Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.19763344
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-02A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

ТЕОРИЈА МАТЕМАТИЧКЕ НУЖНОСТИ

Сви универзуми говоре истим језиком — језиком математичке нужности.

АПСТРАКТ
Уводимо формалну **Теорију математичке нужности** (**ТМН**) као фундаментални алат за структурну валидацију теорија у било ком домену знања. Ту кроз аксиоматску теорију дефинишемо критеријуме нужности, конзистентности и универзалне применљивости. **ТМН** служи као, преко потребан, мост између чисте математичке теорије и примењених наука, нудећи јединствену методу верификације независно од емпиријске проверљивости.

КЉУЧНЕ РЕЧИ:
математичка нужност, аксиоматска теорија, универзална валидација, теоријски мост, структурна конзистентност, апстрактна методологија.

AMC КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):
00A35 (Философија математике)
03B42 (Логика нужности и модалности)
03G30 (Категорије, топози, алгебарска логика)
97C70 (Математичке методе у интердисциплинарном истраживањима

1. УВОД: ПОТРЕБА ЗА УНИВЕРЗАЛНИМ КРИТЕРИЈУМОМ
Савремена наука суочава се са фундаменталним изазовом: како валидовати теорије у доменима где је емпиријска верификација онемогућена или непотпуна? Проблем превазилази границе појединачних дисциплина и указује на потребу за заједничким методолошким оквиром. Класични научни метод је заснован на експерименталној проверљивости и показује бројна ограничења у областима као што су теоријска физика високих енергија, математичка економија, правна теорија и философска логика.
У раду уводимо **Принцип математичке нужности (ПМН)** као универзални критеријум структурне валидације теорија. Овај принцип не замењује емпиријски метод тамо где је он применљив, већ даље проширује домен научне валидације на теорије које, по својој природи, не могу бити сасвим валидно директно тестиране посматрањем, експериментом или неким другим егзактним методама.
Основна хипотеза рада јесте да математичка нужност представља заједнички именилац свих научних дисциплина, обезбеђујући критеријум истинитости, потпуно независан од посебног домена примене. Кроз формалну теорију релација, дефинишемо строге критеријуме нужности који омогућавају једну прецизну процену валидности теоријских конструкција.
Комплетна методологија видљивија је кад се погледају сва три рада ове **Тријаде нужности** која се ту међусобно преплићу и истински надопуњују. Овај рад даје математичке основе **Теорије нужности**, а следећи то конкретизује у релационим мрежама. Трећи рад тријаде разрађује практичну примену ове теорије која може бити универзално примењива у свим научним дисциплинама. Не само математици! **GH**, коришћена у овим радовима као релација, названа је по Геделу [9] и Хилберту [11] и преузета је из рада *Гедел-Хилбертов пар и релациона унија* [4], првог рад **GH-тријаде** [4, 5, 6].
Све што овде будемо теоријски дефинисали, сами ћемо и тестирати на планираним серијама радова из математике, физике, хемије, биологије, права, економије и социологије, а могуће још неке научне дисциплине. Наравно, тестирање ће бити могуће тек након што изложимо целу тријаду јер се управо у трећем раду налази конкретно упутство за примену нужности. Једно краће сондирање спроведено у неколико научних дисциплина, показало је изненађујуће добре резултате. Толико добре да су и сами аутори ове методологије били пријатно изненађени. Још да поменемо како се математичка нужност већ користи али је математичари сматрају псеудо-науком, а овај рад јој даје научни легитимитет.

2. МЕТОДОЛОГИЈА

У овом поглављу изложићемо дефиниције, аксиоме и неке основне теореме које представљају увод у **Теорију математичке нужности** са допунском везом на **GH-релације** [4, 5, 6].из којих је изведена.

2.1: Дефиниције и аксиоме GH-релација

Основа **Принципа математичке нужности** лежи у формалној теорији **GH-релација.** Те релације су представљене фундаменталним структуралним односима које карактерише рефлексивна стабилност и комплементарност.

Дефиниција 2.1.0 (GH-релација — преузето из [4]):

GH-релација је уређени пар **(G, H)** формалних система који задовољавају три услова:

(1) **Међусобна финитарна конзистентност: $G \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(H)$** и **$H \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(G)$**

(2) **Индивидуална недоказивост конзистентности: $G \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(G)$** и **$H \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(H)$**

(3) **Неупоредивост: $G \not\subset H$, $H \not\subset G$**, и аксиоматске основе су суштински дисјунктне.

Ознака: **G ✧ H** (чита се: **G** и **H** су у **GH-унији**).

Детаљна анализа својстава **GH-релација** дата је у [4] и [5].

Дефиниција 2.1.1 (GH-релација (апстрактна формулација)):

GH-релација је уређени пар **(G, H)** где **G** и **H** представљају комплементарне структуре. Те структуре задовољавају следеће аксиоме.

Напомена: Дефиниција 2.1.1 је само апстракција својстава из Дефиниције 2.1.0, прилагођена општем контексту релационих мрежа.

Аксиома 2.1.2 (Рефлексивна стабилност):

За сваку **GH-релацију** постоји оператор **R** такав да важи **R(G) = H** и **R(H) = G**, при чему и **R^2** јесте идентички оператор.

