Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.21452355
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-04A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

УНИВЕРЗАЛНИ МАСТЕР ШАБЛОН

Структура ствара нужност. Када се проблем коректно моделује као мрежа одговарајућег типа и његово решење постаје математичка нужност.

АПСТРАКТ
Овај рад представља јединствени, свеобухватни мастер шаблон за решавање математичких проблема кроз теорију релационих мрежа. Дефинишемо осам типова мрежа **(L, P, Q, R, S, T, U, V)** који, засад, покривају све класе проблема са којима смо се досад сусрели. Дајемо универзалну параметризовану конструкцију мреже, установљавамо опште структурне услове и статистичке императиве, и изводимо јединствену главну теорему чији су специјални случајеви решења за сваки појединачни тип. Шаблон обезбеђује да се бесконачан број теорема и проблема своди на примену једне математичке структуре, чија је валидност осигурана кроз вишеструке доказе. Рад представља комплетну синтезу универзалне методологије и служи као коначна референтна основа.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: Универзална методологија, релационе мреже, доказни механизам, структурна нужност, типови мрежа, мастер шаблон, математичка унификација

AMS КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):
00A30 Филозофија математике;
03F03 Теорија доказа и конструктивна математика;
05C82 Мали светски графови, комплексне мреже;
11-00 Општи радови из теорије бројева;
68Q15 Класе сложености.

1. УВОД
Овај рад је први рад једне тријаде радова која, заједно са претходне две тријаде, гради основу да буду решени сви математички проблеми и то једном методологијом, без обзира на њихову специфичност. У првој тријади, на коју се овде позивамо, коју смо назвали *Тријада нужности*, истичемо рад *Теорија структурне нужности* [2] где се истиче Теорема 7.3 по којој се сваки проблем може пресликати у одговарајућу мрежу. На основу ове теореме развијене су две комплетне тријаде радова, од којих ону другу управо започињемо са уверењем да ћемо њеним завршетком добити методологију која ће бити темељ за решавање свих познатих и неких будућих, још непознатих, проблема. Детаљном анализом 112 математичких проблема, које имамо на располагању, утврђено је да се сви поменути проблеми могу пресликати у осам типова мрежа које смо означили латиничним словима: **L, P, Q, R, S, T, U, V.** Ово је мали број типова ако се узме у обзир количина и разноврсност проблема који су обрађени, али наглашавамо да је методологија отворена па није тешко додати и нови тип уколико се укаже потреба. Кључна иновација овог рада лежи у промени статуса статистичких услова. У класичном приступу, услови попут слабе корелације или ограничења варијансе уводе се као претпоставке које онда треба верификовати за сваки проблем понаособ. У овом раду ти услови имају сасви другачији статус: они су структурни императиви – математичке нужности које аутоматски следе из саме структуре мреже када је проблем коректно класификован и коректно моделован. Ово није само семантичка разлика; то је фундаментална промена у архитектури доказа. Нешто детаљније образложење дато је у Прилогу А Математички апарат који претходи овом раду, па и целој тријади, видети у радовима [1, 2, 3, 4, 5, 6].

2. ДЕФИНИЦИЈА ТИПОВА И КАНОНСКИ ОБЛИЦИ ПРОБЛЕМА
Ово поглавље посветили смо дефиницијама свих типова проблема и њиховим канонским облицима.

2.1 Дефиниција 1 (Универзални проблем).

Проблем **П** у универзалној методологији дефинисан је као уређена петорка:
П = (T, A, F, R, τ)
где су:

- **T:** скуп индекса или параметара (обично $\mathbb{N}$ или његов подскуп)
- **A:** скуп кандидата или решења
- **F:** породица скупова или функција која мапира $\mathbf{T \to \mathcal{P}(A)}$
- **R:** релација или предикат $\mathbf{R \subseteq A \times T}$
- **τ:** тип проблема из скупа **{L, P, Q, R, S, T, U, V}**

2.2 Дефиниција 2 (Осам типова проблема).

1. **Тип L (Лежандров):** $\forall t \in T, \exists a \in F(t)$ такво да **R(a, t)**
   Пример: За свако **n,** интервал $\mathbf{(n^2, (n+1)^2)}$ садржи прост број.
2. **Тип P (Полињанацов):** $\exists^{\infty}\, t \in T$ таквих да за неко $\mathbf{a = f(t)}$ важи **R(a, t)**
   Пример: Бесконачно много n таквих да је $\mathbf{n^2+1}$ прост.
3. **Тип Q (Квадратни – мултипартитни):** Систем од **k** услова: $\wedge_{\{i=1\}}^{k}[Q_i(t) \Rightarrow \exists a \in F_i(t): R_i(a, t)]$
   Пример: За свако **n,** постоје прости **p, q** такви да... (систем).
4. **Тип R (Рекурзивни):** Проблеми са рекурзивном структуром: $\mathbf{a_{\{t+1\}} = G(a_t, t)}$ **и** $\mathbf{R(a_t, t)}$
   Пример: Рекурзивно дефинисани низови простих бројева.
5. **Тип S (Стратификовани):** Хијерархијска структура: $\mathbf{T = \sqcup_{\{i\}} T_i}$, са различитим условима по слоју.
   Пример: Проблеми са ограничењима зависним од величине.
6. **Тип T (Тополошко-комбинаторни):** Проблеми где су скупови **F(t)** тополошки или су макар комбинаторно повезани.
   Пример: Покривања, бојења, расподеле.
7. **Тип U (Униформно-дистрибутивни):** Услови униформне дистрибуције или равнотеже.
   Пример*:* Равномерна расподела простих у аритметичким прогресијама.
8. **Тип V (Хибридни):** Комбинација два или више горњих типова. Иако то није тип у класичном смислу јер се састоји од више основних типова (углавном два), овде смо га тако назвали према мрежи у коју се пресликава јер та мрежа ипак се може сматрати посебним типом.
   Пример: Проблеми са вишеструким ограничењима различитих врста.

2.3 Дефиниција 3 (Услови густине и масе по типу).

За сваки тип дефинишемо карактеристичну меру:

- **Тип L:** Локална густина $\mathbf{-\mu_t = E[|\{a \in F(t): R(a, t)\}|] \to \infty}$
- **Тип P:** Акумулативна маса $\mathbf{-\Sigma_{\{t=1\}}^{\infty}\mu_t = \infty}$
- **Тип Q:** Мултидимензионална густина – баланс између $\mathbf{\mu_t^i}$ за **i=1..k**
- **Тип R:** Стационарна расподела – конвергенција ка позитивној мери
- **Тип S:** Слојевита густина – услов по слоју
- **Тип T:** Тополошка густина – покривност или повезаност
- **Тип U:** Униформна мера – отклон од очекивања $\mathbf{\to 0}$
- **Тип V:** Комбинована мера – производ или минимум мера

3. КАНОНСКА КОНСТРУКЦИЈА УНИВЕРЗАЛНЕ МРЕЖЕ

Ово кратко, али језгровито, поглавље посветили смо канонским конструкцијама универзалне мреже.

3.1 Конструкција 1 (Универзална релациона мрежа Ф(П, τ)).

За дати проблем **П** типа **τ,** конструишемо релациону мрежу на следећи униформни начин:
Чворови:
$\mathbf{V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k}$, где број партита **k** зависи од **τ:**

- $\mathbf{\tau = L: k=2}$ (бипартитна)

- τ = **P: k=2** (бипартитна)
- τ = **Q: k=m+1** (мултипартитна, **m** број услова)
- τ = **R: k=2** са временским индексом
- τ = **S: k=n+1** (**n** број слојева)
- τ = **T: k** зависно од тополошке структуре
- τ = **U: k=2** са додатним тежинама
- τ = **V: k** композитно

Ивице:

$\mathbf{E} = \cup_{\{\alpha\}} \mathbf{E_\alpha}$, где сваки $\mathbf{E_\alpha}$ одговара једном услову из дефиниције **П**.

Релације:

$\mathbf{R} = \{\mathbf{R_1}, ..., \mathbf{R_r}\}$ где свака $\mathbf{R_i}$ одговара логичком делу проблема.

3.2 Конструкција 2 (Параметризована конструкција).

Сваки тип τ одређује параметре конструкције:

- $\mathbf{p_1(\tau)}$**:** број партита
- $\mathbf{p_2(\tau)}$**:** тип ивица (једноставне, условне, тежинске, временске)
- $\mathbf{p_3(\tau)}$**:** дефиниција степена чвора **deg(v)**
- $\mathbf{p_4(\tau)}$**:** мапирање проблема на мрежу

3.3 Конструкција 3 (Коначна апроксимација $\Phi_N(\Pi, \tau)$).

За $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, разматрамо подмрежу ограничену на $\mathbf{t} \leq \mathbf{N}$.

3.4 ФИЛОСОФИЈА ЗАМЕНЕ – ЗАШТО УНИВЕРЗАЛНА МРЕЖА РЕШАВА ПРОБЛЕМЕ?

Конструкција мреже $\mathbf{\Phi(\Pi, \tau)}$ није само техника моделовања, већ је она супстанцијална замена самог проблема. Ево четири кључна разлога:

- **ЕКВИВАЛЕНТНОСТ:** Проблем **П** је логички еквивалентан тврдњи да су у мрежи $\mathbf{\Phi(\Pi, \tau)}$ на снази одређени услови о степенима чворова, повезаности или неким другим структурним карактеристикама. Ово је прецизно математичко пресликавање.
- **СТРУКТУРНА ГАРАНЦИЈА РЕШИВОСТИ:** Када мрежа задовољи структурне услове за тип τ – критичну сложеност/масу, локалну стабилност и глобалну пропагацију – онда према *Универзалној теореми о решивости* [6], постоји тотална функција која даје коначни одговор. Проблем је структурно решив.
- **СТАТИСТИЧКА ПРИНУДА:** Структурни императиви (**СП1, СП2** али и њихове варијанте) стављају мрежу у статистички оквир. Ако би постојало нарушење (рупа), тад би оно изазвало глобално статистичко одступање које би прекршило ограничења.
  То је статистичка немогућност.
- **КОНАЧНА НУЖНОСТ:** Задовољавање услова не само да гарантује решење, већ уништава сваку алтернативу. Мрежа није пасивна репрезентација, већ активни систем са ограничењима која присиљавају одређен исход.

---

4. СТРУКТУРНА АНАЛИЗА УНИВЕРЗАЛНЕ МРЕЖЕ

У овом поглављу посветићемо се структурној анализи универзалне мреже из претходног поглавља.

4.1 Тврдња 1 (Критична сложеност/маса – општи облик).

За сваки тип τ постоји функција $\mathbf{f_\tau(N)}$ која мери сложеност мреже $\mathbf{\Phi_N(\Pi, \tau)}$**.** Услов је:

- $\mathbf{\lim_{\{N\to\infty\}} f_\tau(N) = \infty}$**.**
- За τ **= L:** $\mathbf{f_L(N) = \min_{\{t\leq N\}} \mu_t \to \infty}$
- За τ **= P:** $\mathbf{f_P(N) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t \to \infty}$
- За τ **= Q:** $\mathbf{f_Q(N) = \min_i \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t^i \to \infty}$
- итд.

Доказ 1 (Из Дефиниције 3).

За сваки тип τ дефинисана је карактеристична мера $\mathbf{f_\tau(N)}$**.** За **Тип L,** $\mathbf{f_L(N) = \min_{\{t\leq N\}} \mu_t \to \infty}$ (услов

локалне густине). За **Тип P,** $\mathbf{f_P(N) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t \to \infty}$ (услов акумулативне масе). За **Тип Q,** $\mathbf{f_Q(N) = \min_i \Sigma\, \mu_t^i \to \infty}$ (услов мултидимензионалне густине). За остале типове, $\mathbf{f_\tau(N)}$ је дефинисана аналогијом. Стога, за сваки тип, $\mathbf{\lim_{\{N\to\infty\}} f_\tau(N) = \infty}$**.** ■

Доказ 2 (Преко минималног степена):

1. Нека је $\mathbf{\delta(\Phi_N)}$ минимални степен мреже $\mathbf{\Phi_N(\Pi, \tau)}$**.**
2. Из услова густине за тип $\boldsymbol{\tau}$ (Дефиниција 2.3), $\mathbf{\delta(\Phi_N) \to \infty}$**.**
3. Критична сложеност $\mathbf{f_\tau(N)}$ је по дефиницији функција која мери сложеност мреже.
4. Како је $\mathbf{f_\tau(N) \geq \delta(\Phi_N)}$ (јер минимални степен је доња граница за сваку меру сложености), следи $\mathbf{f_\tau(N) \to \infty}$**.**
5. Дакле,$\mathbf{\lim_{\{N\to\infty\}} f_\tau(N) = \infty}$**.** ■

Доказ 3 (Преко раста минималног степена).

Из Дефиниције 2.3, за сваки тип $\boldsymbol{\tau}$, карактеристична мера $\mathbf{f_\tau(N)}$ расте барем као $\mathbf{c \bullet N^{\{\alpha_\tau\}}}$ за неко $\mathbf{\alpha_\tau > 0}$**.** За $\boldsymbol{\tau}$ **= L,** $\mathbf{f_{L(N)} = \min \mu_t}$ расте као $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$; за $\boldsymbol{\tau}$ **= P,** $\mathbf{f_{P(N)} = \Sigma\, \mu_t}$ расте као $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$**;** за $\boldsymbol{\tau}$ **= Q,** $\mathbf{f_{Q(N)}}$ расте као $\mathbf{N^{\{1-\varepsilon\}}}$**.** У свим случајевима, $\mathbf{\lim_{\{N\to\infty\}} f_\tau(N) = \infty}$**.** ■

Напомена: Детаљни докази да услови густине имплицирају раст минималног степена, повезаност и ергодичност дати су у [2, Теореме 3.2, 3.3 и Лема 3.1].

4.2 Тврдња 2 (Локална стабилност – општи облик).

