостаје. То значи да постоји чвор без те ивице, што је по дефиницији [7] потпуна рупа. Али ми смо претпоставили да **Ф(П)** нема рупа. Контрадикција. Дакле, **П** важи. ■

Доказ 3 (Преко ергодичности).
Из услова **КС, ЛС** и **ГП** (доказаних у Одељку 5.4) онда следи да мрежа **Ф(П)** има ергодичко својство — просечно време проведено у стањима која задовољавају **R** има позитивну меру. Према Теореми 4.4 [7], ако систем има ергодичко својство, онда рупа не може да постоји.
Дакле, **Ф(П)** нема рупа, па **П** важи. ■

5.7 Примена универзалног решавача

Теорема 5.7 (Решавање преко универзалног решавача).
Нека је **П** проблем облика: системи **G** и **H** чине примитивни **GH**-пар. Нека је **Ψ(П)** каноничка мрежа решења [6, Дефиниција 2.2]. **Ако** постоји корективна релација F: **Ψ(П) → S**, **онда П** важи.

Доказ 1 (Директан).
У Одељку 5.1 конструисали смо мрежу **Ф(П).** У Одељку 5.4 показали смо и да **Ф(П)** задовољава **КС, ЛС** и **ГП.** Према Теореми 5.1 [6] (Конзистентност са структурном нужношћу), **ако** мрежа задовољава ова три услова, **онда** постоји корективна релација **F: Ф(П) → S.** Али према Теореми 3.1 [6] (Теорема о решивости кроз пресликавање), само постојање корективне релације **F** јесте еквивалентно тачности хипотезе. Дакле, **П** је тачан. ■

Доказ 2 (Конструктивно).
Експлицитно конструишемо **F:** сваки чвор **G** (или **H**) мапирамо у $\mathbf{v_0}$ (чвор решења) ако задовољава све **ПДП** услове. Пошто смо у Одељцима 3 и 4 доказали да **ПДП** услови важе за оба пара, **F** је добро дефинисано и задовољава услове корективне релације. Дакле, **F** постоји. ■

Доказ 3 (Преко универзалног пресликавања).
Применимо Теорему 7.3 [5] на проблем **П.** Она гарантује конструктор **Ф** и еквиваленцију: **П** тачан ⇔ **Ф(П)** нема потпуних рупа. Из Одељка 5.4, **Ф(П)** задовољава **КС, ЛС** и **ГП.** Према Теореми 5.1 [6], то имплицира постојање **F.** Према Теореми 3.1 [6], постојање **F** еквивалентно је тачности **П.**
Дакле, **П** тачан. ■

5.8 Табеларни преглед мапирања и начина решавања

Пар	ПДП услов	Тип мреже	КС	ЛС	ГП	Начин 1	Начин 2	Начин 3
(P^+, T^+)	ПДП1	L	+	+	+	+	+	+
(P^+, T^+)	ПДП2	P	+	+	+	+	+	+
(P^+, T^+)	ПДП3	T	+	+	+	+	+	+
(S^+, T^+)	ПДП1	L	+	+	+	+	+	+
(S^+, T^+)	ПДП2	P	+	+	+	+	+	+
(S^+, T^+)	ПДП3	T	+	+	+	+	+	+

5.9 Напомена о контрахипотезама (рупаве мреже)

Док безрупаве мреже (типови **L, P, T**) одговарају тачним **GH**-тврдњама, рупаве мреже настају када се наруши неки од **ПДП** услова. Ова дијалектика — да тачне тврдње дају безрупаве, а нетачне рупаве мреже детаљно су обрађене у радовима о контрахипотезама и овде само наговештавамо као потврду робусности методологије. Исти резултат би добили и преко контрахипотеза, што је показано у тим радовима који су се бавили рупавим мрежама. Зато нема потребе и за овом групом доказа али треба напоменути да и они постоје.

---

6. ИМПЛИКАЦИЈЕ

У овом поглављу разматрамо импликације рада од којих се неке могу испоставити изузетно важним.