Аксиома 2.1.3 (Структурна комплементарност):

Структуре **G** и **H** су међусобно комплементарне у смислу да задовољавају релацију **$G \oplus H = U$**, где U представља универзалну структуру домена, а **⊕** је операција структурне синтезе која задовољава следећа својства: асоцијативност, комутативност, постојање неутралног елемента и идемпотентност (**$G \oplus G = G$** идемпотентност — постулирана је засебно као четврто својство операције **⊕,** поред асоцијативности, комутативности и постојања неутралног елемента).

Аксиома 2.1.4 (Итеративна конзистентност):

За сваку **GH-релацију** и свако **$n \in \mathbb{N}$**, важи да **n**-та итерација структурне трансформације задржава основна својства релације. Формално: **$\forall n \in \mathbb{N}, R^n(G) = H$ и $R^n(H) = G$** за непаран **n**, док за паран **n** важи **$R^n(G) = G$ и $R^n(H) = H$**.

Дефиниција 2.1.5 (Домен знања).

Домен знања **D** је структура **(Ω, R, ⊕, ✧)** где:

1. **Ω** је скуп објеката домена;
2. **R** је инволутивни оператор на **Ω** ($R^2 = I$);
3. **⊕** је бинарна операција структурне синтезе на **Ω** (асоцијативна, комутативна, са неутралним елементом);
4. **✧** је **GH**-релација на **Ω** дефинисана са **X ✧ Y ако и само ако R(X) = Y** и **$X \oplus Y = U$**.

Домен **D задовољава ПМН** ако и само ако његова GH-структура **(Ω, R, ⊕, ✧)** задовољава аксиоме 2.1.2–2.1.4.

2.2 Теорема о јединствености GH-релација

Теорема 2.2 (Јединственост)

Свака **GH-релација** дефинише јединствену структуру која је затворена у односу на операције које су дефинисане аксиомама.

Доказ 1 (Преко итеративне затворености):
Нека је **(G, H) GH-релација.** Из Аксиоме 2.1.4 (Итеративна конзистентност), за свако $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ важи да је $\mathbf{R^n(G) = H}$ ако је **n** непаран, односно $\mathbf{R^n(G) = G}$ ако је **n** паран. **Скуп {G, H}** јесте затворен скуп под применом оператора **R** јер свака примена **R** даје или **G** или **H**. Како су сви елементи такве структуре достижни из **G** применом **R** (за непаран **n** достиже се **H**, за паран **n** враћа се на **G**), цела структура је садржана у **{G, H}.** Претпоставимо да постоји алтернативна структура **(G', H')** која исто задовољава аксиоме. Тада би иста итеративна конструкција дала скуп **{G', H'}. Ако** би $\mathbf{G' \neq G}$, **онда** би постојао најмањи **n** за који се $\mathbf{R^n(G)}$ разликује од $\mathbf{R^n(G')}$, што би значило да **R** нема једнозначно дефинисано дејство, а то је у супротности са Аксиомом 2.1.2 (Рефлексивна стабилност) која захтева да $\mathbf{R^2 = I}$ и да је дејство **R** потпуно одређено. Дакле, **G' = G** и H' = H. ■

Доказ 2 (Преко структурне комплементарности):
Из Аксиоме 2.1.3 (Структурна комплементарност) важи $\mathbf{G \oplus H = U}$, где је **U** универзална структура домена. Операција $\oplus$ је комутативна и асоцијативна (Аксиома 2.1.3). Претпоставићемо да постоји и алтернативни пар **(G', H')** који такође задовољава исту аксиому, тј. $\mathbf{G' \oplus H' = U}$. Тада је $\mathbf{G \oplus H = G' \oplus H'}$. Применимо операцију $\oplus$ са леве стране са **G**. Добијамо $\mathbf{G \oplus (G \oplus H) = G \oplus (G' \oplus H')}$. Због асоцијативности, $\mathbf{(G \oplus G) \oplus H = G \oplus (G' \oplus H')}$. Из Аксиоме 2.1.3, $\mathbf{G \oplus G = G}$ (идемпотентност из постојања неутралног елемента и комутативности). Дакле, $\mathbf{G \oplus H = G \oplus (G' \oplus H')}$. Како је $\mathbf{G \oplus H = U}$, имамо $\mathbf{U = G \oplus (G' \oplus H')}$. Сада применимо операцију $\oplus$ са десне стране са **H'**: $\mathbf{U \oplus H' = G \oplus (G' \oplus H') \oplus H'}$. Због комутативности и асоцијативности, $\mathbf{H' \oplus H' = H'}$, па десна страна постаје $\mathbf{G \oplus G' \oplus H'}$. Лева страна: $\mathbf{U \oplus H' = U}$ јер је **U** неутрални елемент за $\oplus$ (следи из $\mathbf{G \oplus H = U}$ и својстава неутралног елемента). Добијамо $\mathbf{U = G \oplus G' \oplus H'}$. Аналогним поступком се показује да је **G' = G**, одакле следи и **H' = H.** Јединственост је доказана. ■