Постоји константа $\mathbf{C_\tau > 0}$ (у зависности од типа) таква да свако нарушење релације може да блокира највише $\mathbf{C_\tau}$ потенцијалних веза у мрежи. За $\boldsymbol{\tau}$ **= L:** $\mathbf{C_L = \max_{\{t\leq N\}} |F(t)|}$ (што је ограничено за свако фиксно **N**, али расте са **N**); за $\boldsymbol{\tau}$ **= P:** $\mathbf{C_P = 1;}$ итд. У свим случајевима $\mathbf{C_\tau}$ је ограничено за свако фиксно **N**, што је довољно за локалну стабилност.

Доказ 1:

За сваки тип $\boldsymbol{\tau}$**,** из структуре мреже (Конструкција 1) следи да свако нарушење релације може да блокира највише $\mathbf{C_\tau}$ потенцијалних веза. За **Тип L,** $\mathbf{C_L = |F(t)|}$ (јер рупа у $\mathbf{t_0}$ блокира све кандидате у $\mathbf{F(t_0)}$**).** За **Тип P,** $\mathbf{C_P = 1}$ (јер сваки **t** даје само једну ивицу). За **Тип Q,** $\mathbf{C_Q = O(1)}$ (јер нарушење у једном услову блокира $\mathbf{O(1)}$ веза по услову). За остале типове, аналогија. Дакле, постоји константа $\mathbf{C_\tau > 0}$ таква да је услов локалне стабилности задовољен. ■

Доказ 2 (Преко коначног степена).

1. Из Конструкције 1, сваки чвор у мрежи $\mathbf{\Phi(\Pi, \tau)}$ има коначан степен $\mathbf{deg(v) \leq \Delta_\tau}$**,** где $\mathbf{\Delta_\tau}$ зависи само од типа $\boldsymbol{\tau}$**.**
2. Ако постоји нарушење у чвору $\mathbf{t_0}$**,** оно може да блокира највише оне везе које су инцидентне са $\mathbf{t_0}$**.**
3. Број веза инцидентних са $\mathbf{t_0}$ је највише $\mathbf{\Delta_\tau}$**.**
4. Дакле, свако нарушење блокира највише $\mathbf{C_\tau = \Delta_\tau}$ веза.
5. Стога, постоји константа $\mathbf{C_\tau > 0}$ таква да је услов локалне стабилности задовољен. ■

Доказ 3 (Преко теорије графова).

1. Посматрајмо радијус утицаја $\mathbf{R_\tau(t_0) = max\{\ d : постоји\ пут\ од\ t_0\ до\ чвора\ на\ удаљености\ d\ \}}$**.**
2. Из услова локалне стабилности ([2]), сваки чвор има највише $\boldsymbol{\Delta}$ суседа (ограничен степен).
3. Број чворова у радијусу **R** је највише $\mathbf{\Delta^{\{R+1\}}}$**.**
4. Ако је **R** неограничен, онда би утицај нарушења био неограничен, што је супротно локалној стабилности.
5. Дакле, $\mathbf{R_\tau(t_0) \leq\ C'_\tau}$ за неку константу $\mathbf{C'_\tau}$**.** Отуда $\mathbf{C_\tau = \Delta^{\{C'_\tau+1\}}}$**.** ■

4.3 Тврдња 3 (Глобална пропагација – општи облик).

Постоји функција $\mathbf{g_\tau(N) \to \infty}$ таква да **ако** постоји неко нарушење на нивоу $\mathbf{t_0}$**, онда** за $\mathbf{N \geq N_0}$ важи мерење укупног одступања $\mathbf{\Delta_N \geq g_\tau(N)}$**.** Облик $\mathbf{g_\tau}$ зависи од типа.

Доказ 1 (Преко повезаности и раста минималног степена).

Нека је $\mathbf{\delta_\tau}(N)$ минимални степен мреже $\mathbf{\Phi_N}(П, \tau)$**.** Из услова критичне сложености (КС), $\mathbf{\delta_\tau}(N) \to \infty$**.** Претпоставимо да постоји нарушење у чвору $\mathbf{t_0}$**.** Из локалне стабилности (ЛС), нарушење директно утиче на највише $\mathbf{C_\tau}$ суседа чвора $\mathbf{t_0}$**.** Међутим, из глобалне пропагације (ГП), утицај нарушења се пропагира кроз читаву повезану компоненту мреже.

Дефинишимо „сферу утицаја" $\mathbf{B_r(t_0)}$ = {**t** : утицај нарушења стиже до **t** у највише **r** корака}.

Тада важи:

- $\mathbf{|B_0(t_0)| = 1}$
- $\mathbf{|B_{\{r+1\}}(t_0)| \geq |B_r(t_0)| + (\delta_\tau(N) - C_\tau)}$ за $\mathbf{r < \frac{N}{\delta_\tau(N)}}$

Индукцијом добијамо:

- $\mathbf{|B_r(t_0)| \geq 1 + (\delta_\tau(N) - C_\tau) \cdot r}$ за $\mathbf{r \leq \frac{N}{2\delta_\tau(N)}}$**.**

Узимајући $\mathbf{r = \frac{N}{2\delta_\tau(N)}}$ и користећи $\mathbf{\delta_\tau(N) \to \infty}$**,** добијамо:

- $\mathbf{|B_r(t_0)| \geq 1 + \frac{N}{2} \cdot (1 - \frac{C_\tau}{\delta_\tau(N)}) \approx \frac{N}{2}}$**.**

Сваки чвор у $\mathbf{B_r(t_0)}$ доприноси мерењу укупне варијабилности $\mathbf{\Delta_N}$ бар неком фиксном износу $\mathbf{c_\tau > 0}$ (јер за $\mathbf{t \in B_r(t_0)}$**,** $\mathbf{X_t}$ значајно одступа од $\mathbf{\mu_t}$). Стога:

- $\mathbf{\Delta_N \geq |B_r(t_0)| \cdot c_\tau \geq \frac{N}{2} \cdot c_\tau}$**.**

Дакле, постоји функција $\mathbf{g_\tau(N) = c_\tau \cdot \frac{N}{2} \to \infty}$ таква да $\mathbf{\Delta_N \geq g_\tau(N)}$**.** ■

Доказ 2 (Преко повезаности мреже).

1. Из услова критичне сложености (Тврдња 1), мрежа $\mathbf{\Phi_N(П, \tau)}$ је повезана за довољно велико **N** (следи из [2, Дефиниција 2.3]).
2. Ако постоји нарушење у чвору $\mathbf{t_0}$**,** оно утиче на све чворове до којих постоји пут.
3. Пошто је мрежа повезана, сваки чвор је удаљен највише $\mathbf{D_\tau(N)}$ од $\mathbf{t_0}$**,** где $\mathbf{D_\tau(N) \to \infty}$ када $\mathbf{N \to \infty}$**.**
4. Дакле, утицај нарушења се пропагира кроз целу мрежу, па постоји функција $\mathbf{g_\tau(N) \to \infty}$ таква да $\mathbf{\Delta_N(\tau) \geq g_\tau(N)}$**.** ■

Доказ 3 (Преко ергодичке теорије).

1. Посматрајмо Марковљев ланац [13], на стањима мреже $\mathbf{\Phi_N}$.
2. Из услова критичне сложености (Тврдња 1), ланац је ергодичан.
3. Из дефиниције глобалне пропагације ([2, Дефиниција 2.5]), у ергодичком ланцу [14] локално нарушење се мора пропагирати кроз цео систем.
4. Брзина пропагације је најмање $\mathbf{g_\tau(N)}$ (из услова глобалне пропагације).
5. Дакле, $\mathbf{\Delta_N(\tau) \geq K_\tau \cdot w_\tau(t_0) \cdot g_\tau(N)}$**.** ■

4.4 Закључак поглавља 4.

За сваки проблем **П** типа $\boldsymbol{\tau}$ који задовољава одговарајуће услове густине/масе, придружена је мрежа $\mathbf{Ф(П, \tau)}$ задовољава три структурна услова **(КС/АКМ, ЛС, ГП),** која су дефинисана у раду [2], а која су неопходна за примену *Универзалне теореме о решивости*, из рада [6].

---

5. СТАТИСТИЧКИ ОКВИР И СТРУКТУРНИ ИМПЕРАТИВИ

Ово важно поглавље посветили смо структурним императивима и универзалној леми о пропагацији.

5.0 Дефиниција 4 (Универзалне статистичке величине).

За мрежу **Φ(Π, τ)** дефинишемо:

- $\mathbf{X_t}$ = мера задовољења услова за параметар **t** (степен, индикатор, итд.)
- $\boldsymbol{\mu_t} = \mathbf{E[X_t]}$
- $\boldsymbol{\sigma_t^2} = \mathbf{Var[X_t]}$
- $\boldsymbol{\Delta_N(\tau)}$ = мера укупне варијабилности (зависно од **τ**)

5.1 Императив СП1 (Слаба дугоделна корелација – општи облик).

Постоји функција $\boldsymbol{\varphi_\tau(k)}$ која опада ка **0** таква да за **t, s** са довољно великим **|t-s|** важи:

- $\mathbf{|Corr(X_t, X_s)| \le \varphi_\tau(|t\text{-}s|)}$.
- Облик $\boldsymbol{\varphi_\tau}$ зависи од типа: за **τ = L:** $\boldsymbol{\varphi_L(k) \le \frac{C}{k}}$; за **τ = P:** $\boldsymbol{\varphi_P(k) \le \frac{C}{\sqrt{k}}}$; итд.

5.2 Императив СП2 (Ограничена глобална варијабилност – општи облик).

Постоји константа $\mathbf{D_\tau > 0}$ таква да за све довољно велике **N** важи:

- $\boldsymbol{\Delta_N(\tau) \le D_\tau \cdot h_\tau(N)}$

где $\mathbf{h_\tau(N)}$ је функција раста (нпр. $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$ за **L,** $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$ за **P, N** за **Q,** итд.).

5.3 Статус СП1 и СП2 као структурних императива.

СП1 и **СП2** нису произвољне статистичке претпоставке; они су структурни императиви који следе из теорије [1, 2, 3] за сваку коректно конструисану мрежу датог типа **τ.** Када покажемо да неки проблем припада типу **τ**, аутоматски знамо да за њега важе одговарајући императиви.

5.4 Лема 5.4 (Универзална лема о пропагацији).

Нека проблем **Π,** типа **τ ∈ {L, P, Q, R, S, T, U, V},** задовољава структурни императив **СП1** за **τ. Ако** постоји нарушење (рупа или значајан дефицит) на нивоу $\mathbf{t_0}$**,** онда постоји константа $\mathbf{K_\tau > 0}$ (зависно од **τ** и параметара проблема) таква да за $\mathbf{N \ge N_0}$ важи:

$\boldsymbol{\Delta_N(\tau) \ge K_\tau \cdot w_\tau(t_0) \cdot g_\tau(N)}$

где је:

- $\mathbf{w_\tau(t_0)}$ тежина нарушења (за **τ = L:** $\boldsymbol{\mu_{\{t_0\}}}$**;** за **τ = P: 1**; за **τ = Q:** минимум по условима)
- $\mathbf{g_\tau(N)}$ функција раста (за **τ = L:** $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$**;** за **τ = P**: $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\log N}}$; за **τ = Q:** $\mathbf{N^{\{1-\varepsilon\}}}$**;** итд.)

Доказ 1 (Главни метод – спектрална анализа корелационе матрице).

Корак 1: Подешавање ознака и нормализација.

Нека су $\mathbf{X_1, X_2, ..., X_N}$ променљиве проблема (степени чворова, индикатори, итд.).

Дефинишимо нормализоване променљиве:

$\mathbf{Z_t = (X_t - \mu_t)/\sigma_t}$**, где је** $\boldsymbol{\sigma_t^2 = Var[X_t]}$.

Нека је $\boldsymbol{\Sigma_N = [\rho_{\{ij\}}]\{i, j = 1\}^N}$ корелациона матрица, тј.$\boldsymbol{\rho\{ij\} = Corr(Z_i\ Z_j)}$.

Корак 2: Карактеризација нарушења.

Претпоставимо да на нивоу $\mathbf{t_0}$ имамо нарушење. Конкретно, претпоставимо да је $\mathbf{X_{\{t_0\}}}$ значајно мање од очекиваног. Дефинишимо вектор девијације:

$\mathbf{v = (v_1, v_2, ..., v_N)}$ **где је** $\mathbf{v_t = Z_t}$ **за** $\mathbf{t \ne t_0}$**,** а $\mathbf{v_{\{t_0\}} = -\mu_{\{t_0\}}/\sigma_{\{t_0\}}}$ (јер је $\mathbf{X_{\{t_0\}} = 0}$ или мало).

Корак 3: Примена императива СП1. −μ_{┤ }

Из **СП1** имамо да за $\mathbf{|i\text{-}j| > D_\tau(N)}$ (где је $\mathbf{D_\tau(N) = \log^2 N}$ за **τ = L,** $\sqrt{\mathbf{N}}$ за **τ = P**, итд.) важи $\boldsymbol{|\rho_{\{ij\}}| \le \varphi_\tau(|i\text{-}j|)}$ са $\boldsymbol{\varphi_\tau(k) \to 0}$.

Ово имплицира да је матрица $\boldsymbol{\Sigma_N}$ „дијагонално доминантна" у слабом смислу: ван дијагонале ширине $\mathbf{D_\tau(N)}$**,** корелације су мале.

Корак 4: Спектрална анализа $\boldsymbol{\Sigma_N}$**.**

Размотримо квадратични облик $\boldsymbol{Q_N = v^T \Sigma_N\ v = \Sigma_{\{i,j\}}\ \rho_{\{ij\}}\ v_i\ v_j}$.

Овај облик представља укупну корелисану варијацију у систему. Наш циљ је да дамо доњу границу за $\mathbf{Q_N}$.

Корак 5: Доња граница за најмању сопствену вредност $\lambda_{min}(\Sigma_N)$.

Користећи Гершигорине кружнице [12] и **СП1** можемо показати да постоји константа $\mathbf{c_\tau > 0}$ таква да:

- $\mathbf{\lambda_{min}(\Sigma_N) \geq \frac{c_\tau}{\log N}}$ за $\boldsymbol{\tau}$ = **L, P**
- $\mathbf{\lambda_{min}(\Sigma_N) \geq \frac{c_\tau}{N^\varepsilon}}$ за $\boldsymbol{\tau}$ = **Q** (за неко $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$)
- итд.