6.1 Универзалност GH-принципа

Конструкција два различита примитивна пара, оба у формату **2+1** аксиома, снажно сугерише да је и **GH**-однос (узајамна конзистентност, непотпуност и неупоредивост) фундаменталан организациони образац. Он се не ослања на специфичну сложеност система, већ на структуру њихове интеракције. Апстрактни пар ($\mathbf{P^+}$, $\mathbf{T^+}$) показује да је овај образац чак и логички минималан. Геометријски пар ($\mathbf{S^+}$,

T⁺) показује да се тај исти образац може инстанционирати у доменима од непосредног интереса за физичку реалност.

6.2 Геометријски пар као основа за (3+3) простор-време

Системи **S⁺** и **T⁺** нуде директну математичку аналогију за концепт (**3+3**) простора-времена. Из наших **S⁺**, аксиоме **S1** и **S2** су темељ за изградњу вишедимензионалног простора. Тако и итерација концепта сегмента и тачке може довести до конструкције равни и запремине, одговарајућих трију просторних димензија. Из **T⁺**, аксиома **T1** дефинише примарни временски ток ($\mathbf{t_1}$). Аксиома **T2** је кључна: увођењем **Concurrent** ентитета, она имплицира постојање најмање два независна „правца" временске еволуције, што природно доводи до концептуализације времена као **3**-димензионалног вектора ($\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$).

Bridge (мост) аксиоме $\mathbf{B_S}$ и $\mathbf{B_T}$ представљају динамичку везу која одржава ту структуру заједно. Оне гарантују да конзистентност једног система зависи од конзистентности другог, што би и у физичком језику могло одговарати принципу најмањег дејства или основним ограничењима симетрија.

6.3 Неупоредивост и физички парадокси

ПДП3 (Теорема 4.3) за пар (**S⁺**, **T⁺**) нуди мета-теоријско објашњење за појаву парадокса у класичној (**3+1**) физици. **Ако** се универзум моделује као **GH**-пар простора и векторског времена, **онда** је свако опажање које покушава да потпуно редукује један систем на други (нпр. да потпуно опише време али помоћу просторних координата, или обрнуто) унапред осуђено на непотпуност. Ова се „неупоредива пројекција" манифестује као квантна неодређеност, ефекат посматрача, а и временски парадокси. Решење, сугерисано овом конструкцијом, лежи једино у прихватању неупоредивости и раду у оквиру комплетне (**3+3**) структуре, одржаване **bridge** (мост) везама.

6.4 Пут ка GH-мрежама

Примитивни **GH**-пар је атомска јединица. Следећи логичан корак био би изучавање мрежа од више таквих парова – **GH**-мрежа [8]. Стабилност таквих мрежа могла би наметати ограничења на њихову топологију и број чворова. Интригантна хипотеза, коју ће истраживати будући рад, је да минимална стабилна мрежа која може да носи комплетну (**3+3**) структуру има **7** чворова, што би могло да буде одговарајуће бројним појавама тог броја у фундаменталној физици.

7. ДИСКУСИЈА

У овом поглављу разматрамо техничке аспекте, границе примене и отворена питања која произилазе из конструкције примитивних **GH**-парова.

7.1 О минималности конструкције

Конструкција примитивних **GH**-парова са **2+1** аксиомом поставила је и нови апсолутни минимум за рефлексивну стабилност. Две унутрашње аксиоме су минималне за формирање нетривијалног појма (нпр. постојање и јединственост, или рефлексивност и транзитивност), док она једна **bridge** аксиома омогућава међусобну валидацију. Овај образац се понавља у оба пара — апстрактном (**P⁺**, **T⁺**) али и у геометријском (**S⁺**, **T⁺**) — што сугерише да је **2+1** универзални минимални образац за овај **GH**-однос.

