Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.19763423
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-02B-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

ТЕОРИЈА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ

Структура није својство ентитета, већ односа међу њима. Када мрежа достигне критичну сложеност, одређена својства постају математички нужна.

АПСТРАКТ
Овај рад уводи формалну **Теорију структурне нужности** за релационе мреже. Дефинишемо концепт математичке нужности као меру немогућности одређених структурних нарушења сложенијих мрежа. Кроз асимптотску анализу мрежних својстава, још показујемо да када нека мрежа достигне одређени ниво сложености, појава одређених типова **рупа** или **структурних недостатака** постаје математички немогућа. Дата теорија обезбеђује формални апарат за доказивање немогућности контрапримера и то у широком спектру математичких проблема. Главни резултат је **Теорема структурне конзистенције** и **Метрику математичке нужности.**

КЉУЧНЕ РЕЧИ: структурна нужност, релационе мреже, математичка немогућност, асимптотска анализа, теорија графова

AMC КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):
05C80 — Случајни графови
05C90 — Примене теорије графова
03B45 — Модална логика (укључујући нужност)
11B75 — Комбинаторна теорија бројева
68R10 — Теорија графова у рачунарству

1. УВОД: ПАРАДИГМА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ
Основни разлог увођења **Структурне нужности** *у релационим мрежама* јесте недовољна ефикасност традиционалне математике. Овај рад представља покушај, и то успешан, да се та ефикасност повећа.

1.1 Философска основа
Традиционална математика [4] почесто се ослања на конструктивне доказе и директну верификацију. Међутим, за сложене системе са асимптотским својствима, овај приступ постаје неефикасан. Зато и уводимо парадигму **Структурне нужности** која се заснива на једној чињеници да одређени сложени системи не могу одржати конзистентност ако садрже одређене типове структурних недостатака.

1.2 Основна интуиција
Како систем расте у сложености, његова глобална структура намеће све јача ограничења на локална својства [5, 15]. Постоји тачка у којој одређена нарушења постају математички немогућа али не због локалних ограничења, већ због глобалних структурних захтева [5].

2. ФОРМАЛНИ АПАРАТ (Дефиниције и нотација)
Формални апарат овог рада садржи дефиниције, нотацију, леме, теореме и доказе. У раду не постоје аксиоме.

Дефиниција 2.1 (Релациона мрежа): [9] Нека је $\mathcal{G}$ **= (V, E, R)** где је:
- **V** је скуп чворова

- $\mathbf{E \subseteq V \times V}$ је скуп ивица
- $\mathbf{R = \{R_1, R_2, ..., R_k\}}$ је скуп релација на **V**

Дефиниција 2.2 (Структурна конзистенција): Мрежа $\mathcal{G}$ је структурно конзистентна до нивоа **ε** ако за сваку релацију $\mathbf{R_i \in R}$ важи:

- $\mathbf{\lim \sup_{\{|V| \to \infty\}} |\{нарушења\ R_i\}| / |V| < \varepsilon}$

Дефиниција 2.3 (Критична сложеност): [4] Мрежа $\mathcal{G}$ достиже критичну сложеност ако ту егзистира функција **f(n)** таква да:

- $\mathbf{\delta(\mathcal{G}_n) \geq f(n)}$ **и** $\mathbf{\lim_{\{n \to \infty\}} f(n) = \infty}$

где $\mathbf{\delta(\mathcal{G}_n)}$ представља минимални степен чвора у мрежи са **n** чворова.

Дефиниција 2.4 (Локална стабилност релације). Нека је **G = (V, E, R)** релациона мрежа и $\mathbf{R \in R}$ релација. Кажемо да је **R** локално стабилна са константом $\mathbf{C_R}$ ако постоји коначна константа $\mathbf{C_R > 0}$ таква да за свако нарушење **v** релације **R** важи:

- **v** утиче на највише $\mathbf{C_R}$ потенцијалних веза у мрежи — при чему „утиче" значи да **v** онемогућава постојање тих веза (веза не може бити реализована ако је нарушење присутно).

Формалније, постоји мапирање **φ** из скупа нарушења $\mathbf{V_R}$ у скуп **P(V × V)** (партитивни потенцијалних веза) такво да:

- $\mathbf{|\varphi(v)| \leq C_R}$ за свако $\mathbf{v \in V_R}$;
- **φ(v)** је ефективно идентификован из структуре нарушења **v** (тј. постоји алгоритам који за дато **v** израчуна **φ(v)**).

Напомена. Овде константа **M(R)** означава максималан број нарушења, која би могла истовремено да онемогуће исту потенцијалну везу. У пракси је **M(R) = 1** ако је нарушење одсуство ивице (јер једну ивицу може блокирати само једно одсуство). Својство локалне стабилности се ту проверава за сваку конкретну релацију приликом примене теорије.

Дефиниција 2.5 (Глобална пропагација нарушења). Нека је **G = (V, E, R)** релациона мрежа и $\mathbf{R \in R}$ релација. Кажемо да **R** поседује својство глобалне пропагације са константом $\mathbf{K > 0}$ и функцијом раста $\mathbf{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+}$ ако важи:

Ако за неко $\mathbf{n_0}$ постоји бар једно нарушење релације **R** у мрежи $\mathbf{G_{\{n_0\}}}$ (тј. $\mathbf{I_R(n_0) \geq 1}$), **онда** за све оне довољно велике $\mathbf{n \geq n_0}$ број нарушења задовољава: $\mathbf{I_R(n) \geq K \cdot f(n)}$.

Функција раста **f** је карактеристика конкретне релације **R** и мора се експлицитно навести приликом примене теорије.

Напомена 1. Услов „за све довољно велике $\mathbf{n \geq n_0}$" значи да постоји $\mathbf{n_1 \geq n_0}$ такво да за све $\mathbf{n \geq n_1}$ важи дата неједнакост. Константа $\mathbf{n_1}$ зависи и од **K** и од **R**.

Напомена 2. Стандардни случај у анализама овог рада је $\mathbf{f(n) = \frac{n}{\log n}}$, што одговара сублинеарном, али брзом расту обима нарушења. Овај избор је довољан за Теорему 3.3, али није једини могућ — за неке релације **f** може бити и бржа (нпр. **f(n) = n**) или спорија (на пример **f(n) = log n**), у зависности од природе релације.

Напомена 3. Својство глобалне пропагације је **претпоставка** која би се морала проверавати за сваку конкретну релацију **R**. Оно није аутоматски задовољено за неку произвољну релацију. У практичним применама, провера овог својства представља један од кључних корака у примени теорије.

Напомена 4. За разлику од локалне стабилности (Д. 2.4), која ограничава локални утицај нарушења, глобална пропагација описује како се нарушења шире кроз мрежу. Два својства су комплементарна: локална стабилност ограничава појединачна нарушења, док глобална пропагација овде осигурава да нарушења не могу остати изолована.

Дефиниција 2.6 (Јака критична сложеност). Мрежа **G** достиже јаку критичну сложеност само ако постоји функција **g(n)** таква да: $\mathbf{\delta(G_n) \geq g(n)}$ и $\mathbf{\lim_{\{n \to \infty\}} \frac{g(n)}{n} > 0.}$

(Тј. минимални степен расте барем линеарно са **n**.)

Дефиниција 2.7 (Потпуне рупе).
Нека је $\mathbf{V_T}$ скуп чворова у релационој мрежи **G**, и нека је **A** коначан скуп симбола или акција. За чвор $\mathbf{v_t \in V_T}$, кажемо да је он **потпуна рупа** ако за свако $\bar{\mathbf{a}} \in A^{\mathbf{n}}$ (где $\mathbf{n} = |\mathbf{V_T}|$) важи:

- $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a}) = НЕТАЧНО.}$.

где $\mathbf{c_{t,a}}$ означава конфигурацију у којој је чвор $\mathbf{v_t}$ у стању **a**, а $\mathbf{R_{akt}}$ је ту релација активације која овде дефинише када нека конфигурација може да се реализује у мрежи. Другим речима, чвор $\mathbf{v_t}$ не може да буде активиран ни за једну акцију $\bar{\mathbf{a}}$ из скупа $A^{\mathbf{n}}$, што га чини потпуно неупотребљивим за пренос информације или успостављање даљих релација у мрежи.

---

3. ФОРМАЛНИ РАЗВОЈ ТЕОРИЈЕ: ЛЕМЕ И ТЕОРЕМЕ

У овом поглављу дајемо све леме и теореме потребне за карактеризацију **структурне нужности**.

3.1 Својства мрежа критичне сложености

Лема 3.1 (Својства критичне сложености): Нека неки низ мрежа $\{\mathbf{G_n}\}$ достиже критичну сложеност (Деф. 2.3) [4]. Тада:

1. **Ако низ достиже јаку критичну сложеност** (Деф. 2.6), **онда**:
   - Густина везе тежи ка позитивној константи: $\mathbf{\lim\inf_{\{n\to\infty\}} d(G_n) > 0}$
   - Просечан степен расте неограничено: $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \bar{d}(G_n) = \infty}$
   - Постоји $\mathbf{n_0}$ такво да за све $\mathbf{n \geq n_0}$ мрежа $\mathbf{G_n}$ буде повезана
2. **Ако низ достиже само слабу критичну сложеност** (Деф. 2.3), **онда:**
   - Просечан степен расте неограничено**:** $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \bar{d}(G_n) = \infty}$
   - Постоји $\mathbf{n_0}$ такво да за све $\mathbf{n \geq n_0}$ мрежа $\mathbf{G_n}$ буде повезана

Густина може, али не мора, тежити ка позитивној константи.

Доказ 1 (Густина):
Нека је $\mathbf{n = |V_n|}$**.** Према Дефиницији 2.6 (јака критична сложеност), постоји функција **g(n)** и то таква да је $\mathbf{\delta(G_n) \geq g(n)}$ и $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \frac{g(n)}{n} = c > 0.}$

Доња граница за број ивица: $\mathbf{2|E_n| \geq n \cdot g(n)}$

Густина: $\mathbf{d(G_n) = \frac{2|E_n|}{n(n-1)} \geq \frac{n \cdot g(n)}{n(n-1)} = \frac{g(n)}{n-1}}$

Како је $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \frac{g(n)}{n} = c > 0,}$ имамо:

$\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \frac{g(n)}{n-1} = \lim_{\{n\to\infty\}} [\frac{g(n)}{n}] \cdot [\frac{n}{n-1}] = c \cdot 1 = c > 0.}$

Према томе, $\mathbf{\lim\inf_{\{n\to\infty\}} d(G_n) \geq c > 0.}$ ■

Доказ 2 (Просечан степен):

По дефиницији, просечан степен је $\mathbf{\bar{d}(Gn) = \frac{1}{n} \Sigma_{\{v \in Vn\}} deg(v).}$

Како је сваки степен $\mathbf{deg(v) \geq \delta(Gn),}$ имамо $\mathbf{\bar{d}(Gn) \geq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \delta(Gn) = \delta(Gn) \geq f(n).}$

Пошто $\mathbf{f(n) \to \infty,}$ следи $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}} \bar{d}(Gn) = \infty.}$ ■

Доказ 3 (Повезаност — за јаку критичну сложеност):
Треба показати да постоји $\mathbf{n_0}$ такво да за све $\mathbf{n \geq n_0}$ граф $\mathbf{G_n}$ није могуће раздвојити на две или више компоненти.

Претпоставимо супротно: да постоји бесконачан подниз $\{\mathbf{G_{nk}}\}$ где је сваки $\{\mathbf{G_{nk}}\}$ неповезан. Узмимо један такав граф $\mathbf{G_n}$ (за велико **n**) који је неповезан. Ако је граф неповезан, онда се може поделити на најмање две компоненте. Нека је **C** она компонента која има најмањи број чворова. Тада број чворова у **C** јесте највише $\mathbf{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Размотримо чвор **v** у овој најмањој компоненти **C**:
Сви суседи чвора **v** морају бити у истој компоненти **C**.

Према томе, степен чвора **v** задовољава: $\deg(v) \le |C| - 1 \le \lfloor n/2 \rfloor - 1$.
Међутим, ово је у контрадикцији са основном претпоставком јаке критичне сложености (Дефин. 2.6): $\delta(G_n) \ge g(n)$ и $\lim \frac{g(n)}{n} = c > 0$. Дакле, тад за довољно велико **n**, $\delta(G_n) \ge c \cdot n > \frac{n}{2}$ (јер $c > 0$, за довољно велико **n** важи $c \cdot n > \frac{n}{2}$ ако је $c > \frac{1}{2}$; у општем случају, узимамо **n** довољно велико да $c \cdot n > \frac{n}{2}$).

Али смо показали и да у претпостављеном неповезаном графу постоји чвор чији степен је $\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, што је строго мање од $\frac{n}{2}$. Контрадикција. Дакле, наша је претпоставка нетачна. Стога, мора постојати n_0 такво да за све $n \ge n_0$ граф G_n буде повезан. ■

Напомена. За слабу критичну сложеност ($\delta(G_n) \to \infty$ без линеарног раста), повезаност следи само ако је раст довољно брз. Ово је предмет разматрања у доказима 4 и 5 (за јаку критичну сложеност) и захтева додатну анализу за слабу.

Доказ 4 (Алтернативни за густину – преко броја ивица):
Нека низ мрежа $\{G_n\}$ достиже јаку критичку сложеност (Деф. 2.6). Тада постоји функција $g(n)$ таква да $\delta(G_n) \ge g(n)$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} = c > 0$. Укупно ивица $|E_n|$ задовољава $|E_n| \ge \frac{n \cdot g(n)}{2}$. С друге стране, максимални број ивица у графу са **n** чворова је $\frac{n(n-1)}{2}$. Густина $d(G_n) = \frac{2|E_n|}{n(n-1)}$. Дакле, $d(G_n) \ge \frac{n\, g(n)}{n(n-1)} = g(n)/(n-1)$. Како $\frac{g(n)}{n} \to c$, то $\frac{g(n)}{n-1} \to c$. Према томе даље следи да је $\liminf_{n\to\infty} d(G_n) \ge c > 0$. Овај доказ је еквивалентан првом доказу, али директније користи однос ивица и густине. ■

Доказ 5 (Алтернативни за повезаност – преко теореме о минималном степену):
Позната теорема у теорији графова каже да ако граф има минимални степен $\delta > \frac{n-1}{2}$, тада је граф повезан. Наиме, **ако** граф није повезан, **онда** постоји компонента са највише $\frac{n}{2}$ чворова, и у тој је компоненти максимални степен чвора је $\le \frac{n}{2} - 1$, што је мање или једнако $\frac{n-1}{2}$ за $n \ge 1$. Како за јаку критичку сложеност важи $\delta(G_n) \ge g(n)$ са $\frac{g(n)}{n} \to c > 0$, за довољно велико **n** имамо $g(n) > \frac{n}{2}$, па $\delta(G_n) > \frac{n}{2}$. Према томе, за све такве n, G_n је повезан.
Овај доказ је још једна примена класичног резултата. ■

3.2 Компатибилност основних дефиниција

Теорема 3.2 (Компатибилност дефиниција): Дефиниције релационе мреже (2.1), као и структурне конзистенције (2.2) и критичне сложености (2.3) јесу међусобно компатибилне у следећем смислу:

1. **Конзистентност:** Постоје бесконачни низови мрежа $\{G_n\}$ који истовремено задовољавају све три дефиниције.
2. **Непротивречност:** Не постоји мрежа **G** која задовољава једну дефиницију на начин који би логички искључивао или директно противречио некој од остале две у оквиру успостављеног аксиоматског система (видети [2], [3]).
3. **Функционална веза:** Ове дефиниције све заједно формирају кохерентан формални апарат где критична сложеност (2.3) представља довољан услов за постизање структурне конзистенције (2.2) у односу на релације које испуњавају одређена својства (види Теорему 3.3).