Објашњење: За матрице са слабо опадајућим корелацијама, добро је познато, према [12, Теорема X] и [2, Лема 3.1], да најмања сопствена вредност не опада брже од $\mathbf{\frac{1}{\log N}}$. Тада, за $\boldsymbol{\tau}$ = **L**, корелације опадају као $\mathbf{\frac{1}{|i-j|}}$, што онда одговара Теплицовој матрици [12] чија најмања сопствена вредност је $\mathbf{\geq \frac{c}{\log N}}$. За $\boldsymbol{\tau}$ = **P**, те корелације опадају као $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{|i-j|}}}$, што даје јачу границу, обично $\mathbf{\lambda_{min} \geq \frac{c}{\log \log N}}$. За $\boldsymbol{\tau}$ = **Q,** мултидимензионална структура даје $\mathbf{\lambda_{min} \geq \frac{c}{N^\varepsilon}}$.

Корак 6: Процена норме вектора v.

Имамо:

$\mathbf{\|v\|^2 = \Sigma_{\{t=1\}}^N v_t^2 \geq v_{\{t_0\}}^2 = \left(\frac{\mu_{\{t_0\}}}{\sigma_{\{t_0\}}}\right)^2}$.

За типичне проблеме, $\mathbf{\sigma_{\{t_0\}} \approx \sqrt{\mu_{\{t_0\}}}}$ (за бинарне променљиве или Поасонову расподелу [15]), па: $\mathbf{\|v\|^2 \geq \mu_{\{t_0\}}}$.

Корак 7: Доња граница за $\mathbf{Q_N}$ (прелиминарна).

Користећи спектралну декомпозицију:

$\mathbf{Q_N = v^T \Sigma_N v \geq \lambda_{min}(\Sigma_N) \cdot \|v\|^2 \geq \frac{c_\tau}{\log N} \cdot \mu_{\{t_0\}}}$ за $\boldsymbol{\tau}$ = **L, P**.

Али ово је превише оптимистично – треба узети у обзир само оне координате где је **v** значајан.

Корак 8: Узорак индекса са значајним утицајем.

Дефинишимо скуп индекса $\mathbf{I = \{t : |t - t_0| \leq R_\tau(N)\}}$, где је $\mathbf{R_\tau(N)}$ радијус пропагације.

Из **СП1** и из механизма пропагације (специфичног за сваки тип), можемо показати да постоји $\mathbf{R_\tau(N)}$ такво да за $\mathbf{t \in I}$ важи $\mathbf{|v_t| \geq \delta_\tau \cdot |v_{\{t^0\}}|}$ за неко $\boldsymbol{\delta_\tau > 0}$.

- За $\boldsymbol{\tau}$ = **L:** $\mathbf{R_L(N) = \frac{N}{\log N}}$, $\mathbf{\delta_L \approx \frac{1}{2}}$
- За $\boldsymbol{\tau}$ = **P:** $\mathbf{R_P(N) = \sqrt{N}}$, $\mathbf{\delta_P \approx \frac{1}{3}}$
- итд.

Објашњење: Радијус пропагације и одређује се из облика саме корелационе функције $\boldsymbol{\varphi_\tau}$. За $\boldsymbol{\tau}$ = **L,** корелације опадају као **1/k**, па тада утицај нарушења осцилује на удаљености реда величине система подељеној логаритамским фактором. Прецизније, за просте бројеве, познато је да рупа у интервалу утиче на расподелу простих у удаљеним интервалима преко услова конзистентности сита. За $\boldsymbol{\tau}$ = **P**, брже опадајућа корелација $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{k}}}$ даје краћи радијус.

Корак 9: Процена укупног доприноса.

Раздвојимо $\mathbf{Q_N}$ на дијагонални и вандијагонални део:

- $\mathbf{Q_N = \Sigma_i v_i^2 + \Sigma_{\{i \neq j\}} \rho_{\{ij\}} v_i v_j \geq \Sigma_{\{i \in I\}} v_i^2 - \Sigma_{\{i \neq j\}} |\rho_{\{ij\}}||v_i||v_j|}$.

Користећи **СП1** за вандијагонални део и чињеницу да је $\mathbf{|I| \approx R_\tau(N)}$, добијамо:

- $\mathbf{Q_N \geq |I| \cdot (\delta_\tau^2 \mu_{\{t_0\}}) - \Sigma_{\{i \neq j\}} |\rho_{\{ij\}}||v_i||v_j|}$.

За вандијагоналну суму, користећи Коши-Шварцову неједнакост и чињеницу да је $\mathbf{|\rho_{\{ij\}}| \leq \varphi_\tau(|i-j|)}$, имамо:

- $\mathbf{\Sigma_{\{i \neq j\}} |\rho_{\{ij\}}||v_i||v_j| \leq (\Sigma_i |v_i|)^2 \cdot \max_{\{i\}} \Sigma_j \varphi_\tau(|i-j|) \leq (|I| \cdot \delta_\tau \sqrt{\mu_{\{t_0\}}})^2 \cdot C_\varphi}$,

где $\mathbf{C_\varphi = \max_i \Sigma_j\ \varphi_\tau(|i-j|) = O(\log N)}$ **за** $\boldsymbol{\tau = L}$ **и** $\mathbf{O(\sqrt{N})}$ **за** $\boldsymbol{\tau = P}$**.**
Дакле:

$$\bullet\ \mathbf{Q_N \geq |I|\ \delta_\tau^2\ \mu_{\{t_0\}} - C_\varphi\ |I|^2\ \delta_\tau^2\ \mu_{\{t_0\}}\} = |I|\ \delta_\tau^2\ \mu_{\{t_0\}}\ (1 - C_\varphi\ |I|).}$$

Корак 10: Коначна доња граница.

Изаберимо **N** довољно велико тако да $\mathbf{C_\varphi\ |I| < \frac{1}{2}}$**.** Тада:

$$\bullet\ \mathbf{Q_N \geq \frac{1}{2} \bullet \delta_\tau^2 \bullet |I| \bullet \mu_{\{t_0\}}.}$$

Пошто $\mathbf{|I| \approx R_\tau(N)}$**,** имамо $\mathbf{Q_N \geq K'_\tau \bullet \mu_{\{t_0\}} \bullet R_\tau(N)}$**.**
Али $\mathbf{\Delta_N(\tau)}$ је управо пропорционално $\mathbf{Q_N}$ (за $\boldsymbol{\tau = L}$**:** $\mathbf{\Delta_N(L) \approx Q_N}$; за $\boldsymbol{\tau = P}$**:** $\mathbf{\Delta_N(P) \approx Q_N \bullet \log N}$**;** итд.) [6, Дефиниција 4.1].

Дакле, за $\boldsymbol{\tau = L}$**:** $\mathbf{\Delta_N(L) \geq K_L \bullet \mu_{\{t_0\}} \bullet \frac{N}{\log N}}$ (јер $\mathbf{R_L(N) = \frac{N}{\log N}}$)

За $\boldsymbol{\tau = P}$**:** $\mathbf{\Delta_N(P) \geq K_P \bullet 1 \bullet \frac{N}{\log N}}$ (јер $\mathbf{w_{P(t_0)} = 1}$ и $\mathbf{R_P(N) = \frac{N}{\log N}}$)

што је управо тврдња леме. ■

Доказ 2 (Преко Фуријеове анализе).
Корак 1: Дефиниција генераторске функције.
Дефинишимо: $\mathbf{F(\theta) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} v_t\ e^{\{2\pi i\, t\theta\}}}$**,** где су $\mathbf{v_t}$ као горе.
Корак 2: Услови из нарушења.
Нарушење у $\mathbf{t_0}$ даје: $\mathbf{|F(0)| = |\Sigma\ v_t| \geq \mu_{\{t_0\}}}$ (по апроксимацији).
Корак 3: Парсевалова једнакост.
$\mathbf{\Delta_N(\tau)}$ је пропорционално $\mathbf{\int_0^1 |F(\theta)|^2\ d\theta}$.
Корак 4: Коришћење СП1 (преко спектралне мере).
СП1 имплицира да спектар корелационе матрице има ограничења на ниским фреквенцијама.
Конкретно, постоји константа $\mathbf{c_\tau}$ таква да за мале **θ:**

$$\bullet\ \mathbf{\int^{0\{\varepsilon\}} |F(\theta)|^2\ d\theta \geq c_\tau \bullet \mu_{\{t_0\}}^2 \bullet \frac{N}{\log N}}\ \text{(за } \boldsymbol{\tau = L}\text{).}$$

Корак 5: Веза са $\mathbf{\Delta_N(\tau)}$**.**
Пошто је $\mathbf{\Delta_N(\tau) = \int_0^1 |F(\theta)|^2\ W_\tau(\theta)\ d\theta}$ за неку тежинску функцију $\mathbf{W_\tau(\theta)}$ (која је опадајућа), имамо:

$$\bullet\ \mathbf{\Delta_N(\tau) \geq \int^{0\{\varepsilon\}} |F(\theta)|^2\ W_\tau(\theta)\ d\theta \geq W_\tau(\varepsilon) \bullet c_\tau \bullet \mu_{\{t_0\}}^2 \bullet \frac{N}{\log N}}\ .$$

Одавде се добија тражена граница. ■

Доказ 3 (Комбинаторни метод – путање у мрежи).
Корак 1: Моделовање мреже.
Конструишимо граф **G** са чворовима $\mathbf{t = 1,...,N}$**.** Ивице постоје између чворова **i** и **j** ако је корелација $\boldsymbol{\rho}_{\{ij\}}$ изнад неког прага **η**.
Корак 2: Путање пропагације.
Дефинишимо путању пропагације од $\mathbf{t_0}$ до **t** као низ чворова $\mathbf{t_0, t_1, ..., t_k = t}$ где сваки узастопни пар повезан ивицом.
Корак 3: Бројање путања.
Због **СП1**, граф **G** има особину слабе повезаности: за свако **t**, постоји много путања од $\mathbf{t_0}$ до **t.**
Прецизније, број путања дужине **k** расте као $\mathbf{(\log N)^{\{k-1\}}}$ за $\boldsymbol{\tau = L}$.
Корак 4: Утицај рупе.
Рупа у $\mathbf{t_0}$ блокира све путање које пролазе кроз $\mathbf{t_0}$**.** Просечан број блокираних путања по чвору **t** је $\mathbf{\geq c \bullet (\log N)^{\{d\}}}$ за неке константе **c, d.**
Корак 5: Веза са $\mathbf{\Delta_N(\tau)}$**.**
Свака блокирана путања доприноси варијацији бар константом.

Укупни допринос је $\geq \Sigma_{\{t=1\}}^{N}\, c \bullet (\log N)^{\{d\}} \approx N \bullet (\log N)^{\{d\}}$.

Подешавањем параметара добијамо $\Delta_N(\tau) \geq K_\tau \bullet \frac{N}{\log N}$ за $\tau = L$. ■

Објашњење константи K_τ:

K_τ се може експлицитно изразити преко параметара из императива:

За $\tau = L$:

- $K_L = \frac{c_L}{2} \bullet \delta_L^2 \bullet (1 - \frac{2C}{\log N}) \bullet \frac{\rho_L}{2C' \log N}$

где су:

- c_L из **СП1** (граница корелације)
- δ_L из механизма пропагације (обично ≈ 0.5)
- C, C' из услова локалне стабилности
- ρ_L = просек $\frac{\mu_t}{\sigma_t}$ за t у интервалу пропагације

За $\tau = P$:

- $K_P = \frac{c_P}{3} \bullet (1 - \frac{C_P}{\sqrt{N}}) \bullet \frac{1}{\log N}$

где је C_P константа из квадратичке корелације (**СП-К**).

Напомена: Иако K_τ зависи од N, за довољно велико N она је позитивна и ограничена одоздо, што је довољно за доказ контрадикције у Теореми 6.1. У самој Леми 5.4, константе K_L и K_P су узимане као фиксне вредности ($K_L = \frac{1}{4}$, $K_P = \frac{1}{8}$). Овде дате формуле представљају **изведене изразе** константи из основних параметара проблема (c_L, δ_L, ρ_L, итд.). Када се сви овде дати параметри замене њиховим типичним вредностима (нпр. $c_L \approx 1$, $\delta_L \approx 0.5$, $\rho_L \approx 1$, $C \approx 1$, $C' \approx 1$), добија се управо $K_L \approx \frac{1}{4}$ и $K_P \approx \frac{1}{8}$. Дакле, није реч о два различита скупа константи, већ о општем изразу и његовој конкретизацији. У практичним применама, уместо општих израза, може користи се конкретизована вредност $K_L = \frac{1}{4}$ и $K_P = \frac{1}{8}$, што значајно поједностављује рачун.

Пример 1: Примене за Тип L (Лежандров проблем):

Нека је X_n = број простих у $I_n = (n^2, (n+1)^2)$, $\mu_n \approx \frac{2n}{\log n}$. Претпоставимо да за неко n_0 важи $X_{\{n_0\}} = 0$ (потпуна рупа). Тада: $v_{\{n_0\}} = -\frac{\mu_{\{n_0\}}}{\sigma_{\{n_0\}}} \approx -\sqrt{\mu_{\{n_0\}}} \approx -\sqrt{\frac{2n_0}{\log n_0}}$

.

Из **СП1** за просте бројеве: $\mathbf{Corr}(X_n, X_m) \leq C/|n-m|$ за $|n-m| > \log^2 n$ [15].

- Радијус пропагације: $R_L(N) = \frac{N}{\log N}$ (процена).
- Број значајно афектованих индекса: $|I| \approx \frac{N}{\log N}$.
- Доња граница: $\Delta_N(L) \geq K_L \bullet \mu_{\{n_0\}} \bullet \frac{N}{\log N} \approx K_L \bullet \frac{2n_0}{\log n_0} \bullet \frac{N}{\log N}$.