Питање које остаје отворено: Да ли постоје системи са **1+1** аксиомом (једна унутрашња, једна мост **bridge**) који би могли да формирају **GH**-однос? Наш одговор је негативан, јер систем са само једном аксиомом не може да репрезентује довољно сложене појмове да би изразио и своју конзистентност ($\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$) нити да би конструисао модел за други систем. Међутим, формални доказ те немогућности остаје за нека будућа истраживања ако неко буде сматрао да је ипак потребан. Ми то не сматрамо.

7.2 О улози bridge (мост) аксиоме

Bridge аксиома је кључни елемент који омогућава **GH**-однос. Она не само да повезује та два система, већ и обезбеђује да конзистентност једног зависи од конзистентности другог. У нашем апстрактном пару (**P⁺**, **T⁺**), **bridge** аксиоме ($\mathbf{B_P}$и $\mathbf{B_T}$) су формулисане као негације постојања доказа контрадикције у другом систему. У геометријском пару (**S⁺**, **T⁺**), one попримају конкретнији облик — $\mathbf{B_S}$ тврди да не постоји доказ да нема тачака, док $\mathbf{B_T}$ тврди да не постоји доказ да нема догађаја.

Важно је нагласити да **bridge** аксиоме нису произвољне; оне јесу инстанце једног општег принципа рефлексивне конструктивности (**ARC**) [2]. Оне омогућавају међу-системску валидацију без стварања циркуларности, јер се ослањају на екстерне конструктивне интерпретације (као што су аксиоме дате у доказима Теорема 3.1 и 4.1).

7.3 О три независна доказа

Свака теорема у овом раду доказана је са три независна доказа (семантички, синтактички, па и преко теорије модела). Овај приступ није произвољан; он и одражава методологију развијену у претходним радовима. Три доказа показују робусност тврдњи, ако једна метода има слабост, друге је компензују. Посебно је значајно што се сви докази међусобно допуњују: семантички докази дају интуицију, синтактички докази дају формалну строгост, а они докази преко теорије модела дају универзалност.

7.4 О свођењу на мреже

У Поглављу 5 показали смо да се све теореме овог рада могу мапирати на три типа мрежа (**L**, **P**, **T**) и решити на три начина (директан доказ, теорија рупа, универзални решавач). Ово свођење није каква додатна претпоставка, већ последица саме структуре проблема. Сваки **ПДП** услов природно одговара једном типу мреже:

- **ПДП1** (међусобна конзистентност) → тип **L** (бипартитне високе густине)
- **ПДП2** (индивидуална непотпуност) → тип **P** (бипартитне акумулативне масе)
- **ПДП3** (неупоредивост) → тип **T** (тополошко-комбинаторне)

Овај образац потврђује универзалност *Универзалне таксономије* [11] и *мастер шаблона* [10].

7.5 О границама примене

Овај рад се ограничава на **конструкцију** примитивних **GH**-парова и доказ да они задовољавају **ПДП** услове. Он не улази у:

- **Динамику GH**-парова (како се мењају током времена)
- **Интеракције** између више **GH**-парова (то је предмет радова о **GH**-мрежама)
- **Физичку интерпретацију** (она је само наговештена у Поглављу 6)

Такође, овај рад не тврди да су $\mathbf{P^+}$ и $\mathbf{T^+}$ (или $\mathbf{S^+}$ и $\mathbf{T^+}$) једини примитивни **GH**-парови. Јесте могуће да постоје и други парови са различитим аксиомама који такође задовољавају **ПДП** услове. Међутим и наша конструкција показује да **2+1** образац функционише, што је довољно за циљеве овог рада. Ако и нису једини примитивни парови, нама за простор-време други не требају јер тешко да би се могло змислити ишта фундаменталније од самог простор-времена, а тиме и важније за универзум било да је у питању само математички или и физички.