Доказ 3 (Преко рефлексивне стабилности):
Из Аксиоме 2.1.2 важи $\mathbf{R^2 = I}$, где је **I** идентички оператор. Оператор **R** је бијекција на скупу **{G, H}** јер **R(G) = H** и **R(H) = G,** и **R(R(G)) = G**. Претпоставимо да постоји алтернативни пар **(G', H')** који такође задовољава исту аксиому. Тада је **R'(G') = H'** и **R'(H') = G'**, са $\mathbf{R'^2 = I}$. Посматрајмо даље још и композицију оператора **R** и **R'**. **Ако** би **G'** био различит од **G**, **онда R** и **R'** имају различита дејства на **G**. Међутим из Аксиоме 2.1.4 (Итеративна конзистентност) следи да је дејство **R** на **G** једнозначно одређено самом структуром релације. Стога **R'** мора бити идентично **R** на скупу свих оних елемената достижних из **G**. Како су **G** и **H** једини елементи достижни из **G**, то **G'** мора бити или **G** или **H**. Ако је **G' = H**, онда применом **R** добијамо **H' = R(G') = R(H) = G**, што даје пар **(H, G)** који је исти као **(G, H)** јер је **GH-релација** симетрична по дефиницији. Дакле, алтернативни пар се своди на исти скуп елемената. ■

2.3 Комплетност мреже GH-релација

Дефиниција 2.3: GH-мрежа
GH-мрежа је скуп међусобно повезаних [2, 16] **GH-релација.** Ове релације задовољавају све услове конзистентности на нивоу читаве мреже [4, 5] .

Теорема 2.3 (Комплетност мреже)
Свака **GH-мрежа** формира комплетан систем у односу на операцију структурне синтезе.

Доказ 1 (Преко затворености на генераторе):
Нека је **M GH-мрежа**, тј. скуп **GH-релација** $\mathbf{\{(G_i, H_i)\}}$ **за** $\mathbf{i \in I}$. Из Аксиоме 2.1.3, свака релација ($\mathbf{G_i}$, $\mathbf{H_i}$) задовољава $\mathbf{G_i \oplus H_i = U_i}$, где је $\mathbf{U_i}$ универзална структура свог домена. Посматрајмо скуп свих $\mathbf{G_i}$ и $\mathbf{H_i}$. Применом оператора **R** (Аксиома 2.1.2) на било који $\mathbf{G_i}$ добијамо $\mathbf{H_i}$, и обрнуто. Применом дате операције $\oplus$ на било која два елемента из овог скупа добијамо нове структуре које остају у оквиру те мреже јер $\oplus$ чува својство комплементарности (Аксиома 2.1.3). Сваки елемент **X** мреже може се још изразити као коначна комбинација основних елемената $\{\mathbf{G_i}, \mathbf{H_i}\}$ применом $\oplus$ и **R.** Дакле, $\mathbf{\{G_i, H_i\}}$, је скуп генератора. Комплетност значи да је сваки елемент мреже достижан из генератора.
Претпоставимо супротно: нека постоји елемент **Y** који није достижан. Тада би **Y** могао бити додат мрежи без утицаја на постојеће релације, што значи да мрежа није максимална. Међутим, **GH-мрежа**

је по дефиницији максималан скуп међусобно повезаних **GH-релација** (све релације задовољавају услове конзистентности). Дакле, сваки елемент мора бити достижан. ■

Доказ 2 (Преко теорије решетки):

Посматрајмо **GH-мрежу M** као парцијално уређен скуп где је релација поретка дефинисана са $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ ако и само ако $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$. Ово је добро дефинисано јер је $\oplus$ идемпотентна ($\mathbf{G} \oplus \mathbf{G} = \mathbf{G}$, што следи из постојања неутралног елемента и комутативности у Аксиоми 2.1.3). За свака два елемента $\mathbf{X, Y} \in \mathbf{M}$, њихов супремум је $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ (асоцијативност и комутативност $\oplus$ даље осигуравају да је то најмања горња граница). Сваки подскуп $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{M}$ има супремум који се добија $\oplus$-композицијом свих елемената **S** (асоцијативност $\oplus$ омогућава да редослед није битан). Дакле, **M** јесте комплетна решетка [1]. У тој комплетној решетци, сваки елемент је достижан из генератора применом операције супремума ($\oplus$). Тиме је комплетност мреже доказана. ■

Доказ 3 (Преко носилаца информације):

Нека $\otimes$ означава операцију структурне синтезе дефинисану на исти начин као $\oplus$ (Аксиома 2.1.3), али примењену на носиоце информације.

Свака **GH-релација** ($\mathbf{G_i, H_i}$) дефинише носилац информације $\mathbf{I_i = G_i \otimes H_i}$, где $\otimes$ означава структурну синтезу која чува комплементарност [19]. У мрежи **M,** за свака два носиоца $\mathbf{I_i}$ и $\mathbf{I_j}$ постоји пут $\mathbf{I_i \rightarrow I_j}$, што значи да се информација може преносити између њих. Ово својство следи из саме дефиниције **GH-мреже** као скупа међусобно повезаних релација. Сада претпоставимо да мрежа није комплетна, тј. да постоји структура **X** која задовољава услове **GH-релације** са неким елементом мреже, али **X** није у мрежи. Тада би **X** дефинисао нови носилац информације $\mathbf{I_X = X \otimes R(X)}$. Како **X** има **GH-везу** са неким елементом мреже, постојао би пренос информације између $\mathbf{I_X}$ и постојећих носилаца.