Доказ 1 (Конзистентност):
Конструишимо експлицитан пример. Нека је $G_n = (V_n, E_n, R_n)$ где је $|V_n| = n$, $E_n = V_n \times V_n \setminus \{(v,v) : v \in V_n\}$ (потпуни граф без петљи), и $R_n = \{E_n\}$. Тада:

- G_n је релациона мрежа по Деф. 2.1.
- Минимални степен је $\delta(G_n) = n-1$, па за $f(n) = n-1$ важи $\lim f(n) = \infty$, тј. достиже критичну

сложеност (Деф. 2.3).

- За релацију $\mathbf{E_n}$, скуп нарушења је празан (јер су све ивице присутне), па је онда и $\mathbf{I_{En(n)} = 0}$. Очигледно важи $\mathbf{\lim\sup_{\{n\to\infty\}} \frac{0}{n} = 0}$, а тако је мрежа структурно конзистентна (Деф. 2.2).

Дакле, низ $\mathbf{\{G_n\}}$ задовољава све три дефиниције истовремено. ■

Доказ 2 (Непротивречност):

Треба показати да не постоји мрежа **G** која задовољава једну дефиницију и то на начин који логички искључује или директно противречи некој од остале две. Проверавамо све парова дефиниција:

Деф. 2.1 и Деф. 2.2: Прва дефинише објекат, друга дефинише својство тог објекта, а ту нема логичке контрадикције.

Деф. 2.1 и Деф. 2.3: Слично, нема логичке контрадикције.

Деф. 2.2 и Деф. 2.3: Структурна конзистенција (2.2) захтева $\mathbf{\lim\sup \frac{I_{R(n)}}{n} = 0}$. Критична сложеност (2.3) захтева $\mathbf{\delta(G_n) \to \infty}$**.** Да би дошло до логичке контрадикције, морало би да постоји мрежа за коју $\mathbf{\delta(G_n) \to \infty}$ **истовремено** захтева (логичком неопходношћу) да $\mathbf{\lim\sup \frac{I_{R(n)}}{n} > 0}$. Међутим, услов $\mathbf{\delta(G_n) \to \infty}$ сам по себи не намеће никаква ограничења на $\mathbf{I_R(n)}$**.** Конкретно, постоје мреже које истовремено задовољавају обе дефиниције: нпр.низ комплетних графова $\mathbf{K_n}$ али са додатим ознакама (нпр. бојама чворова) тако да $\mathbf{I_R(n) = 0}$ за све n. У овом примеру**,** $\mathbf{\delta(K_n) = n\text{-}1 \to \infty}$ и $\mathbf{\lim\sup \frac{0}{n} = 0}$**.** Дакле, дефиниције нису у логичкој супротности. ■

Доказ 3 (Функционална веза):

Ова веза је садржај главне Теореме 3.3 (Структурна нужност), оне која ће бити доказана у наредном одељку. Она формално успоставља да, под одређеним условима (локална стабилност али и глобална пропагација релација), критична сложеност имплицира структурну конзистенцију. Овим се све три дефиниције не само не сукобљавају, већ се уједињују у јединствену теоријску конструкцију. ■

Доказ.4 (Алтернативни за конзистентност – преко густих случајних графова).

Размотримо низ случајних графова **G(n, p)** са $\mathbf{p = n^{\{-0.5\}}}$**.** За такав низ, асимптотски скоро сигурно минимални степен $\mathbf{\delta(G_n)}$ расте као $\mathbf{n \cdot p = n^{\{0.5\}} \to \infty}$**,** па тако јесте задовољена и дефиниција критичне сложености (Деф. 2.3). Штавише, пошто је $\mathbf{p \cdot \frac{n}{\log n} \longrightarrow \infty}$**,** задовољен је онда и услов јаке критичне сложености (види Лему 3.6). Дефинишимо релацију **R** као релацију суседства. Тада, ако узмемо да је нарушење одсуство ивице, број нарушења $\mathbf{I_R(n)}$ је број одсутних ивица, који је асимптотски $\mathbf{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)p}{2}}$**.** Међутим, ово не тежи нули по чвору. Да бисмо обезбедили и структурну конзистентност, можемо дефинисати релацију **R** на другачији начин, нпр. као „постоји пут дужине највише **2**". Тада се може показати да су нарушења ретка. Конкретније, можемо конструисати цео низ графова који су комплетни, па су сви услови тривијално задовољени. Овај пример показује да постоје нетривијални низови (случајни графови) који могу да се подесе да задовоље све три дефиниције. ■

Доказ 5 (Алтернативни за неконтрадикторност – преко модела логичке теорије).

Дефиниције 2.1, 2.2 и 2.3 могу се формализовати као формуле у језику теорије скупова [6]. Нека је $\boldsymbol{\varphi_1}$ формула која дефинише релациону мрежу, $\boldsymbol{\varphi_2}$ формула за структурну конзистенцију, и $\boldsymbol{\varphi_3}$ формула за критичку сложеност. Конзистентност се своди на питање да ли постоји модел **ZFC** у којем важе све три формуле за неки низ. Како **ZFC** поседује моделе у којима постоје комплетни графови, у таквом моделу све три формуле су тачне за низ комплетних графова. Дакле, оне су и узајамно конзистентне. За неконтрадикторност, треба показати да из једне не следи негација друге. То се може и проверити, и то тако што се конструишу два модела: један у којем важе $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$ али не важи $\boldsymbol{\varphi_3}$ (пример мрежа са константним степеном), и један у којем важе $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_3}$ али не важи $\boldsymbol{\varphi_2}$ (као мрежа са много нарушења).

Пошто такви модели постоје, ниједна дефиниција не имплицира негацију неке друге. Према томе, ни дефиниције нису у контрадикцији. ■

3.3 Формални развој теорије: Структурна нужност

Теорема 3.3 (Структурна нужност):
Нека је $\mathcal{G}$ бесконачна релациона мрежа за коју постоји функција **g(n)** таква да:

$(\bigstar')\delta(\mathcal{G}_n) \geq n - \varepsilon(n)$, где $\varepsilon(n) \to 0$ кад $n \to \infty$.

(Ово представља **услов јаке критичне сложености са брзим растом**.)
Тада за било коју релацију $R \in \mathbf{R}$ која задовољава:

1. Локалну стабилност (Дефиниција 2.4)
2. Глобалну пропагацију (Дефиниција 2.5)

важи да је $\mathcal{G}$ структурно конзистентна у односу на **R** (Дефиниција 2.2)

Доказ 1 (Директна комбинаторна анализа):
Претпоставимо супротно, да **G** није структурно конзистентна у односу на **R**. Тада према Дефиницији 2.2 постоји $\varepsilon > 0$ и бесконачан низ n_k такав да за све **k** важи: $\frac{I_R(n_k)}{n_k} \geq \varepsilon$.

Корак 1: Доња граница за $I_R(n)$. Из глобалне пропагације (Дефиниција 2.5), како је $I_R(n_k) \geq \varepsilon \cdot n_k \geq 1$ за довољно велико n_k, следи да постоји $K > 0$ тако да за довољно велико n_k:

$I_R(n_k) \geq K \cdot f(n_k)$, где је $f(n) = \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Корак 2: Веза између нарушења и блокираних веза. Из локалне стабилности (Дефиниц. 2.4), свако нарушење блокира највише C_R потенцијалних веза. Даље нека $M = M(R)$ буде константа преклапања (максималан број нарушења која могу блокирати исту везу), а број блокираних веза **B(n)** задовољава:
$\frac{I_R(n)}{M} \leq B(n) \leq C_R \cdot I_R(n)$.

Корак 3: Капацитет мреже. Из услова $(\bigstar')$ имамо $\delta(G_n) \geq n - \varepsilon(n)$. Број ивица задовољава:
$|E_n| \geq n \cdot \frac{g(n)}{2}$, где $g(n) = n - \varepsilon(n)$.

С друге стране, свака блокирана веза не постоји у мрежи, па: $|E_n| \leq \frac{n(n-1)}{2} - B(n) \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{I_R(n)}{M}$.

Корак 4: Комбиновање граница. Из $n \cdot g(n)/2 \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{I_R(n)}{M}$ добијамо: $I_R(n) \leq M \cdot \frac{n(n-1-g(n))}{2}$.
Како је $n - 1 - g(n) = n - 1 - (n - \varepsilon(n)) = \varepsilon(n) - 1$, за довољно велико **n** важи $\varepsilon(n) < 1$, па је $\varepsilon(n) - 1 < 0$. Тада: $I_R(n) \leq M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon(n) - 1}{2} < 0$.

Корак 5: Контрадикција. Из Корака 4 следи $I_R(n) < 0$, што је у контрадикцији са $I_R(n) \geq 0$.
Дакле, $I_R(n) = 0$ за све довољно велико **n**.

Корак 6: Закључак. Како $I_R(n) = 0$ за све довољно велико **n**, следи $\limsup \frac{I_R(n)}{n} = 0$, што је управо Д. 2.2. Дакле, $\mathcal{G}$ је структурно конзистентна у односу на **R** (и јаче: $I_R(n) = 0$ за довољно велико **n**). ■

Доказ 2 (Преко комбинаторне сатирације):
Нека је $m(n) = K \cdot \frac{n}{\log n}$ доња граница за број нарушења из глобалне пропагације (када постоји бар једно нарушење). Свако нарушење, по локалној стабилности, блокира највише C_R веза, па је $B(n) \leq C_R \cdot I_R(n)$, а такође $B(n) \geq \frac{I_R(n)}{M}$ (због преклапања).
Максимални број ивица у мрежи са **n** чворова и минималним степеном $\delta(G_n) \geq g(n)$ мора задовољити
$|E_n| \geq n \cdot \frac{g(n)}{2}$ и $|E_n| \leq \frac{n(n-1)}{2} - B(n) \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{I_R(n)}{M}$.
Комбиновањем: $I_R(n) \leq M \cdot \frac{n(n-1-g(n))}{2}$.

Са **(★′)**, $g(n) = n - \varepsilon(n)$, па $n-1-g(n) = \varepsilon(n)-1 < 0$ за довољно велико **n**. То би значило да је $I_R(n) < 0$, што је немогуће. Дакле, не може постојати нарушење за довољно велико **n**.
Дакле, $I_R(n) = 0$ за све довољно велико **n**, што је јаче од структурне конзистенције. ■

Доказ 3 (Преко теорије вероватноће и концентрационих неједнакости):

Нека G_n задовољава **(★′)**. Претпоставимо супротно - постоји $\varepsilon > 0$ и бесконачан низ n_k са $\frac{I_R(n_k)}{n_k} \geq \varepsilon$.

Корак 1: Очекивање и ограничење. Из локалне стабилности (Дефин. 2.4), свако нарушење утиче на највише C_R веза, па је очекивани број блокираних веза ограничен: $E[B(n)] \leq C_R \cdot I_R(n)$.
Из локалне стабилности (Дефин. 2.4) и комбинаторног аргумента (Корак 3, Доказ 1), број блокираних веза задовољава $E[B(n)] \leq C_R \cdot M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon(n)}{2}$. Дакле $E[B(n)] \leq C_R \cdot M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon(n)}{2} = o(n)$.

Корак 2: Чернофова граница. Применимо Чернофљеву неједнакост на број блокираних веза (слабо зависне случајне променљиве):
$P(B(n) \geq \varepsilon \cdot n) \leq \exp(-c \cdot \varepsilon^2 \cdot n)$ за неку константу $c > 0$, за довољно велико **n**.
Корак 3: Борел–Кантелијева лема. Догађај $\{B(n) \geq \varepsilon \cdot n\}$ се, према Борел–Кантелијевој леми, дешава само коначно много пута (јер горња граница експоненцијално опада). Али **ако** $\frac{I_R(n_k)}{n_k} \geq \varepsilon$, **онда** је и $\frac{B(n_k)}{n_k} \geq \frac{\varepsilon}{M'}$ (за неку константу $M' > 0$), што је у контрадикцији.

Дакле, претпоставка је нетачна, па $\limsup \frac{I_R(n)}{n} = 0$, што је Дефиниција. 2.2. ■

3.4 Коначна елиминација нарушења

Последица 3.4 (Коначна елиминација нарушења). Ако у Теореми 3.3 важи услов **(★′)**, **онда** мора постојати **N** такво да за све $n \geq N$ важи $I_R(n) = 0$.

Доказ 1 (Директно из Доказа 1 Теореме 3.3):

Према Доказу 1 Теореме 3.3, Корак 4, важи: $I_R(n) \leq M \cdot n \cdot \frac{n - 1 - g(n)}{2}$.

Са **(★′)** имамо $g(n) \geq n - \varepsilon(n)$, па $n - 1 - g(n) \leq \varepsilon(n) - 1$. Како $\varepsilon(n) \to 0$, постоји **N** такво да за све $n \geq N$ важи $\varepsilon(n) < 1$, дакле $\varepsilon(n) - 1 < 0$.

Тада је $I_R(n) \leq M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon(n)-1}{2} < 0$. Али $I_R(n) \geq 0$ по дефиницији. Дакле, мора бити $I_R(n) = 0$ за све $n \geq N$. ■

Доказ 2 (Комбинаторни — преко сатирације):
Из локалне стабилности (Дефин. 2.4) и глобалне пропагације (Дефин. 2.5), број блокираних веза $B(n)$ задовољава: $B(n) \geq \frac{I_R(n)}{M}$.

С друге стране, укупан број недостајућих веза у мрежи је ограничен са $\frac{n(n-1)}{2} - |E_n|$. Како је $|E_n| \geq n \cdot \frac{g(n)}{2}$, добијамо: $B(n) \leq \frac{n(n-1)}{2} - n \cdot \frac{g(n)}{2} = \frac{n(n-1-g(n))}{2}$.

Комбиновањем: $\frac{I_R(n)}{M} \leq \frac{n(n-1-g(n))}{2}$.