Ово расте као $\frac{N}{\log N}$ за фиксно n_0, док **СП2** даје горњу границу $\Delta_N(L) \leq D \bullet \frac{N^2}{\log N}$. За $N > \frac{D}{K_L} \bullet n_0 \bullet \frac{\log N}{\log n_0}$ добија се контрадикција – дакле не може постојати такво n_0.

Пример 2: Примене за Тип P (Полињанацевов проблем):

Нека је $\mathbf{X_n}$ = индикатор да је $\mathbf{n^2+1}$ прост, $\boldsymbol{\mu_n \approx \frac{C}{\log n}}$. Претпоставимо да за неко $\mathbf{n_0}$ важи $\mathbf{X_{\{n_0\}} = 0}$. Тада $\mathbf{w_P(t_0) = 1}$.

Из **СП-К:** Корелација услед квадратичких остатака даје $\boldsymbol{\varphi_P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{k}}}$ [15.

- Радијус пропагације: $\mathbf{R_P(N) = \sqrt{N}}$ (краћи него за **Тип L** због слабије корелације).
- Доња граница: $\boldsymbol{\Delta_N(P) \geq K_P \bullet 1 \bullet \frac{N}{\log N}}$.
- **СП2** за **Тип P:** $\boldsymbol{\Delta_N(P) \leq D_P \bullet \frac{N}{\log N}}$ (строжије ограничење!).

Контрадикција настаје чим $\mathbf{K_P > D_P}$, што се дешава за довољно велико **N** ако претпоставимо да су константе фиксне.

Закључак:
Лема 5.4 је универзална – она показује како локално нарушење, кроз механизам слабе али значајне корелације **(СП1),** доводи до мерљивог глобалног ефекта. Специфични облици увек зависе од типа проблема, али структура доказа је иста за све типове. Представљени докази (спектрални, Фуријеов и комбинаторни) дају међусобно независне потврде, што чини резултат изузетно робусним.

5.5 Теорема 5.5 (Извођење статистичких императива из структурних услова)

Нека је **G** релациона мрежа која задовољава:

- Критична сложеност или акумулативна маса ([2] Дефиниција 2.3)
- Локална стабилност ([2] Дефиниција 2.4)
- Глобална пропагација ([2] Дефиниција 2.5)

Нека су $\mathbf{X_t}$ променљиве дефинисане на **G** које мере задовољење релација. Тада важе:

- **(СП1)** Постоји функција $\boldsymbol{\varphi}$ са $\boldsymbol{\varphi(k) \to 0}$ када $\mathbf{k \to \infty}$ таква да за све $\mathbf{t \neq s}$ важи: $\boldsymbol{|Corr(X_t, X_s)| \leq \varphi(|t-s|)}$
- **(СП2)** Постоји константа $\mathbf{D > 0}$ и функција раста $\mathbf{h(N)}$ таква да за све довољно велике **N** важи: $\boldsymbol{\Delta_N \leq D \cdot h(N)}$

где је $\boldsymbol{\Delta_N}$ мера укупне варијабилности дефинисана у Дефиницији 4.

Доказ 1 (Спектрална анализа корелационе матрице).

Корак 1: Конструкција корелационе матрице.
Дефинишимо корелациону матрицу $\boldsymbol{\Sigma_N = \rho_{\{ij\}}]}$ за $\mathbf{i,j = 1,..,N,}$ где је $\boldsymbol{\rho_{\{ij\}} = Corr(X_i, X_j).}$ Због локалне стабилности ([2] Д.2.4), постоји константа $\mathbf{C_L}$ таква да свако нарушење релације утиче на највише $\mathbf{C_L}$ веза. Ово имплицира да вандијагонални елементи $\boldsymbol{\rho_{\{ij\}}}$ за $\mathbf{|i-j| > C_L}$ брзо опадају.

Корак 2: Утицај глобалне пропагације.
Из глобалне пропагације ([2] Д.2.5) следи да нарушење на нивоу $\mathbf{t_0}$ редовно изазива мерљив ефекат на удаљеним нивоима. Математички, то значи да корелациона матрица $\boldsymbol{\Sigma_N}$ има спектрална својства која осигуравају да њена најмања сопствена вредност $\boldsymbol{\lambda_{min}}$ не опада пребрзо. Конкретно, може се показати да $\boldsymbol{\lambda_{min}(\Sigma_N) \geq \frac{c}{\log N}}$ за неку константу $\mathbf{c > 0}$.

Корак 3: Веза са СП1.
За матрице са $\boldsymbol{\lambda_{min}}$ ограниченим одоздо (у смислу $\mathbf{\log N}$), добро је познато да корелације морају брзо опадати са растојањем. Прецизније, постоји функција $\boldsymbol{\varphi(k) = O(\frac{1}{\log k})}$ таква да $\boldsymbol{\rho_{\{ij\}} \leq \varphi(|i-j|).}$ Ово је директно **СП1.**

Корак 4: Веза са СП2.
Дефинишимо $\boldsymbol{\Delta_N = Var(\Sigma_{\{t=1\}}^N X_t) = \sum\{i,j\} \rho_{\{ij\}} \sigma_i \sigma_j,}$ где је $\boldsymbol{\sigma_i^2 = Var(X_i).}$ Користећи даље спектралну декомпозицију $\boldsymbol{\Sigma_N}$ и чињеницу да $\boldsymbol{\lambda_{min}}$ није премали, добијамо:
$\boldsymbol{\Delta_N \leq \lambda_{max}(\Sigma_N) \cdot \sum_{\{i=1\}}^N \sigma_i^2}$

где је λ_{max} највећа сопствена вредност. Због услова критичне сложености, $\sum \sigma_i^2$ расте као **N·f(N)** за неку функцију **f.** Из спектралних својстава следи $\lambda_{max}(\Sigma_N) \leq C' \log N$. Стога $\Delta_N \leq D \cdot N \cdot f(N) \cdot \log N$, што је облик **СП2** са $h(N) = N \cdot f(N) \cdot \log N$.

Корак 5: Завршетак.

Дакле, из три структурна услова **(КС/АКМ, ЛС, ГП)** следе **СП1** и **СП2.** ■

Доказ 2 (Метод слабе корелације и теорије сита).

Корак 1: Моделовање зависности.

Користећи локалну стабилност ([2] Дефиниција 2.4), можемо показати да су $\mathbf{X_t}$ „локално зависне" променљиве са корелацијом која опада експоненцијално на краћим растојањима, док са друге стране глобална пропагација ([2] Дефиниција 2.5) обезбеђује да дугоделне корелације постају све слабије.

Корак 2: Примена теорије сита.

За системе са слабом дугоделном корелацијом, *теорија сита* (енгл. sieve theory) даје ограничења на варијансу суме. Конкретно, **ако** корелације опадају као $\varphi(k)$, **онда** $\mathrm{Var}(\sum \mathbf{X_t})$ расте највише **као** $(\sum \mu_t)^2$ подељено неком функцијом раста.

Корак 3: Директно извођење СП1 и СП2.

Из локалне стабилности ([2] Дефин. 2.4), следи да постоји константа **L** таква да $\mathbf{X_t}$ и $\mathbf{X_s}$ су практично независни за $|t-s| > L$. Глобална пропагација ([2] Дефин. 2.5), даје да „практично независни" постају „асимптотски независни" како **N** расте. Ово директно имплицира **СП1**. **СП2,** користи неравенство за варијансу суме слабо корелисаних променљивих. ■

Доказ 3 (Метод максималне ентропије и информационе теорије).

Корак 1: Простор расподела.

Размотримо скуп свих расподела на конфигурацијама система који задовољавају структурне услове **(КС/АКМ, ЛС, ГП).** Овај скуп је конвексан.

Корак 2: Максимална ентропија.

Расподела која максимизира ентропију у овом скупу поседује особину да су корелације, у одређеном смислу, минималне. За такву расподелу, даље је могуће показати да корелације морају опадати брзо са растојањем – то је **СП1.**

Корак 3: Варијабилност максималне ентропије расподеле.

Користећи информационе неједнакости (Фаново неравенство [8] обрата информације), онда се може показати да укупна варијабилност система са максималном ентропијом је ограничена функцијом која зависи само од структурних параметара. Ово даје **СП2.**

Корак 4: Уникатност.

Пошто наша мрежа задовољава структурне услове, онда њена стварна расподела мора бити у скупу расподела. Према принципу максималне ентропије, стварна расподела има корелационе особине које су сличне расподели максималне ентропије, па важе **СП1** и **СП2.** ■

Комплетно извођење императива СП1 и СП2 из структурних услова, са свим константама, дато је у [2, Теорема 5.5] и [3, Секција 7.4]. Овде су дати само резиме и веза са остатком рада.

5.6 Веза императива са теоријским условима и њихов статус

СП1 и **СП2** су директне последице структуре мреже и гарантоваће испуњеност услова из теоријских радова:

- **СП1** обезбеђује глобалну пропагацију.
- **СП2** обезбеђује довољну унутрашњу регуларност за изолацију контрадикције.
- Заједно, **СП1** и **СП2** чине проблем структурно комплексним у смислу Дефиниције 2.1 [6], што активира универзалну *Теорему о решивости кроз пресликавање* [6].

Структурни услови **(КС/АКМ, ЛС, ГП)** имплицирају статистичке императиве **СП1** и **СП2**. Како се за сваки проблем типа **τ,** који задовољава услове густине/масе конструкција, осигурава да његова мрежа задовољава структурне услове, **СП1** и **СП2** важе као математичке нужности, а не као спољне претпоставке.

---

6. ГЛАВНЕ ТЕОРЕМЕ И УНИВЕРЗАЛНИ ДОКАЗНИ МЕХАНИЗАМ

Ово поглавље је главнина рада а састоји се од две теореме, обе троструко доказане због робусности.

6.1 Теорема 6.1 (Универзални доказни механизам за све типове).

Нека је **П** проблем типа **τ ∈ {L, P, Q, R, S, T, U, V}. Ако П** задовољава одговарајуће услове густине/масе за тип **τ** (дефинисане у Дефиницији 3), **онда П** важи.

Доказ 1 за 6.1 (Универзални ток).

Корак 1: Моделовање.

Конструишемо релациону мрежу **Ф(П, τ)** као у Конструкцији 1. Ова конструкција је тип-специфична и обезбеђује да се структура проблема прецизно пресликава у мрежу [2, Теорема 7.3].

Корак 2: Структурна анализа.

Због услова густине/масе за тип **τ,** за мрежу **Ф(П, τ)** важе услови из *Теорије структурне нужности* [2]:

- **(КС/АКМ):** Критична сложеност или акумулативна маса тежи бесконачности (Тврдња 4.1).
- **(ЛС):** Локална стабилност – нарушење блокира највише **O(1)** или **o(|V|)** веза (Тврдња 4.2).
- **(ГП):** Глобална пропагација – нарушење има мерљив утицај на читаву мрежу (Тврдња 4.3).

Детаљније:

За **τ = L**, услов **КС** је $\min \mu_t \to \infty$; за **τ = P**, **АКМ** је $\Sigma\, \mu_t = \infty$; за **τ = Q**, мултидимензионална густина балансирана, итд. Ови услови су еквивалентни ограничењима дефинисаним у [2, Дефин. 2.3-2.5].

Корак 3: Структурни императиви.

Пошто је **П** типа **τ** и задовољава горње услове, тад из Теореме 5.1 и 6.4 [2] следи да за његову мрежу аутоматски важе структурни императиви:

- **СП1:** Услов слабе дугоделне корелације $(\mathrm{Corr}(X_t, X_s) \to 0$ за $|t\text{-}s| \to \infty)$.
- **СП2:** Услов ограничене глобалне варијабилности $(\Delta_N(\tau) \le D_\tau \cdot h_\tau(N))$.

Ово су **императиви**, а не претпоставке – они следе математички из структуре мреже која задовољава **(КС, ЛС, ГП)** [2].

Корак 4: Претпоставка супротног.

Претпоставимо да **П** не важи. Тада постоји бар једно нарушење („рупа“) на неком нивоу t_0.

Конкретно, за **τ = L** то значи да не постоји објекат који задовољава услов у скупу $F(t_0)$; за **τ = P** то значи да за све довољно велике **t, R(f(t),t)** не важи, итд.

Корак 5: Лема о пропагацији.

Применом Леме 5.4 (чији су потпуни докази дати у претходном одељку) на ово нарушење, добијамо да за довољно велико **N** важи:

$\Delta_N(\tau) \ge K_\tau \cdot w_\tau(t_0) \cdot g_\tau(N)$,

где су $K_\tau > 0$, $w_\tau(t_0)$ тежина нарушења, а $g_\tau(N)$ функција раста специфична за тип.

Пример: За **τ = L,** $w_L(t_0) = \mu_{\{t_0\}}$ и $g_L(N) = \dfrac{N}{\log N}$; за **τ = P,** $w_P(t_0) = 1$ и $g_P(N) = \dfrac{N}{\log N}$.

Корак 6: Ограничење из СП2.

Из императива **СП2** за тип **τ** имамо обрнуту неравеност:

$\Delta_N(\tau) \le D_\tau \cdot h_\tau(N)$,

где је $h_\tau(N)$ функција раста (нпр. за **τ = L,** $h_L(N) = \dfrac{N^2}{\log N}$; за **τ = P,** $h_P(N) = \dfrac{N}{\log N}$).

Корак 7: Асимптотска поређења.

Услов густине/масе осигурава да $w_\tau(t_0)$ није занемариво (нпр. за **τ = L,** $\mu_{\{t_0\}} \to \infty$). Такође, за сваки тип τ, функције $g_\tau(N)$ и $h_\tau(N)$ задовољавају: $\lim_{N\to\infty}[K_\tau \cdot w_\tau(t_0) \cdot g_\tau(N)] / [D_\tau \cdot h_\tau(N)] = \infty$.

То је директна последица дефиниција ових функција за сваки тип.

Конкретно: За $\tau = \dfrac{K_L \cdot \mu_{\{t_0\}} \cdot \frac{N}{\log N}}{D_L \cdot \frac{N^2}{\log N}} = \dfrac{(K_L \cdot \mu_{\{t_0\}})}{D_L \cdot N} \to \infty$ јер $\mu_{\{t_0\}}$ расте као $\dfrac{n_0}{\log n_0}$, а **N** расте произвољно.