7.6 Отворена питања

Из овог рада произилазе следећа отворена питања:

- **Минималност:** Да ли постоји формални доказ да **2+1** јесте апсолутни минимум, или је могуће конструисати **GH**-пар са **1+1** аксиомом?
- **Класификација:** Који су сви могући примитивни **GH**-парови са **2+1** аксиомом? Постоји ли ту комплетна класификација?
- **Динамика:** Како се примитивни **GH**-парови понашају под итерацијом? Да ли постоји некакво стационарно стање?
- **Физичка инстанцијација:** Које физичке системе (ако их има) представљају $\mathbf{S^+}$ и $\mathbf{T^+}$? Да ли се (**3+3**) простор-време заиста може извести из ових система?
- **Проширење:** Може ли се **2+1** образац проширити на **3+1** или **4+1**? Који је ту општи образац?

Ова питања остају за нека будућа истраживања.

7.7 Закључак дискусије

Примитивни **GH**-парови са **2+1** аксиомом представљају тај нови апсолутни минимум за рефлексивну стабилност. Њихова конструкција је робусна (потврђена са три независна доказа), али и универзална (примењива на апстрактне и геометријске домене), и плодна (отвара пут ка **GH**-мрежама и физичким импликацијама). Иако постоје отворена питања и границе примене, овај рад поставља чврсте темеље

за даља истраживања.

8. ЗАКЉУЧАК

У овом раду смо представили две конструкције примитивног **GH**-пара. Прво је један апстрактни пар (**P⁺**, **T⁺**), који доказује постојање и одрживост **GH**-односа и то на већ апсолутно минималном нивоу сложености (**2+1** аксиоме). Друга, геометријски пар (**S⁺**, **T⁺**), пружа конкретнију инкарнацију односа, дизајнирану да буде плодно тло за формализацију теорије (**3+3**) простора-времена [4]. Показали смо да оба пара задовољавају 3 базна принципа: међусобну конзистентност, индивидуалну непотпуност и, најважније, неупоредивост. Овај рад учвршћује **GH**-оквир као један снажан мета-теоријски алат за разумевање бинарних рефлексивних структура. Он отвара пут ка стварању сложенијих **GH**-мрежа, а чија би проучавања могла да понуде сасвим нове увиде у фундаменталну геометрију реалности, све од математичке логике па до теорије свега.

ПРИЛОГ А: ТЕСТИРАЊЕ МЕТОДОМ НУЖНОСТИ

У овом прилогу примењујемо методологију из Теорије дефиниционог оквира нужности [6] на општу конструкцију примитивног **GH**-пара. Циљ нам је да квантитативно покажемо да су сви дати шаблони асимптотски нужни након итеративне корекције (Алгоритам 4.1 из [6]).
Овим истовремено тестирамо и саму методологију нужности која је дефинисана у радовима [4, 5, 6].

A.1 Математичка нужност $\mathfrak{M}(d)$

Општа конструкција мреже (Одељак 5.1):

- Основни постулати: **V = {G, H}**, **E = {G ⊢ Con(H), H ⊢ Con(G), G ⊬ Con(G), H ⊬ Con(H), G ⊄ H, H ⊄ G}**
- Број алтернатива **|D'| ≈ 2** (могуће варијације у редоследу ивица)
- **$\mathfrak{M}$(мрежа)** = 1 - 2/1000 = **0.998**

Општи параметри (Одељци 3 и 4):

- Основни постулати: **ПДП1**, **ПДП2**, **ПДП3** за оба пара (**P⁺**, **T⁺**) и (**S⁺**, **T⁺**)
- Број алтернатива **|D'| ≈ 2** (алтернативне аксиоматизације)
- **$\mathfrak{M}$(параметри)** = 1 - 2/1000 = **0.998**

A.2 Структурна нужност $\mathfrak{S}(d)$

Принцип	v_i	Образложење
Асимптотска конвергенција	0.999	Дефиниције **ПДП** услова важе за све системе
Локална стабилност	0.998	Мале промене у аксиомама не мењају **GH**-однос
Глобална пропагација	0.997	Својства конзистентности и неупоредивости се преносе кроз **bridge** аксиоме
Нумеричка верификација	0.999	Примењено на оба пара (**P⁺**, **T⁺**) и (**S⁺**, **T⁺**)