Додавањем $\mathbf{I_X}$ у скуп носилаца, укупна информација система би се повећала, али не би дошло до губитка постојећих преносивих путева. Међутим, **GH-мрежа** је по дефиницији максимална — она садржи све структуре које су у **GH-релацији** са њеним елементима. Стога **X** већ мора бити у мрежи. Дакле, мрежа садржи све структуре достижне путем **GH-релација**, што јесте услов комплетности. ■

---

3. ФОРМАЛНА ДЕФИНИЦИЈА МАТЕМАТИЧКЕ НУЖНОСТИ

На основу теорије **GH-релација** из секције 2, **дефинишемо математичку нужност** као структурно својство теорија које гарантује њихову јединственост и изводљивост у оквиру датих аксиома [9, 12, 14]. Ова дефиниција представља синтезу принципа изведених у друга два рада ове тријаде.

3.1Дефиниција, основни услови и теорема о структурној потпуности

Дефиниција 3.1: Математичка нужност теорије

Теорија T је математички нужна **ако и само ако** задовољава следеће услове:

- **Услов 3.1.1 (Конзистентност):** Теорија **T** не садржи унутрашње контрадикције у односу на **GH- аксиоме** (2.1).
- **Услов 3.1.2 (Јединственост):** Не постоји алтернативна теорија **T′** која задовољава потпуно исте основне постулате, али се разликује од **T**.
- **Услов 3.1.3 (Изводљивост):** Теорија **T** може се у потпуности извести из **GH-релација** кроз коначан низ логичких корака.

Напомена: Појам нужности овде се ослања на модално-логичку традицију [12, 14], али прилагођен структурном контексту **GH-релација**.

Теорема 3.1 (Аналитичка последица нужности). Ако је теорија **T** математички нужна, **онда** је и **T** структурно потпуна у следећем смислу: сваки објекат **O** из домена **T** има коначну деривацију из **GH**-релација, и свака таква деривација је униформна (важи за све објекте истог типа).

Напомена. Ова теорема је **аналитичка** — следи директно из Дефиниције 3.1, или тачније из Услова 3.1.3 (изводљивост). Њена вредност није у откривању новог резултата, већ је у експликацији садржаја дефиниције. Три доказа испод представљају три различита начина да се тај садржај развије.

Доказ 1 (Директно из Услова 3.1.3).:

Нека је **T** математички нужна. По Услову 3.1.3, **T** се може извести из **GH**-релација кроз коначан низ логичких корака. То значи да постоји коначан низ примена оператора **R** и $\oplus$, полазећи од генератора **{G, H}**, који производи **T**. Како је сваки објекат **O** у домену **T** део те теорије, он је достижан истим низом. Униформност следи из тога што је низ исти за све објекте истог типа (јер су сви генерисани истим операторима). Дакле, **T** је структурно потпуна. ■

Доказ 2 (Преко генеративне затворености):
Претпоставимо супротно: нека **T** није структурно потпуна. Тада постоји објекат **O** у домену **T** који нема коначну деривацију из **GH**-релација. Али тада **O** не би могао бити изведен у **T** — што је баш у супротности са Условом 3.1.3. Дакле, **T** је структурно потпуна. ■

Доказ 3 (Преко максималности GH-мреже):
Нека је **M GH**-мрежа која одговара **T**. По Теореми 2.3, **M** је комплетна у односу на $\oplus$. Комплетност значи да је сваки елемент мреже достижан из генератора **{G, H}**. Ако би **T** садржавала објекат који није у **M**, онда **M** не би била максимална — што противречи дефиницији **GH**-мреже. Дакле, **T** јесте структурно потпуна. ■

3.2 Метрика степена математичке нужности и теорема о потпуној нужности

Дефиниција 3.2: Степен математичке нужности
Степен математичке нужности [9, 12, 14] теорије **T** дефинишемо функцијом $\nu : T \to [0,1]$:
$\nu(T) = 1 - |\{T' \neq T \mid T' \vDash AX\}| / |\{\text{укупне теорије}\}|$
где су $|\{\text{укупне теорије}\}| = 10^n$ (нормализовано), а **AX** су основне аксиоме домена (нормализациона константа; видети Прилог А, Критика 2).

Теорема 3.2 (Аналитичка последица нужности за меру ν). Ако је теорија **T** математички нужна, **онда ν(T) = 1**.

Напомена. Као и Теорема 3.1, ово је **аналитичка** последица. **ν(T) = 1** следи директно из Дефиниције 3.2 (метрика) и Услова 3.1.2 (јединственост): ако нема алтернативе, бројилац у Дефиницији 3.2 је **0**, па је **ν(T) = 1**. Три доказа испод експлицирају ову последицу у три различита оквира.

Доказ 1 (Директно из Дефиниција 3.1 и 3.2):
Нека **T** буде математички нужна. Према Услову 3.1.2, не постоји алтернативна теорија $T' \neq T$ која ту задовољава исте основне аксиоме **AX**. Дакле, скуп $\{T' \neq T \mid T' \vDash AX\}$ је празан, његова кардиналност је **0**. По Дефиницији 3.2:
$\nu(T) = 1 - |\{T' \neq T \mid T' \vDash AX\}| / |\{\text{укупне теорије}\}| = 1 - 0 / |\{\text{укупне теорије}\}| = 1.$ ■

Доказ 2 (Преко теорије мере):
Нека **μ** буде мера на простору свих теорија које задовољавају **AX**. Ако је **T** нужна, скуп свих теорија које задовољавају **AX** је синглтон **{T}**. Мера тог скупа је **0** у односу на простор довољне сложености, али то није кључно — кључно је да је број алтернатива **0**. Дакле, **ν(T) = 1 - 0 = 1**. ■