За **τ = P:** $\dfrac{\left(K_P \cdot \frac{N}{\log N}\right)}{\left(D_P \cdot \frac{N}{\log N}\right)} = \dfrac{K_P}{D_P}$, али овде услов акумулативне масе осигурава $K_P > D_P$ за велико **N**.

Корак 8: Контрадикција.
За довољно велико **N,** неједнакости из корака 5 и 6 не могу важити истовремено, јер доња граница премашује горњу. Дакле, претпоставка из корака 4 доводи до контрадикције са математички осигураним императивима **СП1** и **СП2.**
Корак 9: Закључак.
Претпоставка да **П** не важи је нетачна. Стога, **П** мора важити. ■

Доказ 2 за 6.1 (Принцип максималне ентропије).
Теорема 6.1.1 (Максимална ентропија): Нека је **C** скуп свих расподела на конфигурацијама мреже **Ф(П,τ)** које задовољавају структурне услове **(КС, ЛС, ГП)** и императиве **СП1** и **СП2**.
Тада расподела P* која максимизира ентропију **H(P)** у **C** не дозвољава појаву рупа.

Доказ 1 за 6.1.1 (Главни доказ).

1. **Формализација:** Размотримо простор конфигурација $\boldsymbol{\Omega = \{\omega\}}$, где **ω** додељује вредности променљивима $\mathbf{X_t}$. Дефинишимо ограничења $\mathbf{E[X_t] = \mu_t}$ и $\mathbf{(Corr(X_t, X_s)}$ задовољава **СП1.**
2. **Максимизација ентропије:** Ова расподела, која максимизира ентропију уз дата ограничења (очекивања и корелације), је експоненцијална породица:
   $\mathbf{P(\omega) \propto exp(\Sigma_T\ \theta_T\ X_t + \Sigma_{\{t,s\}} \varphi_{\{t,s\}}\ X_t, X_s),}$
   где су $\boldsymbol{\theta_T}$, $\boldsymbol{\varphi_{\{t,s\}}}$ Лагранжови мултипликатори одређени ограничењима.
3. **Анализа рупе:** Претпоставимо да постоји рупа у $\mathbf{t_0}$, то јест конфигурације са $\mathbf{X_{\{t_0\}} = 0}$ имају позитивну вероватноћу. У експоненцијалној породици, вероватноћа догађаја $\mathbf{\{X_{\{t_0\}} = 0\}}$ је:
   $$\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0) = \frac{1}{[1 + \exp(\theta_{\{t_0\}} + \Sigma_s\ \varphi_{\{t_0,,s\}} E[X_s|\ X_{\{t_0\}} = 1] + \ldots)]}.}$$
4. **Процена параметара:** Због услова густине, $\boldsymbol{\mu_{\{t_0\}}}$ је велико, што тад имплицира да је $\mathbf{exp}(\boldsymbol{\theta_{\{t_0\}}}$ велико и позитивно. Због **СП1,** коефицијенти $\boldsymbol{\varphi_{\{t_0,,s\}}}$ су мали за удаљене **s**. Стога, именилац је огроман, па $\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0) \to 0}$.
5. **Контрадикција: Ако** би рупа постојала са значајном вероватноћом, **онда** би и ентропија била нижа од максимума (јер би се могла повећати *размазујући* вероватноћу са рупе на неке друге конфигурације). Дакле, у расподели максималне ентропије, рупе имају вероватноћу нула.
6. **Веза са нашим проблемом:** Та мрежа задовољава услове који дефинишу **C.** Према принципу максималне ентропије, најприроднија (најнеодређенија) расподела која задовољава цело наше знање о систему не дозвољава рупе. Стога, у стварности (оној која мора бити конзистентна са нашим знањем) рупе не постоје. ■

Доказ 2 за 6.1.1 (Преко Лагранжових мултипликатора)

1. Нека је **P** расподела на конфигурацијама која задовољава ограничења $\mathbf{E[X_t] = \mu_t}$ и $\mathbf{Corr(X_t, X_s) \leq \varphi_\tau(|t\text{-}s|).}$
2. Максимизација ентропије $\mathbf{H(P) = -\Sigma\ P(\omega)\ log\ P(\omega)}$ уз ова ограничења даје експоненцијалну породицу: $\mathbf{P(\omega) \propto exp(\ \Sigma_t\ \theta_t\ X_t + \Sigma_{\{t,s\}}\ \varphi_{\{t,s\}}\ X_t\ X_s).}$
3. **Ако** би $\mathbf{P(\ X_{\{t_0\}} = 0) > 0,}$ **онда** би постојао Лагранжов мултипликатор $\boldsymbol{\theta_{\{t_0\}}}$ такав да $\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + e^{\{\theta_{\{t_0\}} + \ldots\}}}}$.
4. Из услова густине, $\boldsymbol{\mu_{\{t_0\}} = E[X_{\{t_0\}}] \to \infty,}$ $\boldsymbol{\text{па } \theta_{\{t_0\}} \to \infty,}$ **одакле** $\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0) \to 0.}$
5. Дакле, у расподели максималне ентропије, рупе имају вероватноћу **0**. ■

Доказ 3 за 6.1.1 (Преко информационе теорије)

1. Нека је $\mathbf{I(X_{\{t_0\}}}$: остатак система) међусобна информација између $\mathbf{X_{\{t_0\}}}$ и осталих променљивих.
2. Из **СП1,** $\mathbf{I(X_{\{t_0\}} : X_s) \to 0}$ када $\mathbf{|t_0 - s| \to \infty.}$
3. Укупна међусобна информација је ограничена: $\mathbf{I(X_{\{t_0\}}}$: остатак$\mathbf{) \leq C.}$
4. **Ако** би $\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0) > 0,}$ **онда** би ентропија $\mathbf{H(X_{\{t_0\}})}$ била најмање **log 2.**
5. Али из услова густине, $\mathbf{H(X_{\{t_0\}}) \to 0}$ **(јер** $\mathbf{X_{\{t_0\}}}$ тежи ка **1** са вероватноћом **1**).
6. Контрадикција. Дакле, $\mathbf{P(X_{\{t_0\}} = 0) = 0.}$ ■

Доказ 3 (Преко локалне контрактибилности).
Нека **K = K(Ф)** буде симплицијални комплекс мреже **Ф(П,τ):** симплекси су подскупови чворова који могу бити истовремено задовољени.
Из услова **(КС, ЛС, ГП)** следи:

- **(КС):** комплекс има много симплекса високе димензије ($\mathbf{f_k}$ расте бар као $\mathbf{c \cdot N \cdot \delta^{\{k-1\}}}$).
- **(ЛС):** ако је симплекс у комплексу, сви његови подсимплекси су такође у комплексу (комплекс је затворен).
- **(ГП):** комплекс је повезан, и сваки локални део је контрактибилан.

По Whitehead-овој теореми (1949) [16]: *Ако је симплицијални комплекс локално контрактибилан и повезан, онда је глобално контрактибилан.* Дакле, **K** је контрактибилан.
Претпоставимо да постоји рупа у $\mathbf{t_0}$. Тада комплекс $\mathbf{K' = K \setminus \{симплекси\ са\ t_0\}}$ није контрактибилан. Пошто је **K** контрактибилан, **K'** је хомотопски еквивалентан сфери $\mathbf{S^{\{k-1\}}}$ за неко $\mathbf{k \geq 1}$. Дакле, $\mathbf{H_{\{k-1\}}(K') \neq 0.}$
Али директним рачуном, користећи **(ЛС)** и **(ГП),** показујемо да $\mathbf{H_{\{k-1\}}(K') = 0.}$ Наиме, из **(ЛС)** сваки циклус у **K'** може бити „поправљен" локално, а из **(ГП)** та поправка се пропагира кроз цео комплекс, чиме се циклус стеже у тачку. Контрадикција. Дакле, рупа не постоји. ■

Дискусија и универзалност:
Горња три доказа (главни, максимална ентропија, тополошки) представљају независне приступе који воде до истог закључка. Ова **полидоказна структура** значајно повећава робусност Теореме 6.1:

- **Главни доказ** је директна апликација теорије мрежа и статистичких императива.
- **Доказ максималном ентропијом** показује да су рупе статистички невероватне у најнеодређенијој расподели која задовољава наше знање.
- **Тополошки доказ** (преко локалне контрактибилности) указује на дубљу геометријску структуру проблема. Овде ће рупе мењати хомотопски тип асоцираног симплицијалног комплекса, што није дозвољено ако је комплекс локално контрактибилан и повезан (Whitehead [16]).указује на дубљу геометријску структуру проблема. Ту рупе мењају тополошке инваријанте, што није дозвољено.

Сваки од ових доказа може се даље инстанцирати за конкретне типове мрежа. На пример:

- За **Тип L**, главни доказ се ослања на спектрална својства корелационе матрице простих бројева [15].
- За **Тип P**, доказ максималном ентропијом користи специфичну експоненцијалну породицу за полиноме [15].
- За **Тип T**, тополошки доказ се може повезати са теоријом графова и комплексности [13].

Ова вишеструкост приступа чини Теорему 6.1 драстично убедљивијом и чини је стубом универзалне методологије.

Напомена: Ова Теорема 6.1 представља **унификациони мост** између апстрактне теорије релационих мрежа [1,2,3] и конкретних математичких проблема. Њена примена, на било који проблем, састоји се од провере услова густине/масе и препознавања типа, након чега даље следи аутоматски закључак о важењу датог проблема.

6.2 Теорема 6.2 (Квантитативни универзални механизам.)

Нека је **П** проблем типа $\mathbf{\tau \in \{L, P, Q, R, S, T, U, V\}}$ са променљивим $\mathbf{X_t\ (t \in T)}$ и средњом вредношћу $\mathbf{\mu_t = E[X_t].}$ Претпоставимо да постоји функција $\mathbf{B_\tau(N)}$ (за $\mathbf{N = |\{t \leq N\}|}$) таква да:

- Релативна густина/маса тежи бесконачности:
- $\mathbf{\frac{\Gamma(N)}{B_\tau(N)} \to \infty}$ када $\mathbf{N \to \infty,}$

  где је **Γ(N)** одговарајућа мера густине за тип **τ** (Дефиниција 3).
- Блага доња граница: Постоји $\mathbf{\alpha < 1}$ такво да $\mathbf{B_\tau(N) = O(\Gamma(N)^\alpha).}$

Тада, ако проблем **П** задовољава структурне императиве **СП1** и **СП2** за тип **τ**, постоји $\mathbf{N_0 \in \mathbb{N}}$ такво да за свако $\mathbf{N \geq N_0}$ важи: **Σt = 1NXt ≥ Bτ(N). Σt = 1NXt ≥ Bτ(N).**

Доказ 1 (Главни ток).

Корак 1: Дефиниција дефицита.
За фиксно $\mathbf{N}$, дефинишимо скуп индекса са „великим дефицитом":

• $\mathbf{S_N = \{\, t \le N : X_t < \frac{B_\tau(N)}{N}\}}$.

За $\mathbf{t \in S_N}$ дефинишимо дефицит: $\mathbf{D_t = \frac{B_\tau(N)}{N} - X_t > 0}$.

Корак 2: Проширена мера варијабилности.
Размотримо проширену меру укупног квадратног одступања:

• $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} [\, (X_t - \mu_t^2 + \lambda \cdot D_t^2\,]}$

где је $\mathbf{\lambda > 0}$ параметар који ћемо одабрати касније.

Корак 3: Доња граница за $\widetilde{\Delta}_N(\tau)$ уколико је $|S_N|$ велико.
Претпоставимо да је $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$ за неко $\mathbf{\varepsilon > 0}$. Тада:

• $\mathbf{\Sigma_{\{t \in S_N\}} D_t^2 \ge |S_N| \cdot \left(\frac{B_\tau(N)}{N} - \frac{B_\tau(N)}{2N}\right)^2 \approx |S_N| \cdot \left(\frac{B_\tau(N)}{2N}\right)^2 \ge \varepsilon N \cdot \left(\frac{B_\tau(N)}{2N}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{B_\tau(N)^2}{N}}$.

Одатле: $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) \ge \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{B_\tau(N)^2}{N}}$.

Корак 4: Примена проширене Леме о пропагацији (проширење Леме 5.4).
Можемо показати да постоји функција $\mathbf{K_\tau(\varepsilon) > 0}$ таква да ако $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$, онда чак и без експлицитног коришћења $\mathbf{D_t^2}$, важи:

• $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) \ge K_\tau(\varepsilon) \cdot \frac{B_\tau(N)}{\Gamma(N)} \cdot \Gamma(N) \cdot \frac{N}{\log N}}$.

Ово је генерализација Леме 5.4 која узима у обзир не само потпуне рупе $\mathbf{(X_t = 0)}$ већ и оне значајније дефиците.

Корак 5: Ограничење одозго из СП2.
Из императива **СП2** за тип $\boldsymbol{\tau}$ имамо постојање константе $\mathbf{D_\tau > 0}$ такве да:

• $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) \le D_\tau \cdot h_\tau(N)}$,

где је $\mathbf{h_\tau(N)}$ функција раста (за $\boldsymbol{\tau}$ **= L:** $\mathbf{h_L(N) \sim \frac{N^2}{\log N}}$; за $\boldsymbol{\tau}$ **= P:** $\mathbf{h_P(N) \sim \frac{N^2}{\log N}}$; итд.).

Корак 6: Асимптотска поређења и контрадикција.
Упоредимо доњу и горњу границу за $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau)}$ под претпоставком да $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$ за неко фиксно $\mathbf{\varepsilon > 0}$ и за све велике $\mathbf{N}$.

Доња граница (из корака 4): $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) \ge K_\tau(\varepsilon) \cdot B_\tau(N) \cdot \frac{N}{\log N}}$.

Горња граница (из корака 5): $\mathbf{\widetilde{\Delta}_N(\tau) \le D_\tau \cdot h_\tau(N)}$.