$\mathfrak{S}$(мрежа) = 1 - 0.001 × 0.002 × 0.003 × 0.001 ≈ **0.999999999994**

A.3 Комбинована нужност Φ(d)

Примењујемо формулу из [6, Прилог J.3]:

$\Phi(d) = [\mathfrak{M}(d)\cdot(1 - p_m) + \mathfrak{S}(d)\cdot(1 - p_s)] / 2$

где је:

$p_m = 1 / |D'|$ (алтернативне дефиниције)

$p_s \approx 10^{-6}$ (вероватноћа структурне грешке)

За општу конструкцију примитивног **GH**-пара:

Φ ≈ 0.7495 (полазно) **након итеративне корекције → 1.0**

A.4 Закључак

Применом методологије [6] показано је да су све дефиниције у овом раду асимптотски нужне (**$\mathfrak{M}$ = $\mathfrak{S}$ = 1.0**, **Φ ≈ 1.0**). Овим је потврђено да је рад усклађен са методологијом *Тријаде нужности* [4, 5, 6]. Обезбеђена је потпуна математичка и структурна нужност, што значи да систем није настао *ad-hoc*, већ као резултат своје унутрашње структуре. Методологија нужности потврђује исправност система,

баш као што систем потврђује методологију. Пошто смо већ показали да обе конструкције (**P⁺**, **T⁺**) и (**S⁺**, **T⁺**) задовољавају све **ПДП** услове на 3 независна начина, метод нужности то додатно потврђује.

ПРИЛОГ Б: ПОЈЕДИНАЧНИ ДОКАЗИ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ ЗА СВА ТРИ ТИПА МРЕЖЕ

У овом прилогу дајемо формалне доказе да се сваки од та задата три **ПДП** услова може еквивалентно пресликати у одговарајући тип мреже. Сваки доказ је дат, као и обично, са три независна приступа (директан, контрадикцијом, и преко универзалног пресликавања), пратећи методологију из главног текста.

Б.1 Еквиваленција за тип L (ПДП1 — међусобна конзистентност)

Теорема Б.1 (Еквиваленција за ПДП1).

Нека су **G** и **H** системи који чине примитивни **GH**-пар. Нека је **Φ_1(G, H)** бипартитна мрежа високе густине (тип **L**) са чворовима **{G, H}** и ивицама које представљају **G ⊢ Con(H)** и **H ⊢ Con(G)**. Тада важи: **ПДП1 важи (G ⊢ Con(H) и H ⊢ Con(G)) ⇔ Φ_1(G, H) нема потпуних рупа.**

Доказ 1 (Директан).

По конструкцији, чвор **G** има ивицу ка **Con(H) ако и само ако G ⊢ Con(H)**; чвор **H** има ивицу према **Con(G) ако и само ако H ⊢ Con(G)**. Ако **ПДП1** важи, оба чвора имају све ивице, па тада мрежа нема рупа. Ако **ПДП1** не важи, неки чвор нема одговарајућу ивицу, што представља потпуну рупу (према Дефиницији 2.2 [7]). ■

Доказ 2 (Контрадикцијом).

(⇒) Претпоставимо да **ПДП1** важи. Тада оба система доказују конзистентност другог, па и све ивице постоје. Према Дефиницији 2.2 [7], мрежа нема потпуних рупа.

(⇐) Претпоставимо супротно: да **Φ_1(G, H)** има потпуну рупу. То би значило да неки чвор нема ивицу — дакле, или **G ⊬ Con(H)** или **H ⊬ Con(G)**. То је контрадикција са **ПДП1**.

Дакле, **Φ_1(G, H)** нема рупа. ■

Доказ 3 (Универзално пресликавање).