Доказ 3 (Преко контрадикције):
Претпоставимо супротно, да **ν(T) < 1**. Из Дефиниције 3.2 следи да је $|\{T' \neq T \mid T' \vDash AX\}| \geq 1$, дакле постоји бар једна алтернативна теорија $T' \neq T$ која задовољава **AX**. Али то противречи Услову 3.1.2 (јединственост). Дакле, **ν(T) = 1**. ■

---

4. ТЕОРЕМА О УНИВЕРЗАЛНОЈ ПРИМЕНЉИВОСТИ

Кључно својство *Принципа математичке нужности* јесте његова универзална применљивост на све домене знања [2, 16]. Ова секција формално доказује да се **ПМН** може користити и као *мост* између разних научних дисциплина, омогућавајући пренос структурних истина. У овој секцији појам „домен знања" подразумева структуру из Дефиниције 2.1.5. Теорема 4.1 се односи само на оне домене који задовољавају **ПМН.**

4.1 Главна теорема универзалности

Теорема 4.1 (Универзална примена ПМН-а). Свака теорија **T** која задовољава **ПМН** може се **GH**-изоморфно мапирати на сваки домен знања **D** који задовољава **ПМН**.

Доказ 1 (Конструктивни доказ — преко GH-изоморфизма):

Нека је **T** теорија која задовољава Принцип математичке нужности **(ПМН),** тј. задовољава Услове 3.1.1–3.1.3. Нека је **D** произвољан домен знања. Из Дефин. 2.1.0, **GH-релација G ✧ H** подразумева постојање оператора **R** таквог да **R(G) = H** и **R(H) = G** (Аксиома 2.1.2). Конструишемо пресликавање **ϕ: T → D** на следећи начин:

(1) Прво утврдимо **GH-језгро K = {G, H}** које је заједничко свим доменима који задовољавају **ПМН**. Ово језгро постоји јер сваки такав домен садржи структуре које задовољавају аксиоме 2.1.2–2.1.4.

(2) Дефинишемо **ϕ** на елементима језгра: **$\phi(G) = G_D$** и **$\phi(H) = H_D$,** где су **G_D** и **H_D** структуре о домену **D** које задовољавају исте **GH-аксиоме**. Постојање таквих структура у **D** следи из универзалности **ПМН**-а — сваки домен знања који прихвата **ПМН** нужно садржи структуре које испуњавају услове рефлексивне стабилности и комплементарности.

(3) Проширујемо **ϕ** на све елементе **T** индуктивно: за сваки елемент **$X \in T$** који је изведен из језгра применом оператора **R** и **⊕** (што је могуће јер је **T** математички нужна, па је зато изводљива из **GH-релација**-Услов 3.1.3), дефинишемо **ϕ(X)** као резултат примене истих операција на **ϕ(G)** и **ϕ(H)** у **D.**

(4) Проверавамо да **ϕ** чува **GH-релације**: **ако X ✧ Y** у **T**, **онда ϕ(X) ✧ ϕ(Y)** у **D**, јер су оператори **R** и **⊕** очувани конструкцијом.

Тиме смо конструисали **GH-изоморфизам ϕ: T → D.** ■

Доказ 2 (Преко теорије категорија):

Нека је **T** теорија која задовољава **ПМН**. Према теорији категорија [1, 13, 15], формирамо категорију **C_T** чији су објекти сви изводљиви елементи **T**, а морфизми су примене оператора **R** и **⊕** (и њихове композиције). Аналогно томе, за домен **D** формирамо категорију **C_D**. Из Аксиома 2.1.2–2.1.4, обе категорије имају исту структуру: објекти јесу уређени у парове **(G, H)** повезане оператором **R**, а **⊕** делује као бинарни оператор који производи нове објекте.

Из универзалности **ПМН**-а следи да су категорије **C_T** и **C_D** еквивалентне. Конкретно постоји функтор **$F: C_T \to C_D$** који:

- пресликава објекте: **$F(G_T) = G_D$, $F(H_T) = H_D$**
- пресликава морфизме: **$F(R_T) = R_D$, $F(\oplus_T) = \oplus_D$**
- чува композицију: **$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$**

Овај функтор је у ствари **GH-изоморфизам** јер је бијективан на објектима (сваки елемент теорије **T** има своју слику у **D**) и чува релациону структуру. Његово постојање директно доказује да се **T** може мапирати на **D**. ■

Доказ 3 (Преко теорије модела — независан од GH-аксиома):

Нека је **T** теорија која задовољава **ПМН.** Према Теореми 3.1, **T** је структурно потпуна. Теорема 3.2 каже, **ν(T) = 1**. Нека је **D** произвољан домен знања. Посматрајмо скуп аксиома **AX(D)** који дефинишу **D**. По претпоставци теореме, **D** задовољава **ПМН** (Дефиниција 2.1.5), па садржи **GH**-структуру **(G_D, H_D)**. Дакле, **T** и **D** су обе теорије које задовољавају **ПМН.**

Применимо Ловенхајм-Сколемову теорему [10, 18]: постоје модели **M_T** и **M_D** који јесу елементарно еквивалентни и имају исту кардиналност. Како су обе теорије структурно потпуне (Теорема 3.1), сви ови модели су изоморфни. Дакле, постоји изоморфизам **$\psi: M_T \to M_D$**. Ограничење **ψ** на структурно језгро **T** даје **GH**-изоморфизам **ϕ: T → D**. ■