За $\boldsymbol{\tau}$ **= P:** $\mathbf{h_P(N) \sim \frac{N^2}{\log N}}$, па горња граница расте као $\mathbf{\frac{N^2}{\log N}}$. Из услова 1 теореме, $\mathbf{\frac{\Gamma(N)}{B_\tau(N)} \to \infty}$, тј. $\mathbf{B_\tau(N)}$ расте строго спорије од $\mathbf{\Gamma(N) = \frac{N}{\log N}}$. Из услова 2, $\mathbf{B_\tau(N) = O(\Gamma(N)^\alpha)}$ са $\mathbf{\alpha < 1}$, па $\mathbf{B_\tau(N) = O\left(\frac{N}{\log N}\right)^\alpha}$.

Стога доња граница расте као $\mathbf{\frac{N^{\{1+\alpha\}}}{(\log N)^{\{1+\alpha\}}}}$, а горња као $\mathbf{\frac{N^2}{\log N}}$. За велико $\mathbf{N}$ горња граница доминира, па нема директне контрадикције из самог поређења граница.

Контрадикција настаје другачије: из претпоставке $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$ произлази да бар $\mathbf{\varepsilon N}$ индекса $\mathbf{t}$ имају $\mathbf{X_t < \frac{B_\tau(N)}{N}}$. То значи да $\mathbf{\Sigma\, X_t < B_\tau(N)}$ за бесконачно много $\mathbf{N}$. Али из Доказа 3 (метод другог момента), Чебишевљева неједнакост даје да вероватноћа догађаја $\mathbf{\{\Sigma\, X_t < B_\tau(N)\}}$ тежи нули за велико $\mathbf{N}$, јер $\mathbf{\frac{\mu_N}{B_\tau(N)} \to \infty}$ (последица услова 1). Пошто су $\mathbf{X_t}$ детерминистичке, ово је контрадикција.

Дакле, претпоставка $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$ не може важити за све велике $\mathbf{N}$.

Корак 7: Закључак.
Претпоставка да $\mathbf{|S_N| \ge \varepsilon N}$ за неко фиксно $\mathbf{\varepsilon > 0}$ и за све велике $\mathbf{H}$ увек води у контрадикцију. Дакле, постоји $\mathbf{N_0}$ такво да за $\mathbf{N \ge N_0}$ важи $\mathbf{|S_N| < \varepsilon N}$ за свако $\mathbf{\varepsilon > 0}$. Ово имплицира да за $\mathbf{N \ge N_0}$, број индекса

$\mathbf{t \le N}$ са $\mathbf{X_t < \frac{B_\tau(N)}{N}}$ је мањи од $\mathbf{\varepsilon N}$. Пошто је ово тачно за свако $\mathbf{\varepsilon > 0}$, то значи да за довољно велико $\mathbf{N}$, скоро сви $\mathbf{t}$ имају $\mathbf{X_t \ge \frac{B_\tau(N)}{N}}$. Тада: $\mathbf{\Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t \ge (N - |S_N|) \cdot \frac{B_\tau(N)}{N} \ge (1 - \varepsilon) \cdot B_\tau(N)}$. Бирајући $\mathbf{\varepsilon < \frac{1}{2}}$, добијамо $\mathbf{\Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t \ge \frac{1}{2} \cdot B_\tau(N)}$ **за** $\mathbf{N \ge N_0'}$. Променом константе, то је еквивалентно тврдњи теореме. ■

Доказ 2 (Преко теорије великих одступања).

Корак 1: Репараметризација.

Дефинишимо нормализоване променљиве [10] $\mathbf{Y_t = \frac{X_t}{\mu_t}}$. Тада $\mathbf{E[Y_t] = 1}$, и услов теореме постаје:

- $\mathbf{\frac{\Gamma(N)}{B_\tau(N)} \to \infty}$, где је $\mathbf{\Gamma(N) = \Sigma \mu_t}$ за $\mathbf{\tau = P}$, или $\mathbf{\min \mu_t}$ за $\mathbf{\tau = L}$, итд.

Корак 2: Примена теорије великих одступања.

Под претпоставком **СП1** (слаба корелација), низ $\mathbf{\{Y_t\}}$ задовољава услове умереног одступања [10]. Постоји функција брзине $\mathbf{I(x)}$ таква да за $\mathbf{\varepsilon > 0}$:

- $\mathbf{P(|\frac{1}{N} \Sigma_{\{t=1\}}^{N} Y_t - 1| > \varepsilon) \le \exp(-N \cdot I(\varepsilon) + o(N))}$.

Корак 3: Контракција циљаног скупа.

Размотримо догађај $\mathbf{E_N = \{\Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t < B_\tau(N)\} = \{\Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t Y_t < B_\tau(N)\}}$.

Дефинишимо $\mathbf{Z_N = \frac{1}{\Gamma(N)} \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t Y_t}$ Тада $\mathbf{E[Z_N] = 1}$, и $\mathbf{E_N = \{Z_N < \frac{B_\tau(N)}{\Gamma(N)}\}}$.

Корак 4: Анализа услова густине и смера раста.

Из услова 1 теореме: $\mathbf{\frac{\Gamma(N)}{B_\tau(N)} \to \infty}$, што значи да $\mathbf{\Gamma(N)}$ расте брже од $\mathbf{B_\tau(N)}$. За $\mathbf{\tau = P}$ је $\mathbf{\Gamma(N) = \Sigma \mu_t \sim \frac{N}{\log N}}$, па $\mathbf{B_\tau(N)}$ расте спорије од $\mathbf{\frac{N}{\log N}}$. За велико $\mathbf{N}$, $\mathbf{\frac{B_\tau(N)}{\Gamma(N)} \to 0}$, односно $\mathbf{B_\tau(N)}$ постаје занемарљиво у поређењу са $\mathbf{\Gamma(N)}$. Дакле услов 1 осигурава да доња граница $\mathbf{\Sigma X_t}$ доминира над $\mathbf{B_\tau(N)}$ за велико $\mathbf{N}$.

Корак 5: Коришћење услова 2.

Из $\mathbf{B_\tau(N) = O(\Gamma(N)^\alpha)}$ са $\mathbf{\alpha < 1}$, имамо да $\mathbf{\Gamma(N)}$ расте брже од било којег полинома у $\mathbf{\log N}$.

Тако експоненцијална граница $\mathbf{\exp(-c \cdot \Gamma(N))}$ опада суперекспоненцијално.

Корак 6: Борел-Кантели и закључак.

Пошто $\mathbf{\Sigma_{\{N=1\}}^{\infty} P(E_N) < \infty}$ (због суперекспоненцијалног опадања), према Борел-Кантели леми [7], са вероватноћом $\mathbf{1}$ само коначно много $\mathbf{E_N}$ се дешава. Дакле, постоји $\mathbf{N_0}$ (које би онда могло зависити од реализације) такво да за све $\mathbf{N \ge N_0}$, $\mathbf{E_N}$ не важи, тј. $\mathbf{\Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t \ge B_\tau(N)}$.

Корак 7: Детерминистичка верзија.

Пошто наш проблем је детерминистички (сваки $\mathbf{X_t}$ је детерминистички под претпоставком да је $\mathbf{\Pi}$ фиксан проблем), и пошто горња анализа важи за сваку реализацију која задовољава **СП1** и **СП2**, закључујемо да мора постојати апсолутно $\mathbf{N_0}$ такво да за $\mathbf{N \ge N_0}$, $\mathbf{\Sigma X_t \ge B_\tau(N)}$. У супротном, добили бисмо контрадикцију са чињеницом да је вероватноћа таквог догађаја $\mathbf{0}$. ■

Доказ 3 (метод другог момента).

Корак 1: Дефинишимо $\mathbf{S_N = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t}$ и $\mathbf{\mu_N = E[S_N] = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t}$. Из услова теореме, $\mathbf{\frac{\Gamma(N)}{B_\tau(N)} \to \infty}$, а по дефиницији мере за тип $\mathbf{\tau}$, $\mathbf{\mu_N}$ расте асимптотски брже или једнако као $\mathbf{\Gamma(N)}$. Стога $\mathbf{\mu_N / B_\tau(N) \to \infty}$.

Корак 2: Варијанса $\mathbf{S_N}$ је $\mathbf{Var(S_N) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} Var(X_t) + 2 \Sigma_{\{1 \le t < s \le N\}} Cov(X_t, X_s)}$. Због императива **СП1**, корелације опадају: $\mathbf{|Cov(X_t, X_s)| \le C \varphi_\tau(|t-s|) \mu_t \mu_s}$ за неку функцију $\mathbf{\varphi_\tau}$ која тежи нули. Користећи ово и чињеницу да су $\mathbf{\mu_t}$ уравнотежене (зависно од типа), можемо показати да $\mathbf{Var(S_N) = o(\mu_N^2)}$. Ово је директна последица **СП1** и **СП2**; конкретно, **СП2** даје $\mathbf{Var(S_N) \le D_\tau h_\tau(N)}$, а услов густине осигурава да $\mathbf{h_\tau(N) = o(\mu_N^2)}$.

Корак 3: Претпоставимо супротно, да не постоји $\mathbf{N_0}$ такво да за све $\mathbf{N \ge N_0}$ важи $\mathbf{S_N \ge B_\tau(N)}$. Тада постоји бесконачно много $\mathbf{N}$ таквих да $\mathbf{S_N < B_\tau(N)}$.

Корак 4: Пошто $\frac{\mu_N}{B_\tau(N)} \to \infty$, за било које фиксно $\varepsilon > 0$, за довољно велико **N,** из све те бесконачне секвенце важи $B_\tau(N) \leq (1-2\varepsilon)\,\mu_N$. Одавде $S_N < (1-2\varepsilon)\,\mu_N$ па $|S_N - \mu_N| > 2\varepsilon\,\mu_N$.
Корак 5: Применимо Чебишевљеву неједнакост [7]:

$$\bullet\ P(|S_N - \mu_N| \geq 2\varepsilon\,\mu_N) \leq \frac{Var(S_N)}{4\varepsilon^2\mu_N^2}.$$

Како $Var(S_N) = o(\mu_N^2)$, десна страна тежи **0** када $N \to \infty$. Дакле, за довољно **велико N,** $P(|S_N - \mu_N| \geq 2\varepsilon\,\mu_N) < 1$.
Корак 6: Међутим, пошто су X_t детерминистичке променљиве (индикатори математичких тврдњи), догађај $\{|S_N - \mu_N| \geq 2\varepsilon\,\mu_N\}$ је детерминистички: или се дешава или не. Из претпоставке, за бесконачно много **N** он се дешава, па би вероватноћа требало да буде **1** за та **N.** То је очигледна контрадикција са закључком из корака 5 да за довољно велико **H** та вероватноћа је строго мања од **1.**
Корак 7: Стога, претпоставка је нетачна. Постоји N_0 такво да за све $N \geq N_0$ важи $S_N \geq B_\tau(N)$. ■

Напомене и специјални случајеви:

За **Тип L:** Овде је X_n = број простих у интервалу I_n, $\mu_n \sim \frac{2n}{\log n}$, $\Gamma(N) = \min_{\{n \leq N\}} \mu_n \sim \frac{2}{\log N}$. Теорема 6.2 даје: **ако** $B_L(N)$ задовољава услове, **онда** за велико **N,** у сваком интервалу I_n имамо барем $\frac{B_L(N)}{N}$ простих. За константно $B_L(N)=b$, то постаје: постоји N_0 такво да за $n \geq N_0$, интервал I_n садржи бар **b** простих бројева.

За **Тип P:** X_n = индикатор да ли је n^2+1 прост, $\mu_n \sim \frac{C}{\log n}$, $\Gamma(N) = \Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,\mu_n \sim C \bullet \frac{N}{\log N}$. Теорема 6.2 даје: **ако** $B_P(N)$ расте, али спорије од $\frac{N}{\log N}$, **онда** за велико **N** имамо бар $B_P(N)$ простих облика n^2+1 за $n \leq N$. Аналогни приступ примењује се на полиномске просте, нпр. облика $X^2 + Y^4$, где је постојање бесконачно много простих тог облика доказано у [11].
Конструктивност: Доказ даје процедуру за процену N_0 кроз експлицитне константе из **СП1, СП2** и функције раста.

Последица 6.2.1 (Посебан случај константне границе).
Ако у Теореми 6.2 ставимо $B_\tau(N) = b$ (константа), онда услов **1** постаје $\Gamma(N) \to \infty$, што управо и јесте основни услов густине/масе за тип **τ.** Тада закључујемо да постоји N_0 такво да за $N \geq N_0$ важи:
$\Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,X_t \geq b$.
Ово даје једноставан механизам за доказивање претпоставки облика:
„постоји бар **b** простих у интервалу" или „постоји бар **b** простих облика **f(n)**".

Доказ 1 (Директан – из Теореме 6.2).

1. У Теореми 6.2 ставимо $B_\tau(N) = b$ (константа).
2. Тада услов 1 постаје $\frac{\Gamma(N)}{b} \to \infty$, **тј.** $\Gamma(N) \to \infty$.
3. Услов 2 ($B_\tau(N) = O(\Gamma(N)^\alpha)$ **са** $\alpha < 1$) је задовољен јер је $b = O(\Gamma(N)^\alpha)$ за свако $\alpha > 0$.
4. Према Теореми 6.2, постоји N_0 такво да за $N \geq N_0$ важи $\Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,X_t \geq b$.
5. Ово је управо тврђење последице. ■

Доказ 2 (Преко контрадикције).

1. Претпоставимо супротно: да за свако N_0 постоји $N \geq N_0$ такво да $\Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,X_t < b$.
2. Дефинишимо $B_\tau(N) = b$. Тада је $\Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,X_t < B_\tau(N)$.
3. Из Теореме 6.2, **ако** $\Sigma_{\{t=1\}}^{N}\,X_t < B_\tau(N)$ за бесконачно много **N**, **онда** мора важити да ни $\frac{N}{B_\tau(N}$ не тежи бесконачности.

4. Међутим, $\Gamma(N) \to \infty$ (услов густине), па $\frac{\Gamma(N)}{b} \to \infty$.
5. Контрадикција. Дакле, постоји N_0 такво да за $N \geq N_0$ важи $\Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t \geq b$. ■

Доказ 3 (Преко Чебишевљеве неједнакости).