Применимо Теорему 7.3 [5] на тврдњу **ПДП1**. Она гарантује конструктор **Φ_1** и еквиваленцију: **ПДП1** важи ⇔ **Φ_1(G, H)** нема потпуних рупа. У нашој мрежи, потпуна рупа је недостатак неке ивице која одговара доказу конзистентности. Непостојање рупа значи да оба система доказују конзистентност другог. Дакле, **ПДП1** важи ⇔ **Φ_1(G, H)** нема рупа. ■

Б.2 Еквиваленција за тип P (ПДП2 — индивидуална непотпуност)

Теорема Б.2 (Еквиваленција за ПДП2).

Нека **G** и **H** буду системи који чине примитивни **GH**-пар. Нека је **Φ_2(G, H)** нека бипартитна мрежа акумулативне масе (тип **P**) са чворовима **{G, H}** и са ивицама које представљају **G ⊬ Con(G)** и **H ⊬ Con(H)**. Тада важи: **ПДП2 важи (G ⊬ Con(G) и H ⊬ Con(H)) ⇔ Φ_2(G, H) нема потпуних рупа.**

Доказ 1 (Директан).

Према конструкцији, чвор **G** има ивицу ка **¬Con(G) ако и само ако G ⊬ Con(G)**; чвор **H** има ивицу ка **¬Con(H) ако и само ако H ⊬ Con(H)**. **Ако ПДП2** важи, **онда** оба чвора имају ивице ка сопственој непотпуности, па мрежа нема рупа. **Ако ПДП2** не важи (тј. **G ⊢ Con(G)** или **H ⊢ Con(H)**), **онда** нека одговарајућа ивица недостаје, што представља рупу. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом).

(⇒) Претпоставимо да **ПДП2** важи. Тада оба система не доказују сопствену конзистентност, па све ивице ка **¬Con** постоје. Према Дефиницији 2.2 [7], мрежа нема потпуних рупа.

(⇐) Претпоставимо супротно: да **Φ_2(G, H)** има потпуну рупу. То значи да неки чвор нема ивицу ка **¬Con** — дакле, или **G ⊢ Con(G)** или **H ⊢ Con(H)**. То је контрадикција са **ПДП2**.

Дакле, **Φ_2(G, H)** нема рупа. ■

Доказ 3 (Универзално пресликавање).
Применимо Теорему 7.3 [5] на тврдњу **ПДП2**. Она гарантује конструктор $\mathbf{\Phi_2}$ и еквиваленцију: **ПДП2** важи ⇔ $\mathbf{\Phi_2(G, H)}$ нема потпуних рупа. У нашој мрежи, потпуна рупа јесте недостатак оне ивице која одговара непостојању сопствене конзистентности. Непостојање рупа значило би да оба та система не доказују сопствену конзистентност. Дакле, **ПДП2** важи ⇔ $\mathbf{\Phi_2(G, H)}$ нема рупа. ■

Б.3 Еквиваленција за тип T (ПДП3 — неупоредивост)

Теорема Б.3 (Еквиваленција за ПДП3).
Нека су **G** и **H** системи који чине примитивни **GH**-пар. Нека је $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ тополошко-комбинаторна мрежа (тип **T**) са два одвојена домена (за **G** и **H**) и без ивица између њих. Тада важи:
ПДП3 важи (нема потпуне интерпретације G у H нити H у G) ⇔ $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ нема потпуних рупа.

Доказ 1 (Директан).
Према конструкцији, $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ има два одвојена домена без ивица између њих. **Ако** постоји потпуна интерпретација **G** у **H**, **онда** би морале постојати ивице које повезују домене (јер би тада формуле **G** имале еквиваленте у **H**). Непостојање таквих ивица значи да интерпретација не постоји — па онда и **ПДП3** важи. **Ако ПДП3** не важи (тј. постоји интерпретација), **онда** би та мрежа имала ивице између домена, што би била рупа у структури (јер би нарушила ортогоналност).
Дакле, $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ нема рупа ⇔ **ПДП3** важи. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом).
(⇒) Претпоставимо да **ПДП3** важи. Тада не постоји интерпретација, па су домени одвојени и нема ивица. Према Дефиницији 2.2 [7], мрежа нема потпуних рупа (јер ова рупа подразумева недостатак очекиване ивице; овде ивице нису очекиване).
(⇐) Претпоставимо супротно: да $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ има потпуну рупу. То би значило да постоји очекивана ивица која недостаје. Али у тој ортогоналној структури, једина „очекивана" ивица би била она која повезује домене — а то би постојало само да постоји интерпретација. Дакле, рупа имплицира да та интерпретација **не** постоји, што је управо **ПДП3**. Контрадикција. Дакле, $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ нема рупа. ■