Са **(★′)** имамо $g(n) \geq n - \varepsilon(n)$, па $n-1-g(n) \leq \varepsilon(n)-1$. За довољно велико **n**, $\varepsilon(n) < 1$, па је $n-1-g(n) < 0$, а тиме и десна страна негативна. Како је лева страна ненегативна, једина могућност је $I_R(n) = 0$ за све $n \geq N$. ■

Доказ 3 (Контрадикција):

Претпоставимо супротно, да за свако $\mathbf{N}$ постоји $\mathbf{n \geq N}$ са $\mathbf{I_R(n) \geq 1}$. Тада постоји бесконачан низ $\mathbf{n_k \to \infty}$ такав да $\mathbf{I_R(n_k) \geq 1}$ за све $\mathbf{k}$.

Из глобалне пропагације (Деф. 2.5) следи да тада $\mathbf{I_R(n_k) \geq K \cdot f(n_k)}$ за неку функцију $\mathbf{f(n) = \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)}$.

Дакле, $\mathbf{I_R(n_k) \to \infty}$. Али из Доказа 1 Теореме 3.3, Корак 4: $\mathbf{I_R(n_k) \leq M \cdot n_k \cdot \frac{n_k - 1 - g(n_k)}{2}}$.

Са **(★′)** имамо $\mathbf{n_k - 1 - g(n_k) \leq \varepsilon(n_k) - 1}$. За довољно велико $\mathbf{k}$, $\mathbf{\varepsilon(n_k) < 1}$, па:

$\mathbf{I_R(n_k) \leq M \cdot n_k \cdot \frac{\varepsilon(n_k) - 1}{2} < 0}$.

Контрадикција са $\mathbf{I_R(n_k) \geq 1}$. Дакле, претпоставка је нетачна, па постоји $\mathbf{N}$ такво да за све $\mathbf{n \geq N}$ важи $\mathbf{I_R(n) = 0}$. ■

3.5 Робусност услова

Лема 3.5 (Робусност услова критичне сложености).
Нека низ мрежа $\mathbf{\{G_n\}}$ задовољава услов јаке критичне сложености са доњом границом $\mathbf{g(n)}$, тј.:

$\mathbf{\delta(G_n) \geq g(n)}$ и $\mathbf{\lim_{\{n \to \infty\}} \frac{g(n)(\log n)}{n} = \infty}$.

Нека је $\mathbf{\{G_n'\}}$ други низ мрежа (пертурбација) чији минимални степен $\mathbf{\delta'(Gn')}$ задовољава:

$\mathbf{|\delta'(G_n') - g(n)| \leq \varepsilon(n)}$, где је $\mathbf{\varepsilon(n) = o(g(n))}$.

Тада низ $\mathbf{\{G_n'\}}$ такође задовољава услов јаке критичне сложеност и са истим основним асимптотским својствима (према Леми 3.1).

Доказ 1 (Директна асимптотска анализа):
Из претпоставке имамо $\mathbf{\delta'(G_n') \geq g(n) - \varepsilon(n)}$. Пошто је $\mathbf{\varepsilon(n) = o(g(n))}$, за довољно велико $\mathbf{n}$ важи:

$\mathbf{\varepsilon(n) \leq \frac{1}{2} g(n)}$. Тада: $\mathbf{\delta'(G_n') \geq g(n) - \frac{1}{2} g(n) = \frac{1}{2} g(n)}$.

Нека је $\mathbf{g'(n) = \frac{1}{2} g(n)}$. Тада $\mathbf{\delta'(G_n') \geq g'(n)}$ и $\mathbf{\lim_{\{n \to \infty\}} \frac{g'(n)(\log n)}{n} = \frac{1}{2} \lim_{\{n \to \infty\}} \frac{g(n)(\log n)}{n} = \infty}$.

Дакле, $\mathbf{\{G_n'\}}$ задовољава јаку критичну сложеност са доњом границом $\mathbf{g'(n)}$. ■

Доказ 2 (Преко ограничења односа):
Дефинишимо $\mathbf{r(n) = \frac{\delta'(G_n')}{g(n)}}$. Из претпоставке следи: $\mathbf{1 - \frac{\varepsilon(n)}{g(n)} \leq r(n) \leq 1 + \frac{\varepsilon(n)}{g(n)}}$.

Како $\mathbf{\frac{\varepsilon(n)}{g(n)} \to 0}$, имамо $\mathbf{\lim_{\{n \to \infty\}} r(n) = 1}$. Тада: $\mathbf{\frac{\delta'(G_n')(\log n)}{n} = r(n) \cdot \frac{g(n)(\log n)}{n}}$.

Пошто $\mathbf{r(n) \to 1}$ и $\mathbf{\frac{g(n)(\log n)}{n} \to \infty}$, производ тежи у ∞. ■

Доказ 3 (Преко теореме о три низа):
Размотримо низове:

$$\mathbf{a_n = \frac{g(n)(\log n)}{n}},$$
$$\mathbf{b_n = \frac{\varepsilon(n)(\log n)}{n}},$$
$$\mathbf{c_n = \frac{\delta'(G_n')(\log n)}{n}}.$$

По претпоставци, $\mathbf{a_n \to \infty}$ и $\mathbf{b_n = o(a_n)}$ (јер $\mathbf{\varepsilon(n) = o(g(n))}$). Знамо да $\mathbf{|c_n - a_n| \leq b_n}$. Према теореми о три низа: како $\mathbf{a_n - b_n \to \infty}$ и $\mathbf{a_n + b_n \to \infty}$, а $\mathbf{c_n}$ је између њих, следи $\mathbf{c_n \to \infty}$. То је управо услов јаке критичне сложености за $\mathbf{\{G_n'\}}$. ■

Доказ 4 (Преко еквиваленције асимптотских редова):

Из претпоставке имамо да је $\varepsilon(n) = o(g(n))$. Ово значи да постоји функција $\eta(n)$ таква да је $\varepsilon(n) = \eta(n)\, g(n)$ и $\eta(n) \to 0$ кад $n \to \infty$. Тада се минимални степен пертурбиране мреже може писати као:

$$\delta'(G_n') = g(n) + \theta_n\, \varepsilon(n) = g(n)(1 + \theta_n\, \eta(n)),$$

где је $|\theta_n| \le 1$. Како је $\eta(n) \to 0$, за довољно велико n важи $|\theta_n\, \eta(n)| < \frac{1}{2}$, па је $1 + \theta_n\, \eta(n) > \frac{1}{2}$.

Дакле, $\delta'(G_n') \ge \frac{1}{2}\, g(n)$.

Сада рачунамо: $\frac{\delta'(G_n')(\log n)}{n} \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{g(n)(\log n)}{n}$.

Како по претпоставци $\frac{g(n)(\log n)}{n} \to \infty$, десна страна тежи у бесконачно, а тад и лева. Према томе,

$\lim_{\{n\to\infty\}} \frac{\delta'(G_n')(\log n)}{n} = \infty$,

што значи да низ $\{G_n'\}$ задовољава услов јаке критичне сложености. Овај доказ експлицитно користи O-нотацију и показује да ни пертурбација која је занемарљива, у односу на главни члан, не мења асимптотско понашање. ■

3.6 Критеријуми за јаку критичну сложеност

Лема 3.6 (Критеријуми јаки критични сложености). Довољни услови да низ мрежа $\{G_n\}$ задовољи услов (★) из Теореме 3.3 (тј. $\lim_{\{n\to\infty\}} [\frac{g(n)(\log n)}{n}] = \infty$) су:

- $\delta(G_n) \ge f(n)$ где је $f(n) = \omega(\frac{n}{\log n})$ (тј. $\frac{f(n) \log n}{n} \to \infty$).
- G_n је $d(n)$-регуларан, где $\frac{d(n)\ \log n}{n} \to \infty$.
- $\delta(G_n) \ge C \cdot n$ за неку константу $C > 0$ (линеарни раст).

Доказ 1 (Из дефиниције (★)):

Услов (★) је $\lim_{\{n\to\infty\}} [\frac{g(n)(\log n)}{n}] = \infty$. Ако је $\delta(G_n) \ge f(n)$ са $\frac{f(n) \log n}{n} \to \infty$, могли смо узети $g(n) = f(n)$ и услов је задовољен. То је директно из дефиниције. ■

Доказ 2 (Преко случајних графова са густим везама):

Размотримо низ случајних графова $G(n, p)$ са $p = p(n)$ таквом да $p = \omega(\frac{1}{\log n})$. Познати резултати о концентрацији минималног степена [4, 14] показују да **ако** $p \cdot n \to \infty$, **онда** за свако $\varepsilon > 0$, асимптотски скоро сигурно важи $\delta(G) \ge (1-\varepsilon)\, np \ge (1-\varepsilon) \cdot n \cdot p$. Како из $p = \omega(\frac{1}{\log n})$ следи $p \cdot \frac{n}{\log n} \to \infty$, то $n \cdot p \to \infty$ брже од $\log n$. Према томе, $\delta(G) \ge C \cdot n \cdot p$ за неку константу $C > 0$ за довољно велико n. Тада $\frac{\delta(G)(\log n)}{n} \ge C \cdot p \cdot \log n \to \infty$, јер $p \cdot \log n \to \infty$ по дефиницији $p = \omega(\frac{1}{\log n})$. Дакле случајни графови, они са довољно високом вероватноћом везе, задовољавају услов (★).■

Доказ 3 (Конструктивни примери):

Експлицитне конструкције као што су комплетни графови K_n имају $\delta(K_n) = n-1$. Тада $\delta(K_n)\, \frac{(\log n)}{n} \sim \log n \to \infty$. Слично, комплетни бипартитни графови $K_{\{n,n\}}$ имају $\delta = n$, па је $\delta \cdot \frac{(\log n)}{n} = \log n \to \infty$. Дакле, ове експлицитне класе задовољавају услов. ■

Доказ 4 (Преко везе са просечним степеном):

Нека је $\bar{d}(G_n)$ просечан степен мреже G_n. Позната неједнакост $\delta(G_n) \le \bar{d}(G_n)$ увек важи. **Ако** додатно претпоставимо да је разлика између минималног и просечног степена ограничена ($\bar{d}(G_n) \le K\, \delta(G_n)$ за

неку константу **K)**, **онда** услов $\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{G_n})\ \frac{(\log \mathbf{n})}{\mathbf{n}} \to \infty$ имплицира $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G_n})\ \frac{(\log \mathbf{n})}{\mathbf{n}} \to \infty$**.** Посебно, важи за регуларне графове $\boldsymbol{\delta} = \bar{\mathbf{d}}$, па је довољно да $\frac{\bar{\mathbf{d}}(\log \mathbf{n})}{\mathbf{n}} \to \infty$**.** Овај доказ показује да су и они критеријуми засновани на просечном степену такође корисни. ■

---

4. МЕТРИКА НУЖНОСТИ

Ово кратко поглавље третира формалну дефиницију о основна својства метрике нужности. Поглавље смо издвојили као засебно због његове важности за сам појам метрике нужности.

4.1 Формална дефиниција метрике нужности

Дефиниција 4.1 (Метрика нужности). За релацију **R** у релационој мрежи **G** дефинишемо меру њене структурне нужности **N(R)** као:

$$\mathbf{N(R) = 1 - \lim\sup_{\{n \to \infty\}} \left(\frac{I_R(n)}{n}\right)}$$

где је $\mathbf{I_R(n)}$ број нарушења релације **R** у мрежи са **n** чворова.

Интуиција: Мера **N(R)** квантификује онај степен до кога је нека релација **R** неопходна за одржавање конзистенције мреже. Вредност **1** означава потпуну структурну нужност (сва нарушења асимптотски нестају), вредност **0** означава потпуну одсутност нужности.

4.2 Основна својства метрике нужности

Лема 4.2 (Својства метрике нужности): Мера нужности **N(R)** која је дефинисана у Дефиницији 4.1 задовољава следећа својства:

- **Рефлексивност: $\mathbf{N(\emptyset) = 1}$** за празан скуп релација.
- **Монотоност: Ако $\mathbf{R_1 \subseteq R_2}$, онда $\mathbf{N(R_1) \geq N(R_2)}$.**
- **Границе:** За сваку релацију **R,** $\mathbf{0 \leq N(R) \leq 1}$.
- **Инваријантност на изоморфизам: Ако** постоји изоморфизам између мрежа **G, G'** који пресликава релацију **R** на **R', онда N(R) = N(R').**

Доказ 1 (Рефлексивност):

За $\mathbf{R = \emptyset}$**,** нема нарушења, па је $\mathbf{I_\emptyset(n) = 0}$ за свако **n**. Тада $\mathbf{\lim\sup_{\{n \to \infty\}} \frac{0}{n} = 0}$, па $\mathbf{N(\emptyset) = 1 - 0 = 1}$. ■

Доказ 2 (Монотоност):

Нека је $\mathbf{R_1 \subseteq R_2}$**.** Тада свако нарушење релације $\mathbf{R_1}$ је истовремено нарушење релације $\mathbf{R_2}$**.** Онда је и $\mathbf{I_{\{R_1\}}(n) \leq I_{\{R_2\}}(n)}$ за свако **n,** па $\mathbf{\limsup \frac{I_{\{R_1\}}(n)}{n} \leq \limsup \frac{I_{\{R_2\}}(n)}{n}}$**.** Одатле $\mathbf{N(R_1) = 1 - \limsup \frac{I_{\{R_1\}}(n)}{n} \geq 1 - \limsup \frac{I_{\{R_2\}}(n)}{n} = N(R_2)}$**.** ■

Доказ 3 (Границе):

По дефиницији, $\mathbf{I_R(n) \geq 0}$, па је онда $\mathbf{\limsup \frac{I_R(n)}{n} \geq 0}$ и $\mathbf{N(R) \leq 1}$. Свако нарушење захтева бар један објекат (чвор или ивицу), па је $\mathbf{I_R(n) \leq n}$ за нарушења на чворовима, или $\mathbf{I_R(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}}$ за нарушења на ивицама. У сваком случају, $\mathbf{\limsup \frac{I_R(n)}{n} \leq 1}$, па је $\mathbf{N(R) \geq 0}$. Дакле, $\mathbf{0 \leq N(R) \leq 1}$. ■

Доказ 4 (Инваријантност на изоморфизам):

Изоморфизам очувава структуру нарушења: неки објекат нарушава **R ако и само ако** и његова слика нарушава **R'**. Стога је $\mathbf{I_R(n) = I_{\{R'\}}(n)}$ за свако **n**, па су и **lim sup** и **N** једнаки. ■

Доказ 5 (Алтернативни доказ за монотоност преко скуповне инклузије):

Скуп нарушења релације $\mathbf{R_1}$ је подскуп скупа нарушења релације $\mathbf{R_2}$**.** Према томе, карактеристичне функције нарушења задовољавају $\mathbf{X_{\{R_1\}}(x) \leq X_{\{R_2\}}(x)}$ за сваки објекат **x,** док просек по чворовима ову неједнакост наслеђује, а затим и **limes superior,** што даје $\mathbf{N(R_1) \geq N(R_2)}$**.** ■

Доказ 6 (Алтернативни доказ за границе преко нормализације):
Могуће је дефинисати нормализовану метрику **N'(R) = (N(R) - min)/(max - min),** где **min** и **max** јесу могуће вредности за дати тип релације. Међутим, из ове дефиниције директно следи да је **N(R)** увек у **[0,1],** па је нормализација тривијална. ■

---

5. УНИВЕРЗАЛНОСТ ПРИМЕНЕ

Ово, изузетно важно, поглавље показује и доказује ануверзалност примене структурне нужности.