Доказ 4 (Преко носилаца информације):

Свака теорија **T** која задовољава **ПМН** дефинише носилац информације **$I_T = G_T \otimes H_T$** [19]. Слично, сваки домен знања **D** садржи носилац **$I_D = G_D \otimes H_D$** који задовољава исте **GH-аксиоме** (јер се **ПМН** примењује универзално). Из теорије информације [19], два носиоца исте структурне сложености су изоморфна ако имају исту информациону ентропију. Како овде и **T** и **D** задовољавају **ПМН**, њихова информациона ентропија је минимална и једнака (што следи из **ν(T) = 1** и **ν(D) = 1).** Дакле, постоји

бијективно пресликавање између елемената $\mathbf{I_T}$ и $\mathbf{I_D}$ које чува **GH-релације**. Ово пресликавање се проширује на целе теорије **T** и **D** јер су све теорије изводљиве из својих носилаца (Услов 3.1.3). ■
Формално смо доказали да се **ПМН** може користити и као известан *мост* између разних дисциплина, омогућавајући пренос структурних истина.

4.2 Дефиниција и теореме о еквивалентности

Дефиниција 4.2: GH-еквивалентност домена
Домени знања $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ су **GH**-еквивалентни [1, 13, 15] **ако и само ако** постоји бијекција $\mathbf{f:D_1 \to D_2}$ која чува **GH**-релације, тј. за сваке две структуре $\mathbf{X, Y \in D_1}$ важи:
$\mathbf{X \diamond Y}$ у $\mathbf{D_1}$ **ако и само ако** $\mathbf{f(X) \diamond f(Y)}$ у $\mathbf{D_2}$.

Теорема 4.2: GH-еквиваленција је релација еквиваленције
GH-еквиваленција је релација еквиваленције [1, 15] на скупу свих домена знања.
Доказ 1 (Рефлексивност):
Сваки домен **D** је **GH-еквивалентан** самом себи. Нека је $\mathbf{id_D: D \to D}$ идентичка мапа, дефинисана са $\mathbf{id_D(X) = X}$ за свако $\mathbf{X \in D}$. Ова мапа је очигледно бијекција. За произвољне $\mathbf{X, Y \in D,}$ важи $\mathbf{X \diamond Y}$ у **D** ако и само ако $\mathbf{id_D(X) \diamond id_D(Y)}$ у **D**, јер $\mathbf{id_D(X) = X}$ и $\mathbf{id_D(Y) = Y}$. Дакле, $\mathbf{id_D}$ чува **GH-релације.** Тиме је рефлексивност доказана. ■

Доказ 2 (Симетричност):
Нека су $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ **GH-еквивалентни**. Тада постоји **GH-изоморфизам** $\mathbf{f: D_1 \to D_2,}$ тј. бијекција која ту чува **GH-релације.** Дефинишимо $\mathbf{f^{-1}: D_2 \to D_1}$ као инверзну функцију. Како је **f** бијекција и $\mathbf{f^{-1}}$ јесте такође бијекција. Треба показати да $\mathbf{f^{-1}}$ чува **GH-релације**. Нека су $\mathbf{U, V \in D_2}$ произвољни. Постоје $\mathbf{X, Y \in D_1}$ такви да $\mathbf{f(X) = U}$ и $\mathbf{f(Y) = V}$. Тада $\mathbf{U \diamond V}$ у $\mathbf{D_2}$ **ако и само ако** $\mathbf{f(X) \diamond f(Y)}$ у $\mathbf{D_2}$**.** Како **f** чува **GH-релације,** $\mathbf{f(X) \diamond f(Y)}$ у $\mathbf{D_2}$ **ако и само ако** $\mathbf{X \diamond Y}$ у $\mathbf{D_1}$**.** Али $\mathbf{X = f^{-1}(U)}$ и $\mathbf{Y = f^{-1}(V),}$ па $\mathbf{X \diamond Y}$ у D_1 значи $\mathbf{f^{-1}(U) \diamond f^{-1}(V)}$ у $\mathbf{D_1}$**.** Дакле, $\mathbf{U \diamond V}$ у $\mathbf{D_2}$ **ако и само ако** $\mathbf{f^{-1}(U) \diamond f^{-1}(V)}$ у $\mathbf{D_1,}$ што доказује да f^{-1} чува **GH-релације**. Тиме је симетричност доказана. ■

Доказ 3 (Транзитивност):
Нека је $\mathbf{D_1}$ **GH-еквивалентан** са $\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_2}$ **GH-еквивалентан** са $\mathbf{D_3}$**.** Тада постоје **GH-изоморфизми** $\mathbf{f: D_1 \to D_2}$ и $\mathbf{g: D_2 \to D_3}$**.** Дефинишимо композицију $\mathbf{h = g \circ f: D_1 \to D_3}$ са $\mathbf{h(X) = g(f(X))}$**.**
Композиција две бијекције је бијекција. Треба показати да **h** чува **GH-релације**. Нека су $\mathbf{X, Y \in D_1}$ произвољни. Тада:
$\mathbf{X \diamond Y}$ **у** $\mathbf{D_1 \Leftrightarrow f(X) \diamond f(Y)}$ у $\mathbf{D_2}$ (јер **f** чува **GH-релације**)
$\mathbf{\Leftrightarrow g(f(X)) \diamond g(f(Y))}$ у $\mathbf{D_3}$ (јер **g** чува **GH-релације**)
$\mathbf{\Leftrightarrow h(X) \diamond h(Y)}$ **у** $\mathbf{D_3}$.
Дакле, **h** чува **GH-релације**, па је **GH-изоморфизам.** Тиме је транзитивност доказана. ■

4.3 Теорема универзалности GH-еквиваленције

Теорема 4.3: Универзалност GH-еквиваленције
Сви домени знања који задовољавају **ПМН** су међусобно **GH**-еквивалентни [1, 13, 15].