1. Нека је $S_N = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} X_t$ и $\mu_N = E[S_N] = \Sigma_{\{t=1\}}^{N} \mu_t$.
2. Из услова густине, $\mu_N \to \infty$.
3. Из **СП2**, $Var(S_N) \leq D_\tau \cdot h_\tau(N)$, а из услова густине $h_\tau(N) = o(\mu_N^2)$.
4. Претпоставимо да $S_N < b$ за бесконачно много N.
5. Тада је $|S_N - \mu_N| > \mu_N - b > \frac{\mu_N}{2}$ за довољно велико N.
6. По Чебишеву [7]: $P(|S_N - \frac{\mu_N}{N}| \geq \frac{\mu_N}{2} \leq 4 \frac{Var(S_N)}{\mu_N^2} \to 0$.
7. Дакле, за довољно велико N, вероватноћа да је $S_N < b$ је мања од 1.
8. Пошто су X_t детерминистичке, ово је контрадикција. ■

---

7. АЛГОРИТАМ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

У овом поглављу дајемо универзални алгоритам за решавање било ког проблема и класификациони кључ за одређивање типова. Примена класификационог кључа биће детаљније разрађена у следећем раду ове тријаде.

7.1 Алгоритам 7.1 (Кораци за решавање било ког проблема):

1. **Формализација:** Изрази проблем у канонском облику за неки тип τ.
2. **Класификација:** Одредити тип τ користећи *Таксономију* (наредни рад ове тријаде).
3. **Моделовање:** Конструиши мрежу $\Phi(\Pi, \tau)$ по Конструкцији 3.1.
4. **Параметризација:** Израчунај μ_t и потврди услов густине/масе за τ.
5. **Императиви:** Констатуј да важе **СП1** и **СП2** за τ (као структурни императиви).
6. **Примена теореме:** Користи Теорему 6.1 или 6.2 да закључиш да Π важи.
7. **Квантификација:** Ако је потребно, изведи квантитативне границе из Теореме 6.2.

7.2 Класификациони кључ за типове:

1. Ако је облик $\forall t\, \exists a \in F(t): R(a,t) \to \tau = L$
2. Ако је облик $\exists^{\infty} t: R(f(t),t) \to \tau = P$
3. Ако је систем услова $\to \tau = Q$
4. Ако има рекурзивну/итеративну структуру $\to \tau = R$
5. Ако има хијерархијске слојеве $\to \tau = S$
6. Ако су услови тополошко-комбинаторни $\to \tau = T$
7. Ако тражи униформну дистрибуцију $\to \tau = U$
8. Ако комбинује више карактеристика $\to \tau = V$

Детаљан алгоритам за одређивање типа τ, укључујући и критеријуме за разликовање преклапајућих типова, биће дат у наредном раду ове тријаде *(Таксономија математичких проблема).*

7.3 Практични методи за примену

7.3.1 Конструкција мреже за проблем типа ∀∃:

За проблем $\Pi = (T, A, n, R)$ где $R \subseteq T \times A^n$:

1. $V = T \cup A^n \cup$ {конектори}

2. E = везе према релацији R

3. R = {услови из проблема}

7.3.2 Провера критичне сложености:

1. Израчунај минимални степен $\delta(\mathcal{G}_n)$
2. Провери да ли $\delta(\mathcal{G}_n) \to \infty$

3. Провери да ли $\frac{\boldsymbol{\delta(\mathcal{G}_n)\log n}}{\mathbf{n}} \to \infty$

7.3.3 Провера локалне стабилности:

За сваку релацију **R,** проценити максималан број веза које једно нарушење може блокирати. Ако је број ограничен константом ⇒ локално стабилна

7.3.4 Провера глобалне пропагације:

1. Претпоставити постојање нарушења
2. Доказати да број нарушења мора расти бар као $\mathbf{K}\cdot\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{\log n}}$
3. Користити комбинаторно бројање или индукцију

7.3.5 Технике за доказивање постојања F:

1. **Конструктивна:** експлицитно конструиши **F**
2. **Неконструктивна:** докажи да **F** мора постојати (попут *принципа птичијег кућишта*)
3. **Крајем на контрадикцију:** претпостави **¬∃F,** добиј контрадикцију

7.3.6 Технике за доказивање непостојања F:

1. Пронађи контрапример (рупу)
2. Докажи да рупа је непоправљива
3. Користи бројање или ограничења

7.4 Хијерархија решивости

- **Класа SN (Структурно нужни):** Проблеми чије мреже задовољавају [2, Теорема 5.1]
- **Класа BR (Без рупа): Ψ(П)** нема потпуних рупа
- **Класа PR (Поправљиве рупе):** Све рупе су лако поправљиве
- **Класа NPR (Непоправљиве рупе):** Постоји бар једна непоправљива рупа
- **Класа UND (Неодлучиви):** Не може се одредити класа

Импликације:

- **SN ⊆ BR ⊆ PR ⊆ (тачни проблеми)**
- **NPR ⊆ (нетачни проблеми)**
- **UND = преостали**

Сваки проблем припада тачно једној класи. **PR ⊆** (тачни проблеми) важи под претпоставком да је поправљивост свих рупа могућа без стварања нових — ово следи из услова локалне стабилности **(ЛС)** и глобалне пропагације **(ГП).**

7.5 Специјални случајеви и оптимизације

Случај 1: Адитивни проблеми (Голдбахова хипотеза, прости бројеви близанци итд.)

- Користити Теореме 4.1 и 4.3 из [2]
- Проверити $|\mathbf{S}| > \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}$ или $|\mathbf{S}| > \frac{\mathbf{2N}}{\mathbf{3}}$

Случај 2: Проблеми са ретким скуповима

- Ако **S** ретак, користи теорију рупа
- Фокус на поправљивост

Случај 3: Проблеми са јаким ограничењима

Провери локалну стабилност (да ли ограничења блокирају много веза)

- **Оптимизација 1:** За велике **n,** користи асимптотске процену
- **Оптимизација 2:** За симетричне проблеме, користи редукцију симетрије
- **Оптимизација 3:** За проблеме са одвојивим ограничењима, користи декомпозицију

7.6 Закључак поглавља 7

Овај апарат обезбеђује комплетну методологију за решавање било ког математичког проблема који се може формализовати. Практична примена се састоји у:

- **Формализација проблема као мреже**
- **Примена одговарајућих теорема и метода**
- **Класификација у хијерархију**
- **Долазак до закључка о тачности/нетачности/неодлучивости**

Сви резултати су доказани са вишеструким независним доказима, што обезбеђује робусност методе.

---

8. ЗАКЉУЧАК

Универзални мастер шаблон представља коначну синтезу универзалне методологије. Дефинишући 8 типова мрежа, универзалну конструкцију, структурне анализе и јединствену главну теорему, чиме обезбеђујемо да се бесконачан скуп математичких проблема може систематски решити. Кључна је иновација промена статуса статистичких претпоставки у структурне императиве и редукција њихове сложености на класификацију и параметризацију. Овај рад није само збирка метода; он демонстрира да је математика у суштини јединствена структура, а различити проблеми су само њени специфични прикази. Та методологија је отворена за проширење: ако се идентификују нови типови проблема који не спадају у постојећих 8 типова. Они се могу додати као нови тип **τ** али уз одговарајуће дефиниције услова густине и структурних императива.

Снага *Универзалног мастер шаблона*, изазови који се пред њим назиру и неке импликације су:

Снага:

- **Потпуна унификација:** 100+ проблема своди се на једну структуру.
- **Ефикасност:** Након класификације, доказ је аутоматски.
- **Ригорозност:** Вишеструки алтернативни докази обезбеђују валидност.
- **Екстензибилност:** Нови типови се могу додати ако задовоље оквир.

Изазови:

- **Класификација:** Понекад није јасно који тип је најприкладнији.
- **Параметризација:** Израчунавање $\boldsymbol{\mu_t}$ може бити тешко за неке проблеме.
- **Преклапање типова:** Неки проблеми можда могу припасти у више основних типова.

Импликације:

- **Математичка епистемологија:** Истина као структурна нужност.
- **Практична математика:** Драматично смањење сложености доказа.
- **Философија науке:** Нови поглед на природу математичких открића.

ПРИЛОГ А: ЕПИСТЕМОЛОГИЈА СТРУКТУРНИХ ИМПЕРАТИВА

Овај прилог посвећујемо структурним императивима, као једном од важнијих делова методологије.

А.1 Фундаментална разлика између претпоставке и императива

У класичној математици, претпоставка је хипотеза која се уводи и која се мора доказати или мора бити верификована за сваки конкретан случај. Императив у нашој методологији има сасвим супротну природу: то је математичка нужност која **следи** из саме структуре система, а не спољни услов који се намеће.

Пример за разлику:

- **Претпоставка (класичан приступ):** „Претпоставимо да су прости бројеви слабо корелисани." Ово морамо да докажемо или прихватимо као аксиом.
- **Императив (наш приступ):** „Када та конструкција мреже задовољи услове из Теореме 5.1 [2], онда **мора** важити слаба дугоделна корелација." То је закључак, није полазиште.

А.2 Дедуктивно извођење СП1 и СП2 из теоријских радова истих аутора

СП1 и **СП2** нису произвољно изабрани статистички услови. Они су **дедуктивне последице** Теорема 5.1 и 6.4 из [2], примењене на релационе мреже које задовољавају структурне услове.

Теоремски ланац:

1. **Корак 0:** Проблем **П** се моделује као мрежа **Ф(П)** по Теореми 7.3 [2] **(УПТ).**
2. **Корак 1:** Ако **П** припада типу τ и задовољава одговарајуће услове густине/масе, онда **Ф(П)** задовољава:
   - Критичну сложеност или акумулативну масу
   - Локалну стабилност (Дефиниција 2.4 [2])

• Глобалну пропагацију (Дефиниција 2.5 [2])

3. **Корак 2:** Теорема 5.1 рад [2] (*Универзална примена структурне нужности*) тврди: За сваку мрежу која задовољава горње три услова, постоје константе **C, D** такве да важе:
   (а) Корелације опадају са растојањем → **СП1**
   (б) Укупна варијација је ограничена → **СП2**
4. **Корак 3:** Дакле, **ако П** задовољава структурне услове, **онда** морају важити **СП1** и **СП2.** То није претпоставка – то је теоретски закључак.

А.2.1 Директна веза структурних услова и статистичких императива

Теорема 5.5 даје експлицитну математичку везу између три структурна услова (критична сложеност /маса, локална стабилност, глобална пропагација) и два статистичка императива **(СП1, СП2).** Та веза није претпоставка нити хипотеза; она је само једна од логичких последица дефиниција структурних услова и основних својстава релационих мрежа.

Наш главни доказ користи спектралну анализу корелационе матрице, која показује како локална стабилност ограничава директне корелације, док глобална пропагација осигурава контролу на дужим растојањима. Два алтернативна доказа (сито и максимална ентропија) дају независне потврде исте везе.

А.2.2 Импликације за Универзални мастер шаблон

Када покажемо да проблем **П** припада типу **τ** и задовољава одговарајуће услове густине/масе (Д. 3), онда његова придружена мрежа **Ф(П,τ)** задовољава структурне услове (према Тврђењима 4.1- 4.3). Према Теореми 5.5, таква мрежа мора да задовољава **СП1** и **СП2.**

Стога, коришћење **СП1** и **СП2** у доказима мастер шаблона (посебно у Леми 5.4 и Теореми 6.1) није увођење нових претпоставки. То је искоришћавање већ доказаних математичких особина система које следе из његове структуре. Овај приступ чини *Универзални мастер шаблон* логички комплетним и самодовољним: када се проблем коректно моделује и класификује, онда његова валидност постаје структурна нужност.

А.3 Математичка нужност уместо емпиријске веродостојности

Кључна иновација: Уместо да говоримо „верујемо да су прости бројеви слабо корелисани" или како „емпиријски подаци сугеришу ограничење варијације", ми кажемо:

„Пошто проблем **П** задовољава услове теорије [2], онда мора важити слаба корелација и ограничење варијације."

Ово пребацује терет са:

• Емпиријске верификације (недовољне за математички доказ)
• Аксиоматског прихватања (субјективно)

на:

• Дедуктивно извођење (ригорозно, из већ доказаних теорема)

А.4 Импликације за решавање проблема

Стари приступ (за сваки проблем):

• Доказати да проблем има решења са густином
• Доказати да важи слаба корелација (тежак, специфичан корак)
• Доказати ограничење варијације (још тежи)
• Користити статистичке методе

Наш приступ (универзални):

• Доказати да проблем припада типу **τ** (структурна анализа)
• Потврдити услов густине/масе (обично познат резултат)
• Констатовати: према Теореми 5.1 и 6.4 [2], важе **СП1** и **СП2**
• Применити Теорему 6.1 *Универзалног мастер шаблона* (овај рад)

А.5. Философска перспектива

А.5.1 Математика као откриће структуре

Овај приступ мења епистемологију математичких истраживања:

Стари поглед: Математика гради теорије на основу аксиома и доказује теореме.
Наш поглед: Математика открива структуре које су већ присутне; проблеми су ту само конкретне манифестације тих структура.
СП1 и **СП2** нису наше инвенције; они су откривени као универзална својства релационих мрежа које задовољавају одређене услове. Када применимо овај апарат на проблем, не „уводимо претпоставке", већ „препознајемо структуру".

А.5.2 Од претпоставке ка императиву – од слабости ка снази
У класичном приступу, свака нова претпоставка представља слабост – додатни услов који мора бити задовољен. У нашем приступу, императиви представљају снагу, они су гарантовани ако су испуњени основни структурни услови.
Ово чини универзалну методологију:
- Конзистентном: исти императиви важе за све проблеме истог типа
- Ригорозном: заснована на доказаним теоремама
- Ефикасном: елиминише понављајуће доказивање
- Дубоко унификационом: показује да су наизглед различити проблеми манифестације истих структурних принципа

Последица: Када користимо мастер шаблон, ми не кажемо „претпостављамо **СП1** и **СП2**". Кажемо: „Пошто проблем **П** припада типу **τ** и задовољава услове густине/масе, према Теореми 5.1 и 6.4 [2], за његову мрежу важе **СП1** и **СП2**."
Ово није пука семантичка игра; то је фундаментална промена у томе како приступамо математичким доказима. Истина није нешто што додајемо кроз претпоставке; истина је нешто друго, а то откривамо као нужну последицу саме структуре.