5.1 Теорема универзалне примене

Теорема 5.1 (Универзална примена – последица структурне нужности).
Нека је C класа релационих мрежа за коју важе следећи услови:

1. **Јака критична сложеност:** За сваки низ мрежа $\mathbf{\{G_n\}}$ у **C** постоји функција **g(n)** и то таква да је минимални степен $\mathbf{\delta(G_n) \geq g(n)}$ и $\mathbf{\lim_{\{n\to\infty\}}[\frac{g(n)(\log n)}{n}] = \infty}$**.**
2. **Локална стабилност:** Све релације **R** које се разматрају на мрежама из **C** задовољавају услов локалне стабилности (Дефиниција 2.4) са униформно ограниченим константама $\mathbf{C_R}$.
3. **Глобална пропагација:** Све такве релације **R** задовољавају услов глобалне пропагације (Деф. 2.5) са константом **K> 0** и функцијом раста $\mathbf{f(n) = \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)}$ (стандардни случај $\mathbf{f(n) = \frac{n}{\log n}}$**).**

Тада за сваку мрежу **G** из **C** и сваку релацију **R** која задовољава горње услове (2) и (3), мора важити да је мера нужности **N(R) = 1**, тј. мрежа је структурно конзистентна у односу на **R**.

Доказ 1 (Директан из Теореме 3.3):
За дату мрежу **G** из **C** и релацију **R**, претпоставке Теореме 3.3 су задовољене. Према Теореми 3.3, **G** је структурно конзистентна у односу на **R**, што по Дефиницији 2.2 значи $\mathbf{\lim\sup_{\{n\to\infty\}} \frac{I_R(n)}{n} = 0}$**.** Из Дефиниције 4.1 мере нужности следи **N(R) = 1 - 0 = 1**. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом):

Претпоставимо да постоји мрежа **G** у **C** и релација **R** таква да **N(R) < 1**. Тада $\mathbf{\lim\sup \frac{I_R(n)}{n} > 0}$, тако да постоји $\mathbf{\varepsilon > 0}$ и бесконачан низ $\mathbf{n_k}$ са $\mathbf{I_R(n_k) / n_k \geq \varepsilon}$**.** Из услова глобалне пропагације, за довољно велико $\mathbf{n_k}$**,** имаћемо $\mathbf{I_R(n_k) \geq K \cdot \frac{n_k}{\log n_k}}$**.**. Као у доказу Теореме 3.3, ово доводи до контрадикције са условом јаке критичне сложености и локалне стабилности. Дакле, **N(R)** мора бити **1**. ■

Доказ 3 (Преко метричких особина):

Услови теореме гарантују структурну конзистенцију, тј. $\mathbf{\lim\sup \frac{I_R(n)}{n} = 0}$. Мера нужности **N(R)** је дефинисана као **1** минус тај **lim sup**, па је **N(R) = 1**. Ово је директна веза дефиниција. ■

Напомена. Теорема 5.1 показује да структурна нужност важи за читаве класе мрежа, али њена даља примена захтева да се за конкретну класу провере да ли заиста задовољава све три претпоставке. Ово није увек тривијално, али за многе природне класе (нпр. комплетни графови, густи случајни графови, регуларни графови са брзо растућим степеном) ове претпоставке могу бити проверене.

5.2 Квантитативна нужност

Последица 5.2 (Квантитативна нужност). Нека класа мрежа **C** задовољава услове Теореме 5.1. Тада важе следеће квантитативне процене брзине конвергенције:

1. **Експоненцијална конвергенција: Ако** додатно важи $\delta(G_n) \geq C \cdot n$ за неку константу $C > 0$ (линеарна густина), **онда** постоји константа $c > 0$ таква да $1-N(R)=O(e^{-cn})$.
2. **Суперполиномијална конвергенција:** Под основним условом $g(n) \log n / n \to \infty$, је и брзина конвергенције суперполиномијална, тј. за свако $k > 0$ важи $1-N(R)=o(n^{-k})$.

Доказ 1 (Експоненцијална конвергенција – главни доказ):

Претпоставимо $\delta(G_n) \geq C \cdot n$. Тада је укупан број ивица $|E_n| \geq C \frac{n^2}{2}$. Максималан могући број ивица је $\frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$. Дакле, број недостајућих веза (укључујући онемогућене услед нарушења) највише јесте $(\frac{1}{2} - \frac{C}{2}) \cdot n^2 = \left(\frac{1-C}{2}\right) \cdot n^2$. Из глобалне пропагације, **ако** постоји нарушење, **онда** $I_R(n) \geq K \cdot \frac{n}{\log n}$. Из локалне стабилности, свако нарушење онемогућава бар једну везу, па је онда овај број онемогућених веза $B(n) \geq \frac{I_R(n)}{M} \geq \frac{K}{M} \cdot \frac{n}{\log n}$. Али укупан број онемогућених веза не би могао прећи укупан број недостајућих веза: $\frac{K}{M} \cdot \frac{n}{\log n} \leq B(n) \leq \left(\frac{1-C}{2}\right) \cdot n^2$. За довољно велико n, то је немогуће јер лева страна расте као $\frac{n}{\log n}$, а десна као n^2. Конкретно, делећи са n^2 добијамо $\frac{\frac{K}{M}}{n - \log n} \leq \left(\frac{1-C}{2}\right)$. За $n \to \infty$, лева страна тежи 0, па неједнакост не важи за довољно велико n. Дакле, не може постојати нарушење за довољно велико n. Ово имплицира да постоји N такво да за $n \geq N$ важи $I_R(n) = 0$, што је јаче од експоненцијалног опадања. У општијем случају, ако дата релација дозвољава мала нарушења, анализа даје експоненцијалну границу. ■

Доказ 2 (Експоненцијална конвергенција – преко Чернофове границе):

Моделујмо појаву нарушења, на сваком потенцијалном месту, као Бернулијеву променљиву X_i која је са вероватноћом p_i. Локална стабилност и глобална пропагација ограничавају зависност и пружају доњу границу за p_i ако постоји нарушење. Али услов линеарне густине значи да је простор могућих конфигурација мреже екстремно ограничен. Онда применом Чернофове границе за све слабо зависне променљиве, добијамо да је вероватноћа да $I_R(n)$ премаши икакву фиксну границу експоненцијално мала. ■

Доказ 3 (Суперполиномијална конвергенција – преко концентрације):

Из доказа Теореме 3.3 (посебно применом концентрационих неједнакости), добија се да за свако $\varepsilon > 0$ постоји константа $c > 0$ таква да $P(\frac{I_R(n)}{n} \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-\frac{c\varepsilon 2n}{\psi(n)})$,

где $\psi(n)$ полако расте (нпр. $\psi(n) = \log n$). Како $\frac{n}{\psi(n)} \to \infty$, горња граница опада брже од било ког полинома у n. То би значило да за свако $k > 0$ постоји N такво да за $n \geq N$ важи $P(\frac{I_R(n)}{n} \geq \varepsilon) \leq n^{\{-k\}}$. Пошто је $1 - N(R) = \limsup \frac{I_R(n)}{n}$, ово имплицира $1 - N(R) = o(n^{\{-k\}})$. ■

Доказ 4 (Суперполиномијална конвергенција – директно из доказа Теореме 3.3):

Из неједначина у доказу Теореме 3.3 добијамо да **ако** $I_R(n)$ није $o(n)$, **онда** долази и до контрадикције са условом $g(n) \frac{(\log n)}{n} \to \infty$. Квантитативнија анализа показује да би $I_R(n)$ морало бити $o(\frac{n}{\log n})$, а заправо и $o(n^{\{1-\delta\}})$ за свако $\delta > 0$. Ово директно даје суперполиномијални пад. ■

5.3 Карактеризација применљивих мрежа

Лема 5.3 (Примери мрежа које задовољавају услове Теореме 5.1).
Следеће класе мрежа задовољавају услов јаке критичне сложености из Теореме 5.1 (тј. $\delta(G_n) \geq g(n)$ са $\lim_{\{n\to\infty\}} [\frac{g(n)(\log n)}{n}] = \infty$):

1. **Комплетне мреже K_n.**
   - **Критеријум:** $\{G_n\} = \{K_n\}$ (низ комплетних графова).
   - **Доказ:** За K_n важи $\delta(K_n) = n-1$. Тада $\frac{[\delta(K_n)\cdot \log n]}{n} = \frac{[(n-1)\cdot \log n]}{n} \sim \log n \to \infty$, па је ту задовољен услов јаке критичне сложености. За било коју релацију **R** дефинисану над K_n која додатно задовољава услове локалне стабилности и глобалне пропагације (може се и проверити за конкретну **R**), Теорема 5.1 гарантује $N(R) = 1$. ■
2. **Регуларне мреже са брзо растућим степеном.**
   - **Критеријум:** $\{G_n\}$ је низ $d(n)$-регуларних графова, где $\frac{d(n)(\log n)}{n} \to \infty$.
   - **Доказ:** Према дефиницији, $\delta(G_n) = d(n)$. Услов $\frac{d(n)(\log n)}{n} \to \infty$ управо јесте услов јаке критичне сложености. Дакле, за такве мреже и релације **R** са потребним својствима, важи Теорема 5.1. ■
3. **Случајни графови G(n, p) са високом вероватноћом везе.**
   - **Критеријум:** $p = p(n)$ таква да $p\cdot \frac{n}{\log n} \to \infty$ (тј. $p = \omega(\frac{\log n}{n})$.
   - **Доказ:** За $G(n, p)$ са $p\cdot n \to \infty$, познато је да $\delta(G_n) \sim n\cdot p$ асимптотски скоро сигурно. Тад је $[\delta(G_n)\log n] / n \sim p\cdot \log n \to \infty$. Према томе, услов јаке критичне сложености је задовољен, а уз додатак да релације **R** имају својства стабилности и пропагације, а Теорема 5.1 постаје примењива. ■
4. **Мреже малог света са контролисаном минималним степеном.**
   - **Критеријум:** Модел мреже малог света (нпр. Ватс-Строгац) [19], где се параметар решења **K** или вероватноћа преусмеравања **p** бира тако да ту резултујући минимални степен $\delta(G_n)$ задовољава $\frac{\delta(G_n)(\log n)}{n} \to \infty$.
   - **Доказ:** У Ватс-Строгац моделу [19], почетна решетка је **K**-регуларна. Након преусмерења, минимални степен остаје **K**. **Ако** је **K** такав да $\frac{K(\log n)}{n} \to \infty$, **онда** је услов задовољен.

     За остале моделе малог света (нпр. Барабаши-Алберт), степен расте логаритамски, па онда услов није задовољен. Дакле, само модели са контролисаном минималном густином могу задовољити услов. ■
5. **Густи експандер графови.**
   - **Критеријум:** $\{G_n\}$ је низ експандер графова са константном спроводношћу и минималним степеном $\delta(G_n) \geq C\cdot n$ за неку константу $C > 0$.
   - **Доказ: Ако** $\delta(G_n) \geq C\cdot n$, **онда** $\frac{\delta(G_n)(\log n)}{n} \geq C\cdot \log n \to \infty$. Дакле, услов јаке критичне сложености мора бити задовољен. Експандери имају јаке особине повезаности које често и олакшавају проверу локалне стабилности и глобалне пропагације. ■

---

6. АПЛИКАЦИОНИ ОКВИР СА ДОКАЗИМА И ПРИМЕРИМА

У овом поглављу размотрићемо могуће примене структурне нужности и доказати универзалност код примене на мрежно моделовање разних проблема.

6.1 Општи метод примене

За примену **Теорије структурне нужности** на конкретне проблеме, препоручује се следећи општи оквир:

1. **Моделовање:** Формализовати проблем као релациону мрежу **G = (V, E, R).** Чворови **V** овде представљају објекте или ентитете проблема, ивице **E** представљају везе или интеракције, док релације **R** кодирају ограничења или услове које проблем мора да задовољи.
2. **Верификација услова:** Проверити да ли конструисана мрежа **G** задовољава све претпоставке Теореме 5.1:
3. **Критична сложеност:** Да ли минимални степен $\boldsymbol{\delta(G_n)}$ расте довољно брзо да важи: $\boldsymbol{\lim_{\{n\to\infty\}} [\frac{\delta(G_n)(\log n)}{n}]} = \infty$?
4. **Локална стабилност:** Да ли за релевантну релацију **R** постоји коначна константа $\boldsymbol{C_R}$ таква да свако нарушење ограничава највише $\boldsymbol{C_R}$ веза (Деф. 2.4)?
5. **Глобална пропагација:** Да ли постоји константа **K > 0** таква да **ако** постоји нарушење, **онда** њихов број $\boldsymbol{I_R(n)}$ расте бар као $\boldsymbol{K \cdot \frac{n}{\log n}}$ за велико **n** (Деф. 2.5)?
6. **Анализа нужности:** Ако су сви три услова задовољени, из Теореме 5.1 директно следи да је мера нужности **N(R) = 1.**

Закључак: N(R) = 1 имплицира да је релација **R** структурно нужна у мрежи **G**, односно да не постоје контрапримери (нарушења) јер не могу опстати асимптотски. Ово решава оригинални проблем и то у смислу доказивања немогућности контрапримера.

6.2 Критеријуми применљивости

Кључни корак у апликацији је верификација услова из Теореме 5.1. Следе неки корисни смернице и критеријуми:

Критеријум 6.2.1 (Растућа густина везе). Проблеми који се могу моделирати као оне мреже са брзо растућим минималним степеном $\boldsymbol{\delta(G_n)}$**.** Овај критеријум је често задовољен у:

- **Комбинаторним системима са густим ограничењима** (нпр. комплетни графови ограничења, густи случајни графови).
- **Проблемима где се број интеракција/ограничења умножава са порастом броја ентитета.**

Критеријум 6.2.2 (Локална стабилност). Проблеми код којих нарушења ограничења имају локално ограничен ефекат. Формално, ако постоји апсолутна константа C таква да свако нарушење утиче или „блокира" на највише **C** других објеката или веза. Ово важи за:

- **Логичке формуле у конјунктивној нормалној форми (CNF)** – нарушење једне од клауза утиче само на променљиве у тој клаузи.
- **Системе линеарних једначина** – једна грешка у једначини утиче на променљиве које се у њој појављују, а не на друге.
- **Модуларне системе са јасним интерфејсима.**

Критеријум 6.2.3 (Глобална пропагација). Проблеми код којих нарушења имају тенденцију да се не локализују, већ да се прошире кроз систем. Овај услов је најтежи за проверу и често захтева мало дубљу анализу динамике система. Може се размотрити код:

- **Система са јаким каскадним ефектима** или позитивном повратном спрегом.
- **Проблема где непотпуност једног дела система логички захтева и непотпуност многих других делова** (нпр. проблеми потпуног поклапања, обојења).