Доказ 1 (Директно из Теореме 4.1):
Нека су $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ произвољни домени знања они који задовољавају **Принцип математичке нужности (ПМН).** Према Теореми 4.1, свака теорија **T** која задовољава **ПМН** може се GH-изоморфно мапирати на било који домен знања. Посебно, узмемо за **T** сам домен $\mathbf{D_1}$**.** Тада Теорема 4.1 тврди да егзистира **GH-изоморфизам** $\mathbf{\phi: D_1 \to D_2}$**.** Према Дефиницији 4.2, постојање **GH-изоморфизма** између $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ управо значи да су $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ **GH-еквивалентни**. Како су $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ изабрани произвољно, сви домени који задовољавају **ПМН** су међусобно **GH-еквивалентни**. ■

Доказ 2 (Преко заједничког језгра):
Сваки домен **D** који задовољава **ПМН** садржи **GH-језгро** $\mathbf{K_D = \{G_D, H_D\}}$ које ту задовољава аксиоме 2.1.2–2.1.4. Из Теореме 2.2 (Јединственост) следи да је ово језгро јединствено за дати домен. Али из Универзалности **ПМН**-а (Теорема 4.1) следи да би за било која два домена $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ морала постојати

GH-изоморфизми ψ_1: $K_{\{D_1\}} \to K$ и ψ_2: $K_{\{D_2\}} \to K$, где је **K** универзално **GH-језгро** (изоморфно сваком појединачном језгру). Дакле, композиција $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$: $K_{\{D_1\}} \to K_{\{D_2\}}$ је **GH-изоморфизам** између ових језгара. Како су сами домени D_1 и D_2 изводљиви из својих језгара применом оператора **R** и $\oplus$ (Услов 3.1.3), овај изоморфизам се проширује на цео домен. Дакле, D_1 и D_2 су **GH-еквивалентни.** ■

Доказ 3 (Преко теорије решетки):

Посматрајмо скуп **S = { D | D** задовољава **ПМН }** свих домена који задовољавају **ПМН**. Дефинишимо релацију поретка ≤ на **S** са $D_1 \leq D_2$ **ако и само ако** постоји инјективно **GH-пресликавање** које чува структуру из D_1 у D_2**.** Из својстава **GH-релација** (Аксиоме 2.1.2–2.1.4) и Теореме 4.1, тај парцијални уређај формира решетку [1] у којој је операција супремума дата **GH-унијом**, а операција инфимума **GH-пресеком.** У свакој решетки, сви елементи који су међусобно изоморфни припадају истој класи еквиваленције. Како Теорема 4.1 показује да су сви елементи **S** међусобно изоморфни (сваки се може мапирати на сваки други), то значи да **S** има само једну класу еквиваленције. Дакле, сви домени који задовољавају **ПМН** су међусобно **GH-еквивалентни**. ■

---

5. КРИТЕРИЈУМИ ВАЛИДАЦИЈЕ

За процену да ли теорија задовољава **Принцип математичке нужности**, дефинишемо критеријуме који представљају оперативни оквир за примену теорије у пракси.

5.1 Критеријуми структурне потпуности

Критеријум 5.1 (Структурна потпуност)

Теорија **T** мора бити способна да, у свом домену, генерише све релевантне објекте и релације међу њима [2, 16], искључиво кроз **GH-релације** дефинисане у Секцији 2.

Доказ 1 (Преко деривационе затворености):

Нека је **O** произвољан објекат у домену теорије **T**. Према Критеријуму 5.1, **O** мора имати коначну деривацију из **GH-релација**. То значи да постоји коначан низ примена оператора **R** и $\oplus$ (Аксиоме 2.1.2–2.1.4) који полазећи од генератора **{G, H}** производи **O**. Сваки такав низ јесте доказ у **T** да **O** припада домену. Како је **O** био произвољан, сви објекти у **T** имају такву деривацију. Дакле, **T** је у потпуности изведена из **GH-релација**, што је управо **Услов 3.1.3 (изводљивост)** из Дефиниције 3.1. Овим је показано да Критеријум 5.1 повлачи Услов 3.1.3. Обрнуто, **ако** T задовољава Услов 3.1.3, **онда** сваки објекат има деривацију, па Критеријум 5.1 важи. Дакле, Критеријум 5.1 је еквивалентан Услову 3.1.3. из чега следи да **T** задовољава Услов 3.1.1 ■

Доказ 2 (Преко контрадикције са јединственошћу):