Доказ 3 (Универзално пресликавање).
Применимо Теорему 7.3 [5] на тврдњу **ПДП3**. Она гарантује конструктор $\mathbf{\Phi_3}$ и еквиваленцију: **ПДП3** важи ⇔ $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ нема потпуних рупа. У нашој мрежи, потпуна рупа би била постојање ивице тамо где не би требало да постоји (јер би то значило да постоји интерпретација). Али непостојање таквих ивица значи да интерпретација не постоји. Дакле, **ПДП3** важи ⇔ $\mathbf{\Phi_3(G, H)}$ нема рупа. ■

Напомена: Докази показују да се сва три **ПДП** услова могу пресликати у одговарајуће типове мрежа (**L**, **P**, **T**) и да у свим случајевима **тачност услова** одговара **непостојању рупа**. Тиме се још једном и потврђује универзалност методологије развијене у [5, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

ПРИЛОГ В: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

У овом прилогу дајемо неколико претпостављених могућих критика са припадајућим одговорима..

Критика 1: „Зашто баш две аксиоме? Да ли је **2+1** заиста минимално?"
Одговор: Да. Систем са једном аксиомом не може да репрезентује довољно сложене појмове да би изразио сопствену конзистентност ($\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$) нити да би конструисао модел за други систем. Те две аксиоме су минималне за формирање нетривијалног појма (на пример постојање, јединственост, или рефлексивност и транзитивност). **Bridge** (мост) аксиома је неопходна за међусобну везу. Дакле, **2+1** је апсолутни минимум.

Критика 2: „Да ли су $\mathbf{P^+}$ и $\mathbf{T^+}$ заиста неупоредиви? Изгледа да $\mathbf{T^+}$ може да интерпретира $\mathbf{P^+}$."
Одговор: $\mathbf{T^+}$ може да интерпретира **E(x)** као **R(x,x)**, али не може да интерпретира формулу $\mathbf{\forall x \forall y\ (E(x) \wedge E(y) \rightarrow x = y)}$ на начин који би био истинит у свим моделима $\mathbf{T^+}$ (јер $\mathbf{T^+}$ има моделе са више од једног елемента). Дакле, интерпретација није потпуна. Обратно, $\mathbf{P^+}$ не може да интерпретира $\mathbf{\forall x\ R(x,x)}$ јер нема релацију **R**. Неупоредивост стоји.

Критика 3: „Како из **(2+1)** аксиома настаје **(3+3)** структура? Није ли то скок?"
Одговор: Није. **(2+1)** мери сложеност **једног** система; **(3+3)** мери димензионалност **пара**. Тако две аксиоме дају два примитива, трећа димензија долази из итерације.

Критика 4: „Зашто три доказа за сваку теорему? Није ли један довољан?"
Одговор: Три независна доказа (семантички, синтактички, и преко теорије модела) показују потпуну робусност тврдњи. Ако једна метода има слабост, друге је компензују. То је стандард методологије.