6.3 Илустративни примери примене

Пример 6.3.1 (Проблем задовољивости у густим случајним формулама - SAT).

Размотримо проблем **SAT** за случајне формуле у **CNF** са $\boldsymbol{m = \Delta n}$ клауза, где је $\boldsymbol{\Delta}$ константа густине. Можемо моделовати формулу као мрежу где чворови представљају променљиве, а ивице заједничко учествовање у клаузама. За велико $\boldsymbol{\Delta}$**,** овај граф постаје веома густ, што и указује на могућу критичну сложеност. Локална стабилност је задовољена: неуспех клаузе утиче само на оне променљиве у њој. Питање глобалне пропагације јесте доста сложеније и везано за феномен фазног прелаза у случајним формулама. Ова аналогија показује како се класичан проблем може ставити у оквир теорије, али још и истиче да је провера услова нетривијална и предмет даљег истраживања.

Пример 6.3.2 (Проблем постојања перфектних поклапања у густим графовима).

Позната теорема (Хајалови) каже да граф са минималним степеном $\boldsymbol{\delta(G) \geq \frac{n}{2}}$ мора имати перфектно поклапање. У нашем оквиру, релација **R** је „сваки чвор мора бити упарен". Нарушење јесте неспарен чвор. Лако се види локална стабилност: неспарен чвор блокира могућност спаривања за себе и може ограничити опције за суседе. Услов критичне сложености је задовољен када је **δ(G)** пропорционалан **n**. Глобална пропагација се огледа у томе што мали број неспарених чворова може потпуно спречити постојање потпуног поклапања у целом графу. Овакав приступ нуди једну алтернативну, структурну перспективу на класичан комбинаторни резултат.

Пример 6.3.3 (Моделовање проблема дистрибуције простих бројева).
Могуће је конструисати мрежу где су чворови цели бројеви, а релације кодирају везе као: „разлика је једнака **k**" или „су прости близанци". Проблем постојања бесконачно много простих близанаца овде постаје питање постојања бесконачно много „активних" чворова у мрежи. Међутим, провера услова Теореме 5.1 за овако дефинисану мрежу је изузетно тешка и отворен проблем. Овај пример показује границе примене: иако је моделовање могуће, примена главне теореме није аутоматска.

6.4 Теорема универзалног моделовања проблема као мреже

Теорема 6.4 (Универзално мрежно моделовање проблема).
За сваки математички проблем **П** типа „да ли за сваки објекат **t** у скупу **T** постоји конфигурација a у домену A^n таква да важи релација **R(t, a)**?" постоји конструкција релационе мреже **G(П)** таква да је **П** тачан **ако и само ако G(П)** нема потпуних рупа.

Доказ 1 (Директна конструкција):
Нека је **П = (T, A, n, R)** где је **R** подскуп од $\mathbf{T \times A^n}$. Дефинишемо **G(П) = (V, E, R)** на следећи начин:
Чворови:

- $\mathbf{V_T = \{v_t : t \in T\}}$ (чворови-циљеви)
- $\mathbf{V_S = \{w_a : a \in A^n\}}$ (чворови-решења)
- $\mathbf{V_C = \{c_{t,a} : t \in T, a \in A^n\}}$ (конектори)
- $\mathbf{V = V_T \cup V_S \cup V_C}$

Ивице:

- $\mathbf{E1 = \{(v_t, c_{t,a}) : t \in T, a \in A^n\}}$
- $\mathbf{E2 = \{(c_{t,a}, w_a) : t \in T, a \in A^n\}}$
- $\mathbf{E = E1 \cup E2}$

Релације:

- $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО ако и само ако R(t, a)** важи
- $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= ТАЧНО ако и само ако** постоји **a** такво да је $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО**

Дефинишемо потпуну рупу за чвор $\mathbf{v_t}$ као ону ситуацију где за свако **a** важи $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= НЕТАЧНО**. Тада је **П** тачан (свако **t** има бар једно a са **R(t,a)**) **ако и само ако** ниједан $\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа, а то значи да је конструкција коректна. ■

Доказ 2 (Конструкција хиперграфа):
Конструишемо хипермрежу $\mathbf{H(П) = (V_H, E_H)}$ са:

- $\mathbf{V_H = T}$ (чворови су циљеви)
- $\mathbf{E_H = \{e_a : a \in A^n\}}$ (хиперивице), где је $\mathbf{e_a = \{t \in T : R(t, a)\}}$

Затим дефинишемо **G(П)** додавањем коренског чвора **r** и веза:

- $\mathbf{(t, e_a)}$ за свако **t** у $\mathbf{e_a}$
- $\mathbf{(e_a, r)}$ за свако **a**

У овој конструкцији, потпуна рупа за **t** је када **t** није ни у једној хиперивици $\mathbf{e_a}$, што је еквивалентно непостојању **a** са **R(t,a).** ■

Доказ 3 (Преко теорије модела):
Нека је **P** проблем из класе **C**. Конструишемо мрежу **G(P)** како је у Доказу 1. Нека је **T** теорија првог реда која описује **G(P).** Посматрајмо скуп свих модела **M** који задовољавају **T**. **Ако** је **P** нетачан **онда** постоји $\mathbf{t \in T}$ за које не постоји ā са **R(t, ā).** Тада је у сваком моделу **M**, чвор $\mathbf{v_t}$ потпуна рупа.

Обратно, **ако** је **P** тачан, **онда** у сваком моделу **M** сваки чвор $\mathbf{v_t}$ има бар једног суседа. Како је класа модела елементарна, постојање потпуне рупе јесте елементарно својство. Применом компактности се добија да је **P** тачан **ако и само ако G(P)** нема потпуних рупа у свим оним моделима довољно велике кардиналности. ■

НАПОМЕНА: Ова теорема оправдава стратегију превођења проблема у мрежу, што је темељ нашег будућег рада на најмање 100 проблема. Међутим, да би се и на **G(П)** применила Теорема структурне нужности (5.1) и закључило **N(R)=1**, неопходно је експлицитно проверити да ли **G(П)** задовољава све претпоставке Теореме 5.1: **критичну сложеност, локалну стабилност и глобалну пропагацију**. Те претпоставке нису аутоматски задовољене сваком конструкцијом; њихова провера представља саму суштину примене теорије. Детаљније техничке конструкције даје Теорема 7.3 у наредном поглављу. Доказ 3 даје еквиваленцију за модела довољно велике кардиналности, за разлику од Доказа 1 и 2 који дају потпуну еквиваленцију.

---

7. УНИВЕРЗАЛНОСТ ПРЕВОЂЕЊА ПРОБЛЕМА У МРЕЖЕ

Ово поглавље даје коначни смисао раду у коме се огледа практична примене методологије развијене из Теорије структурне нужности, оне коју намеравамо тестирати на најмање 100 познатих проблема.

7.1 Увод и мотивација

Кључно питање на које **Теорија структурне нужности** мора дати одговор јесте: Да ли се, и како, сви математички проблеми могу превести у релационе мреже и то на начин који чува њихову семантику? Ова секција даје потврдан одговор кроз **Теорему универзалног превођења (УПТ),** која представља теоретски темељ целе методологије.

7.2 Формализација проблема и мрежа

Дефиниција 7.2.1 (Класа универзално преводивих проблема).

Нека је **C** класа проблема облика **P = (T, A, n, R)** где је:

- **T** пребројив скуп циљева (targets),
- **A** пребројив домен извора (sources),
- **n** природан број (фиксна димензија решења),
- **R** подскуп од $\mathbf{T} \times A^{\mathbf{n}}$ (рекурзивно пребројива релација).

Интерпретација: Проблем **P** је тачан ако важи:

За свако **t** из **T**, постоји вектор $\bar{\mathbf{a}}$ из $A^{\mathbf{n}}$ такав да **R(t, ā).**

Дефиниција 7.2.2 (Релациона мрежа без потпуних рупа).

За мрежу **G = (V, E, R),** са означеним подскупом $\mathbf{V_T} \subseteq \mathbf{V}$ (чворови-циљеви), кажемо и да је мрежа без потпуних рупа ако за свако **v** у $\mathbf{V_T}$ постоји путања $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u_1} \rightarrow \mathbf{...} \rightarrow \mathbf{u_k}$ и то таква да $\mathbf{u_k}$ јесте чвор типа „решење" и све везе дуж путање задовољавају релације из **R.**

Дефиниција 7.2.3 (Конструктор мреже).

Конструктор је израчунљива функција **Ф: C → M,** где је **M** класа релационих мрежа, таква да се опис **Ф(P)** ефективно гради из описа **P**.

7.3 Теорема универзалног превођења (УПТ)

Теорема 7.3 (Универзално превођење проблема).

Постоји конструктор **Ф** за класу **C** са следећим својствима:

1. **Коректност: P** је тачан **ако и само ако Ф(P)** нема потпуних рупа.
2. **Ефективност конструкције: Ф(P)** се гради у времену полиномијалном у величини описа **P** (и то ако су **T** и **A** коначни описати експлицитно, или у величини алгоритма који их генерише).
3. **Структурно очување: Ако P1** се полиномијално редукује на **P2**, **онда** се и **Ф(P1)** редукује на **Ф(P2)** премошћавањем које поштује релације.
4. **Обративост:** Постоји конструктор **Ψ: M → C** такав да је **Ψ(Ф(P))** еквивалентан **P** (у смислу логичке еквиваленције тврђења).

Доказ 1 Теореме 7.3 (Директна конструкција):
Конструкција 7.3.1: За дати проблем **P = (T, A, n, R),** дефинисаћемо $\mathbf{\Phi_{dir}(P) = (V, E, R)}$ на следећи начин:

Чворови:

- $\mathbf{V_T = \{v_t : t \text{ у } T\}}$ (чворови-циљеви)
- $\mathbf{V_S = \{w_a : a \text{ у } A^n\}}$ (чворови-решења)
- $\mathbf{V_C = \{c_{t,a} : t \text{ у } T, a \text{ у } A^n\}}$ (конектори)
- $\mathbf{V = V_T \cup V_S \cup V_C}$

Ивице:

- $\mathbf{E1 = \{(v_t, c_{t,a}) : t \text{ у } T, a \text{ у } A^n\}}$
- $\mathbf{E2 = \{(c_{t,a}, w_a) : t \text{ у } T, a \text{ у } A^n\}}$
- **E = E1 ∪ E2**

Релације:

- $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО ако и само ако R(t, a)** важи у проблему P
- $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= ТАЧНО ако и само ако** постоји **a** такво да је $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО**

Лема 7.3.1 (Коректност конструкције $\mathbf{\Phi_{dir}}$).
За дати проблем **P = (T, A, n, R)** и њему придружену мрежу $\mathbf{\Phi_{dir}(P) = (V, E, R)}$ важи:
За свако $\mathbf{t \in T}$, $\mathbf{v_t}$ је потпуна рупа (тј. нема активан пут до чвора-решења) **ако и само ако** не постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да **R(t, ā)** важи.
Еквивалентно**:** $\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа **ако и само ако** постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да **R(t, ā).**

Доказ 1 Леме 7.3.1 (Директна импликација):
(⇒) Претпоставимо да постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да **R(t, ā**) важи у проблему **P**. Дефиниција конструкције $\mathbf{\Phi_{dir}}$**,** показује да је конектор $\mathbf{c_{t,a}}$ додат у скуп чворова $\mathbf{V_C}$. Дефиниција релације $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ постављена је тако да је $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО ако и само ако R(t, ā)** важи. Стога, за овај **ā,** $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО**. По дефиницији ивица, постоји ивица $\mathbf{(v_t, c_{t,a}) \in E1}$ и ивица $\mathbf{(c_{t,a}, w_a) \in E2}$. Дакле, постоји пут дужине **2** од ($\mathbf{v_t}$ до $\mathbf{w_a}$) преко $\mathbf{c_{t,a}}$**.** По дефиницији релације $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$**,** она је **ТАЧНО** ако постоји барем један такав активан пут. Стога $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= ТАЧНО**, што значи да ($\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа (јер потпуна рупа захтева да за свако **ā** важи $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= НЕТАЧНО**).
(⇐) Претпоставимо да $\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа. По дефиницији, то би значило да $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= ТАЧНО**, тј. да постоји бар један $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО**. По дефиницији $\mathbf{R_{akt}}$**,** $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО ако и само ако R(t, ā)** важи у проблему **P**. Дакле, постоји **ā** са **R(t, ā). ■**

Доказ 2 Леме 7.3.1 (Преко контрапозиције):
Претпоставимо да је $\mathbf{v_t}$ потпуна рупа. Тада за свако $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$**,** $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= НЕТАЧНО**. По дефиницији $\mathbf{R_{akt}}$, то значи да за свако **ā** не важи **R(t, ā).** Дакле, не постоји **ā** са **R(t, ā).** Ово је контрапозиција (⇐) смера. Обратно, претпоставимо да не постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да **R(t, ā)** важи. Тада за свако **ā,** $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= НЕТАЧНО**. По дефиницији, то значи да $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= НЕТАЧНО**, па $\mathbf{v_t}$ јесте потпуна рупа. Ово јесте контрапозиција **(⇒)** смера. ■

Доказ 3 Леме 7.3.1 (Преко теорије скупова – независан):
Дефинишимо $\mathbf{S_t = \{ \bar{a} \in A^n : R(t, \bar{a}) \}}$ (скуп решења за **t**). По конструкцији $\mathbf{\Phi_{dir}}$**,** $\mathbf{v_t}$ је потпуна рупа **ако и само ако** $\mathbf{R_{pokr}(v_t)}$ **= НЕТАЧНО**, тј. ако не постоји **ā** са $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО**. Међутим, како знамо да је $\mathbf{R_{akt}(c_{t,a})}$ **= ТАЧНО** $\mathbf{\Leftrightarrow \bar{a} \in S_t}$, то је $\mathbf{v_t}$ потпуна рупа $\mathbf{\Leftrightarrow S_t = \emptyset}$**. P** је тачан за дато **t ако и само ако** $\mathbf{S_t \neq \emptyset}$ (по дефиницији проблема **P**). Дакле: $\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа $\mathbf{\Leftrightarrow S_t \neq \emptyset \Leftrightarrow}$ постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ **са R(t, ā).** Ова еквиваленција је директна последица дефиниције скупова и не ослања се на детаље конструкције мреже осим на везу између $\mathbf{S_t}$ и потпуне рупе. ■

Доказ 2 Теореме 7.3 (Хиперграф репрезентација):
Конструкција 7.3.2: За **P = (T, A, n, R),** дефинишимо хиперграф $\mathbf{H(P) = (V_H, E_H)}$ са:

- $\mathbf{V_H = T,}$

- $\mathbf{E_H = \{ e_{\bar{a}} : \bar{a} \text{ у } A^n \}}$,
- $\mathbf{e_{\bar{a}} = \{ t \text{ у } T : R(t, \bar{a}) \}}$.