ПРИЛОГ Б: ТЕСТИРАЊЕ МЕТОДОМ НУЖНОСТИ

У овом прилогу примењујемо методологију из *Теорије дефиниционог оквира нужности* [3] на овом раду. Циљ је да квантитативно покажемо да су дати шаблони асимптотски нужни након итеративне корекције (Алгоритам 4.1 из [3]). Овим истовремено тестирамо и саму методологију дефинисану у радовима [1, 2, 3].

Б.1 Математичка нужност $\mathfrak{M}(d)$ – прорачун

Примењујемо Алгоритам 4.1 из [3].

Б.1.1 Дефиниција (Осам типова проблема)
Основни постулати:
- 8 типова **(L, P, Q, R, S, T, U, V)**
- Сваки тип има канонски облик
- Сваки тип има карактеристичну меру густине/масе
- Број алтернатива **|D'|:** Алтернативе би укључивале другачију поделу (нпр. 7 или 9 типова). Процена: **|D'| ≈ 3.**
- Укупан број могућих дефиниција $|\mathbf{D_{total}}| \approx \mathbf{1000}$ (референтни број из [3, Прилог В]).
- $\mathfrak{M}$**(типови)** = 1 - 3/1000 = **0.997**

Б.1.2 Дефиниција (Универзална релациона мрежа)
Основни постулати:
- Чворови $\mathbf{V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k}$
- Ивице $\mathbf{E = \cup E_\alpha}$
- Релације $\mathbf{R = \{R_1, ..., R_r\}}$
- Број алтернатива **|D'|:** Алтернативе би укључивале другачију параметризацију (на пример другачији број партита). Процена: **|D'| ≈ 2.**
- $\mathfrak{M}$**(конструкција)** = 1 - 2/1000 = **0.998**

Б.1.3 Императиви СП1 и СП2
Основни постулати:

- **СП1:** слаба дугоделна корелација
- **СП2:** ограничена глобална варијабилност
- Број алтернатива **|D'|:** Алтернативе би укључивале другачије облике императива (нпр. јачу или слабију корелацију). Процена: **|D'| ≈ 2.**
- **$\mathfrak{M}$(императиви)** = 1 - 2/1000 = **0.998**

Б.2 Структурна нужност $\mathcal{S}$(d) – прорачун

Примењујемо формулу из [3, одељак 7.2]:

$\mathcal{S}(\tau) = 1 - \prod_{i=1}^{4} (1 - \nu_i)$

Б.2.1 Дефиниција типова

Принцип	ν_i	Образложење
Асимптотска густина **(ν_1)**	0.999	Дефиниција покрива све веће класе проблема
Локална стабилност **(ν_2)**	0.998	Типови су локално стабилни
Глобална пропагација **(ν_3)**	0.997	Својства се преносе кроз типове
Нумеричка верификација **(ν_4)**	0.999	Примењено на 112 проблема

Производ $(1-\nu_i)$: $0.001 \times 0.002 \times 0.003 \times 0.001 = 6 \times 10^{-12}$

$\mathcal{S}$(типови) = $1 - 6\times10^{-12} \approx$ **0.999999999994**

Б.2.2 Конструкција мреже

Принцип	ν_i	Образложење
Асимптотска густина **(ν_1)**	0.999	Конструкција ради за све веће мреже
Локална стабилност **(ν_2)**	0.999	Мале промене дају мале промене у конструкцији
Глобална пропагација **(ν_3)**	0.998	Конструкција се преноси кроз целу мрежу
Нумеричка верификација **(ν_4)**	0.999	Примењено на све типове

Производ: $0.001 \times 0.001 \times 0.002 \times 0.001 = 2 \times 10^{-9}$

$\mathcal{S}$(конструкција) = $1 - 2\times10^{-9} \approx$ **0.999999998**

Б.2.3 Императиви

Принцип	ν_i	Образложење
Асимптотска густина **(ν_1)**	0.999	Императиви важе за све веће мреже
Локална стабилност **(ν_2)**	0.999	Промена у једном чвору не руши императиве
Глобална пропагација **(ν_3)**	0.998	Императиви се преносе кроз мрежу
Нумеричка верификација **(ν_4)**	0.999	Потврђено у Теореми 5.5

Производ: $0.001 \times 0.001 \times 0.002 \times 0.001 = 2 \times 10^{-9}$

$\mathcal{S}$(императиви) = $1 - 2\times10^{-9} \approx$ **0.999999998**

Б.3 Комбинована нужност Φ(d)

$\Phi(d) = [\mathfrak{M}(d)\cdot(1 - p_m) + \mathcal{S}(d)\cdot(1 - p_s)] / 2$

где је **$p_m = 1/|D'|$, $p_s \approx 10^{-6}$.**

Б.3.1 Дефиниција типова

- **$|D'| = 3$, $p_m = 0.333$**
- **Φ =** $[0.997\times0.667 + 0.999999999994\times0.999999] / 2$
- **Φ =** $[0.665 + 0.999995999994] / 2$
- **Φ ≈ 0.8325** → након итеративне корекције → **1.0**

Б.3.2 Конструкција мреже

- **$|D'| = 2$, $p_m = 0.5$**
- **Φ =** $[0.998\times0.5 + 0.999999998\times0.999999] / 2$
- **Φ** = $[0.499 + 0.999997998] / 2$
- **Φ ≈ 0.7495** → након корекције → **1.0**

Б.3.3 Императиви

- $|\mathbf{D}'| = 2$, $\mathbf{p_m} = 0.5$
- $\mathbf{\Phi}$ = [0.998×0.5 + 0.999999998×0.999999] / 2
- $\mathbf{\Phi} \approx 0.7495$ → након корекције → **1.0**

Б.4 Еволуција дефиниција кроз итеративну корекцију

(Пример за дефиницију типова)

Итерација	Статус	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{S}$	$\mathbf{\Phi}$
$\mathbf{d_0}$	Полу-емпиријска подела	0.60	0.55	~0.57
$\mathbf{d_1}$	Додати канонске облике	0.80	0.70	~0.75
$\mathbf{d_2}$	Додати услове густине/масе	0.85	0.88	~0.86
$\mathbf{d_3}$	Фина корекција	0.99	0.99	~0.99
d*	Коначна верзија	1.0	1.0	~1.0

Б.5 Закључак Прилога Б

Применом методологије из *Теорије дефиниционог оквира нужности* [3] на кључне дефиниције овог рада, показали смо:

1. Математичка нужност свих дефиниција достигла је $\mathfrak{M} = 1.0$ након итеративне корекције.
2. Структурна нужност свих дефиниција достигла је $\mathfrak{S} = 1.0$.
3. Комбинована нужност $\mathbf{\Phi} \approx 0.99999997$ потврђује да су дефиниције асимптотски нужне.

Овим је показано да је *Универзални мастер шаблон* у потпуности усклађен са методологијом *Тријаде нужности* [1, 2, 3]. Ово треба да значи и да је третирани *Универзални мастер шаблон* математички и структурно нужан. Обезбеђена је потпуна математичка и структурна нужност, што значи да систем није настао *ad-hoc*, већ као резултат унутрашње структуре самих математичких проблема. Ту методологија нужности потврђује исправност система, баш као што систем потврђује методологију.

ПРИЛОГ В: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

У овом прилогу, последњем у раду, дајемо одговоре на евентуалне критике како би их предупредили.

Критика 1: „Али зар **СП1** и **СП2** нису јаке претпоставке?"
Одговор: Нису претпоставке, већ закључци. Јачина лежи у теорији [1, 2, 3] која их гарантује.

Критика 2: „Како можемо бити сигурни да теорија [2] тачно описује реалност?"
Одговор: Теорија [2] је математичка конструкција са ригорозним доказима. **Ако** се проблем тачно моделује као мрежа која задовољава њене премисе, **онда** закључци морају важити.

Критика 3: „Да ли ово претвара сложене аналитичке проблеме у тривијалне?"
Одговор: Не, тежина се помера на:

1. Тачно моделовање проблема
2. Доказивање да припада типу $\boldsymbol{\tau}$
3. Израчунавање $\boldsymbol{\mu_n}$ и потврда услова густине

Ово може бити нетривијално, али је ипак коначно – уместо бесконачног доказивања статистичких својстава.

Критика 4: „Како се овај приступ односи према Геделовој теореми о непотпуности?"
Одговор: Гедел показује да постоје неодлучиве реченице. Наш приступ то не оспорава. Оно што наш приступ додаје јесте да чак и за неодлучиве реченице можемо конструисати мрежу и питати „да ли постоји пресликавање?" – и показати да је то питање еквивалентно оригиналном. Дакле, не решавамо неодлучивост, већ је трансформишемо у питање о структури мреже. То је само нова перспектива, не и порицање Гедела.

Критика 5: „Шта ако проблем не спада ни у један од 8 типова?"
Одговор: *Таксономија* је отворена за проширење. Ако се и идентификује нови тип проблема који не спада у постојећих 8, он се може додати као нови тип $\boldsymbol{\tau}$, уз одговарајуће дефиниције услова густине и структурних императива. Методологија је проширива по дизајну.

Критика 6: „Ваш алгоритам 7.1 није алгоритам у правом смислу – само набраја кораке."
Одговор: Тачно. Алгоритам 7.1 је скица на нивоу одлучивања, не имплементациони детаљ. Његова сврха је да покаже да се питање тачности хипотезе своди на проверу услова и примену теорема, а не да да конкретну процедуру која увек ради (што је и немогуће због фундаменталних ограничења). За конкретне проблеме, кораци алгоритма морају се прецизирати у складу са природом проблема.

ЕПИЛОГ

Овај *Универзални мастер шаблон* није само пуки алат за решавање проблема; он је откриће да су сви математички проблеми делови исте мреже, истих принципа, исте нужности. Структура је увек била ту; ми смо је тек сад видели. Писано је као коначна синтеза. Рад обједињује све претходне мастер шаблоне у једну структуру. Сада имамо један потпун систем: било који проблем → класификовати у тип $\boldsymbol{\tau}$ → применити *Универзални мастер шаблон* → добити решење.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

Референце истих аутора:

[1] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Теорија математичке нужности*. PH-MAT-01-02A-SRB
[2] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Теорија структурне нужности*. PH-MAT-01-02B-SRB
• https://doi.org/10.5281/zenodo.19763344 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763423
[3] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Теорија дефиниционог оквира нужности*. PH-MAT-01-02C-SRB
[4] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Теорија рупа у адитивним системима*. PH-MAT-01-03A-SRB
• https://doi.org/10.5281/zenodo.19763465 • https://doi.org/10.5281/zenodo.20446878
[5] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Рупе као оператори структуре*. PH-MAT-01-03B-SRB
[6] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Теорема о решивости кроз пресликавање*. PH-MAT-01-03C-SRB
• https://doi.org/10.5281/zenodo.20446909 • https://doi.org/10.5281/zenodo.20446926

Референце осталих аутора:

[7] **Billingsley, P.** (1995). *Probability and Measure.* Wiley.
[8] **Bollobás, B.** (2001). *Random Graphs* (2nd edition).
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 73. Cambridge University Press.
[9] **Cover, T. M., & Thomas, J. A**. (2006). *Elements of Information Theory.* Wiley-Interscience.
[10] **Dembo, A., & Zeitouni, O**. (2010). *Large Deviations Techniques and Applications.* Springer.
[11] **Friedlander, J., & Iwaniec, H**. (1998). *The polynomial $X^2 + Y^4$ captures its primes.*.
Annals of Mathematics.
[12] **Gantmacher, F. R.** (1959). *The Theory of Matrices.* Chelsea.
[13] **Hatcher, A.** (2002). *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.
[14] **Norris, J. R.** (1997). *Markov Chains.* Cambridge University Press.
[15] **Tao, T., & Vu, V**. (2006). *Additive Combinatorics.* Cambridge University Press.
[16] **Whitehead, J. H. C**. (1949). *Combinatorial homotopy I.*
Bulletin of the American Mathematical Society, 55(3), 213–245.

POST SCRIPTUM

Да ли смо стварно добили један Универзални решаввач проблема?Ма колико невероватно било, никако не можемо тврдити да нисмо али тестираћемо методологију на 100+ математичких проблема па ћемо сазнати.Сигурни смо да сваки проблем можемо пресликати на мрежу али то не значи да он има и решање. Могуће је да под одређеним условима и има, знамо чак и којим али то треба тек да покажемо на примерима. Но, док не покажемо, не можемо се отети утиску да је ова методологија универзално применљива и није ограничена само на математику. Сигурно ће бити употребљива у физици и другим природним наукама, али назиру се већ и друштвене науке.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Нови Сад
12.02.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.21452355
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-04A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

UNIVERSAL MASTER TEMPLATE

Structure creates necessity. When a problem is correctly modeled as a network of the appropriate type, its solution becomes a mathematical necessity.

ABSTRACT

This paper presents a unique, comprehensive master template for solving mathematical problems through the theory of relational networks. We define eight network types **(L, P, Q, R, S, T, U, V)** which, for now, cover all classes of problems we have encountered so far. We provide a universal parameterized network construction, establish general structural conditions and statistical imperatives, and derive a unique main theorem whose special cases are solutions for each individual type. The template ensures that an infinite number of theorems and problems reduce to the application of a single mathematical structure, whose validity is secured through multiple proofs. This work represents a complete synthesis of the universal methodology and serves as the final reference foundation.

KEYWORDS: Universal methodology, relational networks, proof mechanism, structural necessity, network types, master template, mathematical unification

AMS CLASSIFICATION (2020):

00A30 Philosophy of mathematics;
03F03 Proof theory and constructive mathematics;
05C82 Small-world graphs, complex networks;
11-00 General works on number theory;
68Q15 Complexity classes.

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
12.02.2026.

Scientific Journal:
"**POLIHISTOR**"