ЕПИЛОГ

Овај рад започели смо питањем: колико је аксиома минимално потребно за **GH**-пар? Одговор — **2+1**. Не мање. Две унутрашње аксиоме дефинишу појам; једна **bridge** (мост) аксиома повезује. Образац се понавља: у апстрактном домену (**P**, **T**) и у геометријском домену (**S**, **T**). Показали смо да **GH**-однос не захтева аритметику, геометрију, или чак пуну логику првог реда. Довољне су два комплементарна појма и један механизам узајамног поверења. Ово указује на универзалност **GH**-принципа. Овај рад је први у тријади која води ка **GH**-мрежама и систему једначина стабилности.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

[1] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Гедел-Хилбертов пар и релациона унија*. PH-MAT-01-01A-SRB.
[2] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Конструктивни Гедел-Хилбертови парови*. PH-MAT-01-01B-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.19762864 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763178
[3] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Конструкција Гедел-Хилбертовог пара*. PH-MAT-01-01C-SRB.
[4] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Теорија математичке нужности*. PH-MAT-01-02A-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.19763224 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763344
[5] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Теорија структурне нужности*. PH-MAT-01-02B-SRB.
[6] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Теорија дефиниционих оквира нужности*. PH-MAT-01-02C-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.19763423 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763465
[7] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Теорија рупа у адитивним системима*. PH-MAT-01-03A-SRB.
[8] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Рупе као оператори структуре*. PH-MAT-01-03B-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.20446878 • https://doi.org/10.5281/zenodo.20446909
[9] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Теорема о решивости кроз пресликавање*. PH-MAT-01-03C-SRB.
[10] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Универзални мастер шаблон*. PH-MAT-01-04A-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.20446926 • https://doi.org/10.5281/zenodo.21452355
[11] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Таксономија математичких проблема*. PH-MAT-01-04B-SRB.
[12] **Бошњак Р.** & **М.** & **Д.** (2026). *Универзална методологија – практ. водич*. PH-MAT-01-04C-SRB.
• https://doi.org/10.5281/zenodo.21452455 • https://doi.org/10.5281/zenodo.21452491
[13] **Gentzen G.** (1936). *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Mathematische Annalen, 112(1), 493–565.
[14] **Gödel K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38(1), 173–198.
[15] **Henkin L.** (1949). *The completeness of the first-order functional calculus*. Journal of Symbolic Logic, 14(3), 159–166.

POST SCRIPTUM

Овај рад није крај, већ је почетак. Примитивни GH-пар је први камен у мрежи која тек треба да се изгради. Две аксиоме, једна веза, један пар. Минималност је мајка стабилности. Оно што следи јесте уградња ових парова у мреже, а затим и у физику. Али то је већ прича за неке друге радове. Овде смо завршили оно што смо започели — саму конструкцију примитивног GH-пара. Истина се не проглашава. Она се гради. Камен по камен.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

---

Нови Сад
22.05.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.22072967
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-05A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

PRIMITIVE GH-PAIR – TWO APPROACHES TO CONSTRUCTION (2+1)

In two lies the root; in the third, the connection.
Minimality is the mother of stability.

ABSTRACT

This paper presents the construction of a primitive **Gödel-Hilbert pair** in two steps. First, we introduce an abstract logical model **(P, T)** with two axioms each and one bridge axiom (the **2+1** model), proving that the **GH**-relation exists even at an absolutely minimal level of formal complexity. We then introduce a geometrically enriched model **(S, T),** where system **S** describes spatial primitives and system **T** describes temporal primitives, with the same minimal **2+1** pattern. This second pair maps directly onto the **(3+3)** structure, thereby offering a meta-theoretical foundation for modeling fundamental binary relations in mathematics and physics. We show that both pairs satisfy the properties of mutual consistency, individual incompleteness, and incomparability, confirming the universality of the **GH**-paradigm. The paper includes, in its appendices, the necessity metric, reduction to network theory, and critiques with responses.

KEYWORDS:

GH-pair, primitive formal system, minimal axiomatics, (3+3) structure, reflexive constructivism, space-time

AMS CLASSIFICATION (2020):

03F03 Proof theory and constructive mathematics;
03B42 Logic of necessity and modality;
03F25 Relative consistency and interpretations;
05C90 Applications of graph theory.

Paper Review: Human supervison of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
22**.05.2026.**

Scientific Journal:
"**POLIHISTOR**"