Конструкција мреже: $\mathbf{\Phi_{hyp}(P) = (V, E, R)}$ где:

- $\mathbf{V = V_H \cup E_H \cup \{ r \}}$ (**r** је коренски чвор)
- $\mathbf{E = \{ (t, e_{\bar{a}}) : t \text{ у } e_{\bar{a}} \} \cup \{ (e_{\bar{a}}, r) : e_{\bar{a}} \text{ у } E_H \}}$

R: $\mathbf{R_{pokr}(t)}$ = **ТАЧНО ако и само ако** је **степен(t)** ≥ 1. ■

Лема 7.3.2 (Коректност хиперграф конструкције Φ_{hyp})

Нека је **H(P)** хиперграф дефинисан са $\mathbf{V_H = T}$, $\mathbf{E_H = \{ e_{\bar{a}} : \bar{a} \in A^n \}}$, $\mathbf{e_{\bar{a}} = \{ t \in T : R(t, \bar{a}) \}}$ и нека $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ буде мрежа добијена додавањем коренског чвора **r** и ивица $\mathbf{(t, e_{\bar{a}})}$ за свако $\mathbf{t \in e_{\bar{a}}}$ и $\mathbf{(e_{\bar{a}}, r)}$ за свако $\mathbf{e_{\bar{a}} \in E_H}$. Тада је **P** тачан $\mathbf{(\forall t \exists \bar{a}\ R(t, \bar{a}))}$ **ако и само ако** $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ нема потпуних рупа.

Доказ 1 Леме 7.3.2 (Директна импликација – три еквиваленције):

P је тачан ⇔ (по дефиницији тачности) за свако $\mathbf{t \in T}$ постоји $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ такав да **R(t, ā)** важи.

- ⇔ (по дефиницији $\mathbf{e_{\bar{a}}}$) за свако $\mathbf{t \in T}$ постоји $\mathbf{\bar{a}}$ такав да $\mathbf{t \in e_{\bar{a}}}$.
- ⇔ (по дефиницији степена у хиперграфу) за свако $\mathbf{t \in T}$, $\mathbf{deg_H(t) \geq 1}$.
- ⇔ (по конструкцији $\mathbf{\Phi_{hyp}}$ за свако $\mathbf{t \in T}$, постоји ивица $\mathbf{(t, e_{\bar{a}})}$ за неко $\mathbf{e_{\bar{a}}}$ које садржи **t**.
- ⇔ (пошто $\mathbf{(e_{\bar{a}}, r)}$ постоји за свако $\mathbf{e_{\bar{a}}}$) за свако $\mathbf{t \in T}$, постоји пут $\mathbf{t \to e_{\bar{a}} \to r}$.
- ⇔ (по дефиницији потпуне рупе) ни један чвор $\mathbf{v_t}$ није потпуна рупа.
- ⇔ $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ нема потпуних рупа. ■

Доказ 2 Леме 7.3.2 (Преко контрапозиције):

Претпоставимо да $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ има потпуну рупу, тј. постоји $\mathbf{t \in T}$ такав да $\mathbf{v_t}$ јесте потпуна рупа. Према конструкцији $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$, то значи да не постоји хиперивица $\mathbf{e_{\bar{a}}}$ која садржи **t**, јер би у супротном морао постојати пут $\mathbf{t \to e_{\bar{a}} \to r}$. Дакле, за свако $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$, $\mathbf{t \notin e_{\bar{a}}}$. По дефиницији $\mathbf{e_{\bar{a}} = \{ t : R(t, \bar{a}) \}}$, то значи да за свако $\mathbf{\bar{a}}$ не важи **R(t, ā)**. Дакле, **P** није тачан (постоји **t** без решења).

Обратно, претпоставимо да **P** није тачан. Тада постоји $\mathbf{t \in T}$ такав да за свако $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ не важи **R(t, ā)**. По дефиницији $\mathbf{e_{\bar{a}}}$, то значи да $\mathbf{t \notin e_{\bar{a}}}$ **за** свако $\mathbf{\bar{a}}$. У $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$, чвор $\mathbf{v_t}$ нема ниједне ивице (јер су једине ивице које полазе из $\mathbf{v_t}$ оне ка $\mathbf{e_{\bar{a}}}$ за које $\mathbf{t \in e_{\bar{a}}}$). Дакле, $\mathbf{v_t}$ је потпуна рупа, па и $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ има потпуну рупу. ■

Доказ 3 Леме 7.3.2 (Преко теорије графова – независан):

Посматрамо бипартитни граф **B(P)** са једном страном **T** (циљеви) и другом страном $\mathbf{A^n}$ (решења), са ивицом **(t, ā) ако и само ако R(t, ā)** важи. **P** је тачан **ако и само ако** сваки чвор $\mathbf{t \in T}$ има степен ≥ 1 у **B(P).**

Конструкција $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ се од **B(P)** разликује на следећи начин:

Сваки $\mathbf{\bar{a} \in A^n}$ се замењује чвором $\mathbf{e_{\bar{a}}}$.

- Уместо директне ивице **(t, ā),** уводи се пут $\mathbf{t \to e_{\bar{a}} \to r}$, где је **r** нови коренски чвор.
- При томе, **t** има степен ≥ 1 у **B(P) ако и само ако** постоји **ā** са ивицом **(t, ā) ако и само ако** постоји $\mathbf{e_{\bar{a}}}$ са ивицом $\mathbf{(t, e_{\bar{a}})}$ у $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$, а постојање ивице $\mathbf{(t, e_{\bar{a}})}$ еквивалентно је постојању пута $\mathbf{t \to e_{\bar{a}} \to r}$ (јер $\mathbf{(e_{\bar{a}}, r)}$ увек постоји), што значи да **t** није потпуна рупа.

Дакле: **P** јесте тачан ⇔ $\mathbf{\forall t \in T, deg_B(P)(t) \geq 1}$ ⇔ $\mathbf{\forall t \in T}$, **t** има ивицу ка неком $\mathbf{e_{\bar{a}}}$ у $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ ⇔ $\mathbf{\forall t \in T}$, постоји пут $\mathbf{t \to e_{\bar{a}} \to r}$ ⇔ ни један **t** није потпуна рупа ⇔ $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$ нема потпуних рупа. ■

Доказ 3 Теореме 7.3 (Категоријски приступ):

Дефиниција 7.3.3 (Категорије).

- **Prob:** објекти су проблеми **P** у **C**; морфизми $\mathbf{f : P1 \to P2}$ су парови: $\mathbf{(f_T : T1 \to T2, f_A : A1^n \to A2^n)}$ такви да $\mathbf{R1(t,\bar{a}) \Rightarrow R2(f_T(t), f_A(\bar{a}))}$.
- **Net:** објекти су релационе мреже; морфизми су хомоморфизми који чувају релације.

Конструкција 7.3.3 (Функтор). Дефинишемо $\mathbf{\Phi_{cat} : Prob \to Net}$ на објектима као $\mathbf{\Phi_{dir}}$ или $\mathbf{\Phi_{hyp}}$, а на морфизмима:

- За $\mathbf{f : P1 \to P2}$, $\mathbf{\Phi_{cat}(f)}$ мапира $\mathbf{v_t^1 \to v_{f^2_{T(t)}}}$, $\mathbf{w_{\bar{a}}^1 \to w_{f^2_{A(\bar{a})}}}$, итд.

Лема 7.3.3 (Категоријски функтор Φ_{cat}

Нека је **Prob** категорија чији су објекти проблеми **P = (T, A, n, R)** из класе **C**, а морфизми $\mathbf{f: P_1 \to P_2}$ су парови $\mathbf{(f_T : T_1 \to T_2,\ f_A : A_1 \to A_2)}$ такви да $\mathbf{R_1(t, \bar{a}) \Rightarrow R_2(f_T(t),\ f_A(\bar{a}))}$ и нека **Net** буде категорија релационих мрежа са хомоморфизмима који чувају релације.

Функтор $\mathbf{\Phi_{cat}}$**: Prob** $\to$ **Net** дефинисан на тим објектима као $\mathbf{\Phi_{dir}(P)}$ (или $\mathbf{\Phi_{hyp}(P)}$), а на морфизмима природним пресликавањем чворова, јесте пун и веран функтор који чува тачност проблема.

Доказ 1 Леме 7.3.3 (Директан – верност, пуноћа, очување тачности):

Дефиниција функтора: За објекат $\mathbf{P \in Prob}$, нека је $\mathbf{\Phi_{cat}(P) = \Phi_{dir}(P)}$ (она мрежа из Леме 7.3.1). За морфизам $\mathbf{f: P_1 \to P_2}$, дефинишемо $\mathbf{\Phi_{cat}(f)}$ као пресликавање чворова:

- $\mathbf{v_t \in V_{\{T_1\}} \to v_{\{f_{T(t)}\}} \in V_{\{T_2\}}}$
- $\mathbf{w_a \in V_{\{S_1\}} \to w_{\{f_{A(\bar{a})}\}} \in V_{\{S_2\}}}$
- $\mathbf{c_{t,\bar{a}} \in V_{\{C_1\}} \to c_{\{(f_{T(t)}, f_{A(\bar{a})})\}} \in V_{\{C_2\}}}$

Ивице и релације се чувају јер $\mathbf{R_1(t, \bar{a}) \Rightarrow R_2(f_T(t), f_A(\bar{a}))}$ по дефиницији морфизма у **Prob.**

Верност (faithfulness): Ако су $\mathbf{f, g:P_1 \to P_2}$ два различита морфизма, **онда** постоји $\mathbf{t \in T_1}$ или $\mathbf{\bar{a} \in A_1^n}$ за које се разликују $\mathbf{(f_T(t) \neq g_T(t)}$ или $\mathbf{f_A(\bar{a}) \neq g_A(\bar{a}))}$. Тада се и $\mathbf{\Phi_{cat}(f)}$ и $\mathbf{\Phi_{cat}(g)}$ морају разликовати на одговарајућем чвору ($\mathbf{v_t}$ или $\mathbf{w_a}$ или $\mathbf{c_{t,\bar{a}}}$, па су различити. Дакле, $\mathbf{\Phi_{cat}}$ је веран.

Пуноћа (fullness): Нека је $\mathbf{h: \Phi_{cat}(P_1) \to \Phi_{cat}(P_2)}$ хомоморфизам мрежа. А према конструкцији $\mathbf{\Phi_{cat}}$, чворови типа $\mathbf{v_t}$ су једини чворови без долазних ивица (осим корена ако постоји, али у $\mathbf{\Phi_{dir}}$ нема тог корена). Приметимо да у конструкцији $\mathbf{\Phi_{dir}}$, чворови типа $\mathbf{v_t}$ јесу једини чворови без долазних ивица. Чворови типа $\mathbf{w_a}$ имају долазне ивице (од конектора), а чворови типа $\mathbf{c_{t,\bar{a}}}$ имају и долазне и одлазне ивице. Стога хомоморфизам **h**, који чува структуру, мора мапирати $\mathbf{v_t}$ у неки чвор тог истог типа (без долазних ивица). Дакле, **h** мора мапирати $\mathbf{v_t}$ у неки $\mathbf{v_{\{t'\}}}$ (хомоморфизам чува својство„нема долазних ивица"). Дефинишемо $\mathbf{f_T(t) = t'}$. Слично, чворови типа $\mathbf{w_a}$ су једини чворови без одлазних ивица, па **h** мапира $\mathbf{w_a}$ у $\mathbf{w_{\{\bar{a}'\}}}$, па дефинишемо $\mathbf{f_A(\bar{a}) = \bar{a}'}$. Проверава се да $\mathbf{(f_T, f_A)}$ чува релацију **R** (јер **h** чува постојање путева), па је $\mathbf{(f_T, f_A)}$ морфизам у **Prob**. Дакле, сваки овај хомоморфизам долази из неког морфизма, па је $\mathbf{\Phi_{cat}}$ пун.

Очување тачности: Из Леме 7.3.1, **P** је тачан **ако и само ако** $\mathbf{\Phi_{dir}(P)}$ нема потпуних рупа. Како је и $\mathbf{\Phi_{cat}(P) = \Phi_{dir}(P)}$, исти услов важи. Тиме је очување тачности доказано. ■

Доказ 2 Леме 7.3.3 (Преко својстава функтора):

$\mathbf{\Phi_{cat}}$ је дефинисан на генеришућим објектима и морфизмима категорије **Prob.**

Чување идентитета: За сваки објекат **P**, $\mathbf{\Phi_{cat}(id_P)}$ је пресликање које сваки чвор шаље у самог себе, што је идентитет у **Net**.

Чување композиције: Ако $\mathbf{f: P_1 \to P_2}$ и $\mathbf{g: P_2 \to P_3}$, **онда** $\mathbf{\Phi_{cat}(g \circ f)}$ делује на чвор $\mathbf{v_t}$ као:

$$\mathbf{v_{\{(g_T \circ f_T)(t)\}} = v_{\{g_T(f_T(t))\}} = \Phi_{cat}(g)(\Phi_{cat}(f)(v_t)).}$$

Слично за остале типове чворова, па $\mathbf{\Phi_{cat}(g \circ f) = \Phi_{cat}(g) \circ \Phi_{cat}(f)}$.

Инјективност на објектима: Различити проблеми дају различите мреже. **T,A,n,R** кодирају проблем, па је $\mathbf{\Phi_{cat}}$ инјективан на објектима.

Верност и пуноћа: Како је $\mathbf{\Phi_{cat}}$ инјективан на објектима и дефинисан на свим морфизмима, а сваки хомоморфизам долази из јединственог морфизма ($\mathbf{f_T}$ и $\mathbf{f_A}$ могу се реконструисати из слика чворова $\mathbf{v_t}$ и $\mathbf{w_a}$), то је $\mathbf{\Phi_{cat}}$ пун и веран функтор.

Очување тачности: Следи из Леме 7.3.1, јер $\mathbf{\Phi_{cat}(P) = \Phi_{dir}(P)}$. ■

Доказ 3 Леме 7.3.3 (Преко теорије модела – независан од конструкције):

Посматрајмо проблем P као формулу првог реда: $\mathbf{\forall t\ \exists \bar{a}\ R(t, \bar{a})}$. Нека је **M(P)** модел у коме су **T** и **A** интерпретирани (нпр. као скупови у **ZFC**). Конструишимо мрежу **G(P)** на следећи начин:

- Чворови су елементи модела **M(P)** плус додатни чворови за конекторе (као у $\mathbf{\Phi_{dir}}$)
- Ивице и релације се дефинишу на основу истинитости **R(t, ā)** у **M(P)**

- Тада је **P** тачан у **M(P)** (тј. **M(P) ⊨ ∀t ∃ā R(t, ā)**) **ако и само ако G(P**) нема потпуних рупа (по конструкцији сличној Леми 7.3.1).

Сада, $\mathbf{\Phi_{cat}}$ се може посматрати као функтор који пресликава модел **M(P)** у модел мреже **G(P).** Како је очување истинитости формула **(∀t ∃ā R(t, ā))** својство елементарне еквиваленције, а функтор $\mathbf{\Phi_{cat}}$ ту чува структуру (хомоморфизми се пресликавају у хомоморфизме), онда $\mathbf{\Phi_{cat}}$чува тачност проблема.
Независност од конкретне конструкције огледа се у томе да се било која конструкција ($\mathbf{\Phi_{dir}}$, $\mathbf{\Phi_{hyp}}$, ...) може представити као $\mathbf{\Phi_{cat}}$ након одговарајућег избора категорија и модела. ■

7.4 Примери примене конструкција

Пример (Голдбах). P_G = (T = {4,6,8,...}, A = P (прости), **n=2, R(t,(p,q)) ≡ p+q=t). Овај проблем лежи у домену адитивне комбинаторике** [18]. Применом $\mathbf{\Phi_{dir}}$:

- $\mathbf{V_T}$ чвор за сваки паран број ≥ **4**
- $\mathbf{V_S}$: чвор за сваки уређени пар простих **(p,q)**
- $\mathbf{V_C}$: конектор $\mathbf{c_{t,(p,q)}}$ активан ако **p+q=t**

Голдбахова хипотеза је тачна **ако и само ако** нема $\mathbf{v_t}$ без активних конектора.
Пример 2 (Близанци). P_B = (T = N, A = P, n=1, R(n,p) ≡ p и p+2 су прости). Мрежа има рупу за неко **n** ако не постоји прост **p** са том особином.
Пример 3 (SAT проблем). P_{SAT}=(T ={исходи}, A={истинитосне вредности}, n=број променљивих, R(исход, ā) ≡ ā задовољава формулу). Мрежа је без рупа **ако и само ако** је ова формула задовољива.

7.5 Импликације и ограничења

Импликација (Универзалност методе). Теорема 7.3 говори да се сваки проблем из **C** може решити применом **Теорије структурне нужности** на његову мрежну репрезентацију:

- Конструиши **Φ(P),**
- Примени Теорему структурне нужности (Теорема 5.1) на **Φ(P),**
- Ако се докаже да **Φ(P)** задовољава услове, онда нема рупа, па је **P** тачан.

Ограничење 1 (Експоненцијална величина). За коначне **T, A**, величина $\mathbf{\Phi_{dir}(P)}$ је $\mathbf{\Theta(|T| \cdot |A|^n)}$, што експоненцијално расте са **n**. Ово ограничава практичну примену на проблеме мале димензије или оне са специјалном структуром.
Ограничење 2 (Сложеност проверке услова). Провера да ли **Φ(P)** задовољава дате услове **Теореме структурне нужности** може бити некад тежа од оригиналног проблема. Ово није недостатак теорије, већ одраз фундаменталне тежине посматраног проблема.
Запажање (Веза са теоријом сложености). Класа различитих проблема чије мрежне репрезентације задовољавају услове **Теореме структурне нужности** чини класу структурно нужних проблема. Ово је нова класа сложености која може бити упоредива или дисјунктна са **P, NP**, итд [10]

7.6 Закључак секције 7

Теорема универзалног превођења представља теоретски темељ и оправдање читавог овог приступа структурне нужности. Она показује да методологија није специјална техника за одређене проблеме, већ универзалан оквир који обухвата ширу класу математичких и израчунљивих проблема. Кључна интуиција је следећа: Сваки проблем се може видети као питање постојања путање у одговарајућој мрежи. Решити проблем значи показати да мрежа нема „рупа" – чворова до којих не стиже ниједна важећа путања.
У комбинацији са **Теоремом структурне нужности** (Теорема 5.1), **УПТ** даје комплетан алат:
проблем → мрежа → провера услова нужности → одговор.
Овај резултат отвара пут за:

1. Уједињење различитих математичких метода у јединствени оквир,
2. Систематско проучавање класа проблема кроз особине њихових мрежних репрезентација,
3. Развој нових доказаних техника заснованих на мрежној структури.

---

8. ЗАКЉУЧАК: НОВА ПАРАДИГМА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ

8.1 Кључни доприноси овог рада

Овај рад уводи три фундаментална доприноса математичкој науци:

1. **Формализација структурне нужности** кроз теорију релационих мрежа и метрику **N(R),** која квантитативно описује и степен до кога је релација неопходна за одржавање конзистентности мреже.
2. **Универзална применљивост** је доказана Теоремом 5.1: за сваку мрежу **[5]** која достиже јаку критичну сложеност и има релације својстава локалне стабилности и глобалне пропагације, а структурна нужност одговара математичкој нужности.
3. **Моћан алат за решавање проблема** који се манифестује кроз Теорему 6.4 – према којој би се сваки математички проблем могао моделовати у оквиру ове теорије, а пуна успешна примена зависи од испуњености претпоставки за конкретни проблем.

8.2 Импликације по научним областима

Математика:

- Нови метод доказивања: Структурна нужност као алтернатива конструктивним доказима.
- Потенцијал за решавање отворених проблема кроз њихово мапирање на релационе мреже.
- Филозофска редефиниција математичке истине као нужног услова конзистенције структуре.

Компјутерске науке:

Алат за верификацију софтвера кроз анализу мрежа зависности.

- Нови приступ **NP**-комплетним проблемима, а кроз њихово превођење у проблеме структурне нужности [10].
- Могућност доказивања немогућности одређених типова напада у мрежама и дистрибуираним системима.

Физика и друге науке:

- Моделовање физичких система као релационих мрежа и структурном нужношћу као принципом који обједињује различите теорије [11, 16].
- Нови приступ фазним прелазима и критичним појавама кроз концепт критичне сложености **[11]**.
- Примена у економији, социологији и биологији за сложене системе где су ове релације кључне.

8.3 Смернице за будућа истраживања

Теоријска проширења:

- Примена на бесконачно-димензионалне мреже и не-дискретне структуре.
- Интеграција са теоријом категорија за јачу формализацију [1].
- Повезивање са теоријом информације и ентропијом [8].

Практичне примене:

- Развој алгоритма за аутоматско превођење проблема у релационе мреже.
- Примена на вештачку интелигенцију и машинско учење за анализу сложених модела.
- Имплементација у софтверским алатима за верификацију и анализу.

Интердисциплинарни потенцијали:

- Истраживање структурне нужности у физичким законима.
- Примена на економска и социолошка моделирања.
- Развој нових математичких метода заснованих на принципима нужности.

8.3 Резиме кључних резултата

Теорема	Кључно значење	Практична примена
3.3 (Структурна нужност)	Прва формализација концепта да сложеност имплицира нужност	Основа целокупне теорије
5.1 (Универзална примена)	Повезује критичну сложеност са структурном конзистентношћу	Примена на све сложене системе
6.4 (Универзално мрежно моделовање проблема)	Сваки проблем може се моделовати као мрежа	Мост између апстрактних проблема и теорије
7.3 (Универзално превођење - УПТ)	Сваки проблем се може превести у мрежу где је тачност еквивалентна безрупавости	Универзална метода решавања: **проблем → мрежа → примена структурне нужности → решење**

Теорема 7.3 (Универзално превођење - УПТ) заокружује теоријски оквир показујући да:

1. Не постоји проблем који не може да се преведе у одговарајућу мрежну репрезентацију
2. Питање тачности проблема постаје питање постојања/непостојања рупа у мрежи
3. Омогућава јединствену методологију за све проблеме:
   превод → провера структурне нужности → закључак

Ова теорема чини **Теорију структурне нужности потпуно универзалном** - није само као метод за одређене класе проблема, већ управо као **универзалан оквир** за формулацију и решавање било ког математичког проблема типа **∀∃.**

8.5 Коначни закључак

Теорија структурне нужности представља један фундаментални помак у математичкој парадигми - прелазак са конструктивних на структурне доказе. Кроз формализацију таквог концепта да одређена својства постају математички нужна када систем достигне критичну сложеност, ова теорија нуди:

- **Јединствени алат** за доказивање немогућности одређених структуралних нарушења.
- **Унифицирајући принцип** који се може применити на веома широк спектар математичких и научних проблема.
- **Нову епистемологију** где се истинитост тумачи као нужни услов конзистенције, а не само као конструктивна провера.

Као што је рачун револуционисао математику у 17. веку, тако и **Теорија структурне нужности** има потенцијал да револуционише начин на који приступамо сложеним системима у 21. веку, нудећи нам један моћан алат за разумевање и за решавање проблема који су до сада били недоступни класичним методама.

ПРИЛОГ А: ДОДАТНЕ АНАЛОГИЈСКЕ ПОТВРДЕ ТЕОРЕМЕ 3.3

Потврде 1-8 представљају **концептуалне аналогије** из различитих математичких области које само подупиру главни резултат. Оне нуде интуитивну поткрепу показујући и интердисциплинарни домет теорије, али се не сматрају формалним доказима у строгом смислу. Дајемо их у овом прилогу да дамо додатно на значају Теореми 3.3, која је кључна теорема у овом раду.

Потврда 1 (Преко теорије перколације):

Мрежа $\mathcal{G}$ може се посматрати кроз модел перколације на графу. Критична сложеност (Деф. 2.3) али и Лема 3.1 имплицирају да граф ивица постаје суперкритичан – вероватноћа везе $\mathbf{p(n)}$ тежи **1**, што јесте далеко изнад критичног прага перколације $\mathbf{p_c}$**.** Нарушења релације **R** се могу посматрати још као [11] „отклоњене" или „блокиране" везе у овом графу. Услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) даље дефинишу процес перколације на **дуалној мрежи** нарушења. Међутим, за дводимензионалну квадратну решетку, позната теорема о дуалности перколације говори да **ако** је оригинална мрежа суперкритична $\mathbf{(p > p_c)}$**, онда** је њена дуална, а у одређеном смислу и субкритична $\mathbf{(p_{dual} < p_c)}$**.** У субкритичној фази, вероватноћа постојања бесконачног кластера је нула, што значи да нарушења не могу да формирају перколирајући кластер који би обухватио значајан део мреже. Стога, њихова густина мора да тежи нули, што је управо и дефиниција структурне конзистенције (Деф. 2.2).

Потврда 2 (Преко спектралне теорије графова):

Нека је $\mathbf{L_n}$ Лапласијанова матрица графа ивица мреже $\mathcal{G}_\mathbf{n}$. Критична сложеност [7], преко Леме 3.1, имплицира да алгебарска повезаност $\boldsymbol{\lambda_2(L_n)}$ (друга најмања сопствена вредност) тежи максималној могућој вредности, што указује на висок степен повезаности и брзо мешање. Нарушења релације **R** утичу на матрицу суседства $\mathbf{A_n}$, а тиме и на $\mathbf{L_n}$, као локализована адитивна пертурбација $\mathbf{P_n}$ и то са ограниченом нормом по реду/колони (локална стабилност, Деф. 2.4). Глобална пропагација (Дефин. 2.5) би захтевала да ова пертурбација има значајан утицај на ниске фреквенције спектра. Међутим, спектрални јаз $\boldsymbol{\lambda_2(L_n)}$ расте са $\mathbf{n}$ и $\dfrac{\boldsymbol{\lambda^2(L_n)}}{\mathbf{n}}$ остаје строго позитиван и делује као баријера која изолује ефекат пертурбације $\mathbf{P_n}$ на високе фреквенције (локалне промене), спречавајући јој тако да доминира глобалним својствима спектра. Применом матричне пертурбационе анализе (пр. Виландт-Хофманове теореме у варијанти за Лапласијане), показује се да и норма пројекције пертурбације на подпростор који одговара средњим и средњим фреквенцијама тежи нули. Ово директно имплицира да и утицај нарушења на глобалну структуру нестаје, односно да број нарушења по чвору тежи нули.

Потврда 3 (Преко Марковљевих ланаца и ергодичке теорије):

Дефинишимо дискретни временски Марковљев ланац $\{X_t\}$ на задатом простору стања који описују конфигурације мреже $\mathcal{G}_n$ током њеног раста. Прелазак из стања са **k** чворова у стање са **k+1** чворова укључује додавање новог чвора и одређеног броја веза, и то са вероватноћама које одређује функција густине **g(n)** из Деф. 2.3. Нарушења се уводе као „лоша" стања у оквиру овог ланца, а услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) дефинишу прелазне [17] вероватноће ка и од ових лоших стања. Кључно запажање је да критична сложеност осигурава да је ланац **еригодичан** и да његова стационарна расподела π постоји. У стационарној расподели, очекивани број нарушења по чвору, $E_\pi[\mathcal{I}_R(n)/n]$, може се израчунати као функција односа стаза које воде ка лошим стањима и стаза које из њих излазе. Анализом балансних једначина за стационарну расподелу, али коришћењем претпоставки о растућој густини (Лема 3.1), показује се да се стазе излаза из лоших стања (и то услед додавања нових, неблокираних веза) експоненцијално умножавају у поређењу са стазама уласка. Ово доводи до закључка да $E_\pi[\mathcal{I}_R(n)] = o(n)$, а самим тим и да временски просек нарушења конвергира ка нули по ергодичкој теореми, што је еквивалентно структурној конзистенцији.

Потврда 4 (Преко теорије вероватноће и концентрационих неједнакости):

Третирајмо појаву нарушења на сваком потенцијалном месту (чвор, ивица, зависно од дефиниције **R**) као **Бернулијеву случајну променљиву** X_i са параметром $p_i(n)$. Услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) намећу специфичну структуру зависности међу свим овим [1] променљивима и ограничења на њихове параметре. Конкретно, формирају **слабо зависан низ** и то са ограниченим утицајем (bounded influence). Укупно нарушење је $S_n = \Sigma X_i$. Циљ је показати да $P(S_n/n \geq \varepsilon) \to 0$ за свако $\varepsilon > 0$. Користећи овде **Мартингејл Бернштајнове концентрационе неједнакости за зависне низове**, можемо извести горњу границу облика $P(|S_n - E[S_n]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{ct^2}{n\,\psi(n)}\right)$, где $\psi(n)$ полако расте (нпр. као **log n**). Из претпоставки и Леме 3.1, може се показати да $E[S_n] = o(n)$. За $t = \varepsilon n$, горња граница постаје $2\exp\left(-\frac{c\,\varepsilon^2 n}{\psi(n)}\right)$, што тежи нули експоненцијално брзо пошто је $\frac{n}{\psi(n)} \to \infty$. Ово, не само да доказује структурну конзистенцију, доказује и много јачу тврдњу о експоненцијалној брзини конвергенције.

Потврда 5 (Преко теорије информације и ентропије):

Посматрајмо простор свих могућих конфигурација нарушења за мрежу $\mathcal{G}_n$ са ограничењима Деф. 2.4 и Деф. 2.5. Нека је μ_n униформна расподела на овом простору. Ентропија $H(\mu_n) = \log|\Omega_n|$, где је $|\Omega_n|$ број таквих конфигурација. Користећи комбинаторне методе бројања. комбинација леме о упаковању и теорема о коду са ограниченим растојањем, може се и доказати да ентропија по чвору тежи нули: $\lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu_n)}{n} = 0$. То би значило да је број начина на који ова нарушења могу да се [8] организују **субекспоненцијалан** у односу на **n**. Са друге стране, укупан број могућих конфигурација целокупне мреже (укључујући везе) расте експоненцијално са n^2 (односно са бројем потенцијалних веза). Даље, применом **принципа асимптотске равномерности** (из теорије информације и статистичке физике), закључујемо да је мера (у простору свих мрежа) скупа мрежа које имају конфигурацију нарушења из Ω_n занемарљива у асимптотици, јер је експонент њене запремине $(\sim H(\mu_n))$ занемарљив у поређењу са експонентом запремине целог простора $(\sim n^2)$. Ово се мапира на тврдњу о структурној нужности: конфигурације са значајним бројем нарушења су информационо (и мерећи) невероватне, па стога и практично немогуће за мрежу критичне сложености.

Потврда 6 (Алгебарски приступ – преко теорије матричких монговања и спектра):

Конструишимо проширену матрицу суседства $\tilde{A}_n$ која укључује не само ивице већ „тегове" и ознаке које индицирају присуство нарушења на одређеним релацијама. Критична сложеност [3] имплицира да стандардна матрица суседства A_nима спектар који има висок спектрални радијус у поређењу са димензијом, са малим спектралним јазом између највеће и друге највеће сопствене вредности.

Локална стабилност (Деф. 2.4) гарантује да проширење $\tilde{A}_n$ представља пертурбацију ниског ранга или ограничене норме у односу на A_n. Глобална пропагација (Деф. 2.5) би, међутим, захтевала да ова

пертурбација има значајан утицај на сопствене векторе који одговарају средњим фреквенцијама. Применом **теореме о интерлејсингу** (Cauchy's interlacing theorem) и **пертурбационе теорије за спектар симетричних матрица**, показује се да услов критичне сложености (преко густине) спречава да пертурбација услед нарушења значајно помери спектар у смеру који би омогућио одржавање великог броја нарушења. Формално, добија се неједнакост која је облика $\left|\left|\tilde{A}_n - A_n\right|\right|_F \geq c \cdot n$ (где је $\left|\left|\tilde{A}_n - A_n\right|\right|_F$ Фробенијусова норма) која мора да важи ако постоји много нарушења, али која је у контрадикцији са горњом границом за норму пертурбације, границом која и следи из локалне стабилности и чињенице да A_n има висок спектрални радијус. Ова контрадикција доказује тврдњу.

Потврда 7 (Тополошки приступ – преко теорије симплицијалних комплекса и хомологије):
Релациону мрежу $\mathcal{G}$ можемо представити још и као **симплицијални комплекс K**, где чворови чине **0**-симплексе, ивице **1**-симплексе, а виши симплекси могу се дефинисати преко релација **R**. Нарушење релације **R** се тада манифестује као одсуство одређеног симплекса или као „рупа“ у овом комплексу. Услови Деф. 2.4 и Деф. 2.5 преводе се у ограничења на **хомолошке групе** подкомплекса $L \subseteq K$ који садржи ове рупе. Конкретно, локална стабилност ограничава димензију хомологије, а глобална [13] пропагација намеће да **0**-та или **1**-та хомологија подкомплекса **L** морао би имати велики ранг (број генератора). Критична сложеност, међутим, преко Леме 3.1 (посебне повезаности), имплицира да је сам комплекс **K асферичан у ниским димензијама** и да његове Бетијеве бројеве расту мало спорије у поређењу са бројем чворова. Позната веза између хомологије комплекса и подкомплекса (извезена из секвенце Мајер-Виеториса) онда доводи до контрадикције: не може истовремено да важи и да **K** има мале Бетијеве бројеве (услед критичне сложености) и да његов подкомплекс **L** има веома велике Бетијеве бројеве (услед глобалне пропагације). Ова контрадикција решава се једино ако подкомплекс **L** не постоји у асимптотици, тј. ако су нарушења непотпуна.

Потврда 8 (Приступ теорије решетака и конвексне геометрије):
Простор свих могућих конфигурација мреже са **n** чворова може се једноставно представити као тачке у **N**-димензионалном Еуклидовом простору, где је **N** = број потенцијалних веза + додатих параметара за релације. Та структурно конзистентна стања чине **конвексно тело** C_n у овом простору. Критична сложеност, преко Леме 3.1, имплицира да обим (дијаметар) и запремина C_n расту изузетно брзо са **n**. Нарушења релације R дефинишу скуп **хиперравни** H_i које секу C_n. Али услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) преводе се у ограничења на број и распоред постојећих хиперравни, као и на запремине пресека $C_n \cap H_i$. Кључни корак је примена **Теореме Минковског о сукцесивним минимумима** и теореме густине решетака у контексту конвексних тела. Ове теореме дају горњу границу за број тачака решетака (а овде, тачака које представљају могуће конфигурације мреже) које могу да леже у пресеку тела и мноштва хиперравни, у функцији запремине тела а и [12] запремине његовог поларног тела. Показаће се да овај брз раст запремине C_n под условом критичне сложености чини да горња граница за број конфигурација са нарушењима тежи нули и то у односу на укупан број конфигурација. Ово формално доказује да је мере конфигурација са нарушењима асимптотски занемарљиво, тј. да је структурна конзистенција нужна.

ПРИЛОГ Б: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

Овај прилог разматра евентуалне критике рада и нуди припадајуће одговоре. Довољно добре да буду задовољни и најоштрији критичари, бар се томе надамо! Сврха прилога јесу одговори који овде треба да предупреде критике али не само то. Овај прилог користимо и зато да додатно разјаснимо некакве могуће недоумице па тако служи и као продужетак самог рада. Нема само функцију коментарисања.

Критика 1: „Услов **(★′)** у Теореми 3.3 ($\delta(G_n) \geq n - \varepsilon(n)$, $\varepsilon(n) \to 0$) је прејак — тражи да мрежа буде асимптотски скоро комплетна.“

Одговор: Услов **(★′)** јесте довољан, али није и неопходан. За мреже са споријим растом минималног степена (као нпр. $\delta(G_n) \geq c \cdot n$ за $c < 1$), конвергенција може бити спорија — структурна конзистенција следи, али не нужно $I_R(n) = 0$. Ово је предмет даљег истраживања. Напомена: ранија верзија услова **(★)** била је нетачна у доказу, па је замењена тачном верзијом **(★′)**.

Критика 2: „Дефиниција глобалне пропагације (Д. 2.5) претпоставља да и нарушења расту најмање као $\frac{\mathbf{n}}{\log \mathbf{n}}$, што није доказано за све релације."

Одговор: Дефиниција поставља услов који релација мора задовољити да би ова теорема важила. За конкретне примене, овај услов се мора проверити, а за многе природне релације, услов је испуњен.

Критика 3: „Аналогни аргументи (перколација, спектрална теорија, итд.) нису строги докази."

Одговор: Тачно. Они су зато премештени у Прилог А и означени су као неформални. Служе само за интуитивну поткрепу, док главни докази (1, 2 и 3) стоје сами за себе. Зато их и зовемо потврдама. Те потврде, иако нису докази, имају сличну свху а то је да повећају робусност теорије, што они успешно и раде. Рад не би без ових потрда био ништа слабији али са њима је, ипак, бар мало чвршћи.

Критика 4: „Теорема универзалног превођења (7.3) производи мрежу експоненцијалне величине у односу на димензију **n**, што је практично непримењиво."

Одговор: Тачно. Теорема има теоретски значај (она показује да је такво превођење увек могуће), али за практичну примену су потребне ефикасније конструкције за специфичне класе проблема. Ово ће и бити предмет даљег истраживања, што је у раду и напоменуто.

Критика 5: „У Леми 3.1 тврди се да критична сложеност имплицира повезаност, али доказ користи претпоставку $\boldsymbol{\delta(G_n) > \frac{n}{2}}$. То је јачи услов од Дефиниције 2.3."

Одговор: Тачно. Доказ 3 и Доказ 5 Леме 3.1 користе услов $\boldsymbol{\delta(G_n) > \frac{n}{2}}$ (јаке критичне сложености) за доказивање повезаности. За слабу критичну сложеност (Деф. 2.3), повезаност је доказана у Доказу 3 (преко контрадикције) без тог услова, али уз претпоставку да $\boldsymbol{\delta(G_n) \to \infty}$ довољно брзо. У сваком случају, за потребе Теореме 3.3, довољна је јака критична сложеност (Деф. 2.6 или услов (★)).

Критика 6: „Метрика $\mathbf{N(R) = 1 - \lim\sup \frac{I_R(n)}{n}}$ (Д. 4.1) не задовољава све аксиоме метрике (као нпр. неједнакост троугла). Зашто се онда зове „метрика"?"

Одговор: Назив „метрика" овде се користи онако у ширем смислу — као квантитативна мера, не као метрика у смислу растојања. Прецизније би било „мера нужности". Међутим, задржали смо термин „метрика" због аналогије са сличним квантитативним мерама теорије информација и комбинаторици.

Критика 7: „У Теореми 7.3 (Универзално превођење) тврди се да би се сваки проблем типа **∀∃** могао превести у мрежу, али конструкције $\boldsymbol{\Phi_{dir}}$ и $\boldsymbol{\Phi_{hyp}}$ дају мрежу чија величина експоненцијално зависи од **n** (димензије решења). Зар то не чини теорему тривијалном?"

Одговор: Теорема има пре свега теоријски значај — показује да такво превођење увек постоји, што је предуслов за било какву даљу анализу. Експоненцијална величина је цена универзалности. Али за практичну примену, за специфичне класе проблема (нпр. **SAT**, проблеми на графовима), могуће су и ефикасније конструкције, што је напоменуто у Секцији 7.5. Теорема не тврди да је нека конструкција ефикасна, већ само да је могућа.

ЕПИЛОГ

Колико још математичких истина чека да буду препознате као нужни услови постојећих структура? Колико још проблема чека само да буде преформулисано у терминима релационих мрежа? Путујемо полако ка таквој математици где докази нису верификације већ су открића нужних услова постојања. Овај рад, као други рад *Тријаде нужности*, учвршћује нужност као засебну методу која показује све одлике универзлности. Поред математике, очекујемо да буде применљива и у свим другим научним дисциплинама што ћемо наравно детаљније испитати и то прво у математици а онда и неким другим природним и друштвеним наукама. Преостаје још да разрадимо начин примене, што ћемо урадити у последњем раду ове тријаде. Најављени рад је резервисан за комбиновану нужност и за примену ове две које смо досад дефинисали, математичку и структурну.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

[1] Alon, N. & Spencer, J.H. (2016). *The ProbabilisticMethod* (4th edition). John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

[2] Barabási, A.-L. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[3] Bhatia, R. (1997). *Matrix Analysis*. Springer-Verlag, New York, NY.

[4] Bollobás, B. (2001). *Random Graphs* (2nd edition). Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[5] Бошњак, Р. & М. & Д. (2026). *Теорија математичке нужности*. PH-MAT-01-02A-SRB.
- https://doi.org/10.5281/zenodo.19763344

[6] Chang, C.C. & Keisler, H.J. (1990). *Model Theory* (3rd edition). North-Holland, Amsterdam.

[7] Chung, F.R.K. (1997). *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[8] Cover, T.M. & Thomas, J.A. (2006). *Elements of Information Theory* (2nd edition). John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

[9] Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th edition). Springer-Verlag, Berlin.

[10] Garey, M.R. & Johnson, D.S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, San Francisco, CA.

[11] Grimmett, G. (1999). *Percolation* (2nd edition). Springer-Verlag, Berlin.

[12] Gruber, P.M. & Lekkerkerker, C.G. (1987). *Geometry of Numbers* (2nd edition). North-Holland.

[13] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[14] Janson, S., Łuczak, T. & Rucinski, A. (2000). *Random Graphs*. John Wiley & Sons, New York, NY.

[15] Lovász, L. (2012). *Large Networks and Graph Limits*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[16] Newman, M.E.J. (2003). *The Structure and Function of Complex Networks*. SIAM Review, 45(2), 167–256.

[17] Norris, J.R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[18] Tao, T. & Vu, V. (2006). *Additive Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[19] Watts, D.J. & Strogatz, S.H. (1998). *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature, 393(6684), 440–442.

POST SCRIPTUM

Изгледа да смо започели нешто што ће имати озбиљне примене не само у математици већ и у другим наукама. Ако је ова теорија тачна - а докази указују на то да јесте - онда следи да се и сложеност и нужност понашају као две стране истог новчића. Што је мрежа сложенија, то су јача структурна ограничења. Али на граници, када сложеност пређе одређени праг, одређена својства постају не само вероватна, већ математички нужна. Ово отвара пут ка једној новој врсти математичког доказа: доказу немогућности контрапримера без њиховог експлицитног конструксања.

Овај рад, као други део Тријаде нужности, отвара пут ка трећем раду — оном који ће повезати математичку и структурну нужност у јединствену методу. Јер, ако математичка нужност и говори о томе шта мора бити тачно унутар аксиоматског система, док структурна нужност говори о томе шта мора бити тачно унутар мреже релација, онда њихова комбинација отвара могућност да се нужност примени на прелаз између теорије и њене мрежне репрезентације. Тај прелаз није произвољан — он је сам по себи математички нужан јер сваки проблем типа ∀∃ има јединствену мрежну структуру која га кодира. Остаје да се покаже и да се та структура може квантификовати, мерити и комбиновати са другим облицима нужности. То је задатак који нас чека. Ако успемо, нужност више неће бити само философски појам, већ један оперативни алат за решавање проблема који су до сада били недоступни класичним методама. А ако и не успемо, бар ћемо знати где су границе овог приступа — што је и само по себи вредан резултат. Јер, како овај рад показује, и границе су облик нужности.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

---

Нови Сад
17.01.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.19763423
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-02B-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

THEORY OF STRUCTURAL NECESSITY

Structure is not a property of entities, but a relation among them. When a network reaches critical complexity, certain properties become mathematically necessary.

ABSTRACT

This paper introduces a formal Theory of Structural Necessity for relational networks. We define the concept of mathematical necessity as a measure of the impossibility of certain structural violations in complex networks. Through asymptotic analysis of network properties, we further show that when a network reaches a certain level of complexity, the occurrence of certain types of holes or structural deficiencies becomes mathematically impossible. The theory provides a formal apparatus for proving the impossibility of counterexamples in a wide range of mathematical problems. The main results are the Theorem of Structural Consistency and the Metric of Mathematical Necessity.

KEYWORDS: structural necessity, relational networks, mathematical impossibility, asymptotic analysis, graph theory

AMS CLASSIFICATION (2020):

05C80 — Random graphs
05C90 — Applications of graph theory
03B45 — Modal logic (including necessity)
11B75 — Combinatorial number theory
68R10 — Graph theory in computer science

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
17.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"