Претпоставимо супротно: да теорија **T** задовољава Критеријум 5.1 (сваки објекат генерисан из **GH-релација**), али да не задовољава Услов 3.1.3 (изводљивост). То би значило да постоји објекат **O** у **T** који нема деривацију из **GH-релација**. Међутим, то је у директној супротности са претпоставком да **T** задовољава Критеријум 5.1. Дакле, претпоставка је немогућа. Овај доказ не користи еквиваленцију већ директну импликацију: Критеријум 5.1 ⇒ Услов 3.1.3. Обрнута импликација (што је Услов 3.1.3 ⇒ Критеријум 5.1) је тривијална: ако сваки објекат има деривацију, онда је генерисан. ■

Доказ 3 (Преко максималности GH-мреже):

Посматрајмо **GH-мрежу M** (Дефиниција 2.3) која одговара теорији **T**. Према Теореми 2.3, **M** и јесте комплетан систем у односу на операцију $\oplus$. Комплетност значи да је сваки елемент мреже достижан из генератора **{G, H}** применом $\oplus$ и **R**. Ако би теорија T садржавала објекат који није генерисан из **GH-релација**, тај објекат не би припадао мрежи **M**, што би значило да **M** није комплетна. Међутим, Теорема 2.3 каже да свака **GH-мрежа** јесте комплетна. Дакле, сваки објекат у **T** мора бити генерисан, па Критеријум 5.1 важи.

Овај доказ се ослања на Теорему 2.3, а не директно на дефиницију изводљивости. ■

Доказ 4 (Генеративна потпуност):

Сваки објекат **O** у домену теорије **T** мора имати коначну деривацију [1, 15] из **GH-релација**, што се постиже применом оператора **R** и $\oplus$ дефинисаних у Аксиомама 2.1.2–2.1.4. Ако би постојао објекат

без такве деривације, тај објекат не би могао бити изведен из **GH-релација**, што би нарушило Услов 3.1.3 (изводљивост). ■

Доказ 5 (Одсуство изгубљених објеката):

Претпоставимо да постоји објекат **O** у домену теорије **T** који се не може генерисати из **GH-**релација. Тада теорија **T' = T ∪ {O}** представља проширење које такође задовољава основне постулате домена. Међутим, **T' ≠ T,** што је у супротности са Условом 3.1.2 (Јединственост). Дакле, сваки објекат мора бити генерисан. ■

Доказ 6 (Затвореност операције ⊕):

Операција ⊕ (Аксиома 2.1.3) осигурава комплетност система јер омогућава комбиновање основних структура. Како **G ⊕ H = U** генерише универзалну структуру домена, онда је сваки елемент домена достижан применом ⊕ на одговарајуће генераторе. ■

Критеријум 5.2 (Конзистентност у односу на GH-аксиоме)

Теорија **T** не сме бити у контрадикцији са основним аксиомама [3, 6, 17] **GH-релација** (2.1.2–2.1.4).

Доказ 1 (Преко инволутивности R):

Аксиома 2.1.2 захтева да **R^2 = I**, тј. да је **R** инволуција. **Ако** теорија **T** задовољава ову аксиому, **онда** за сваки објекат **X** важи **R(R(X)) = X**. Ова особина искључује сваку могућност да **R** има фиксну тачку различиту од **G** и **H** (јер би **R(X) = X** повлачило **R(R(X)) = X**, што је дозвољено само ако **X = G** или **X** = H уз додатне услове). Контрадикција би настала ако би постојао X такав да R(X) није дефинисан или да **R(R(X)) ≠ X.** Дакле, задовољавање Аксиоме 2.1.2 гарантује да нема контрадикција у дејству оператора **R**. ■

Доказ 2 (Преко структурне комплементарности):

Аксиома 2.1.3 захтева да ⊕ буде асоцијативна, комутативна и да има неутрални елемент. Та својства чине **(U, ⊕)** комутативним моноидом. У комутативном моноиду не би могло доћи до контрадикције облика **X ⊕ Y = Z** и **X ⊕ Y = W** са **Z ≠ W**, јер је ⊕ детерминистичка операција. **Ако** теорија **T** таква својства задовољава, онда је свака **⊕-комбинација** једнозначно одређена. Тиме је сасвим искључена могућност контрадикторних резултата при структурној синтези. ■

Доказ 3 (Преко итеративне конзистентности):

Аксиома 2.1.4 захтева да **R^n(G) = H** за непарно **n,** и **R^n(G) = G** за парно **n**. Ово значи да примена **R** не производи циклусе осим основног двоциклуса **(G ↔ H).** Да би дошло и до контрадикције, морао би постојати неки **n** за који би **R^n(G)** истовремено био и **G** и **H**, или неки трећи објекат. Аксиома 2.1.4 то експлицитно забрањује. Дакле, следи да задовољавање ове аксиоме осигурава да нема контрадикција у итеративном понашању **R**. ■

Доказ 4 (Провера рефлексивне стабилности):

Проверавамо да ли теорија **T** задовољава Аксиому 2.1.2: постоји оператор **R** такав да **R^2 = I**. За сваки објекат у **T**, примена **R** двапут враћа оригинални објекат. Ако неки објекат нарушава ово својство, та теорија није конзистентна са **GH-аксиомама.** ■

Критеријум 5.3 (Непостојање алтернативних решења)

Мора се доказати да не постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** која задовољава исте основне услове.

Доказ 1 (Преко детерминистичности GH-генерације):

GH-релације су дефинисане аксиомама 2.1.2–2.1.4. Ове аксиоме су **детерминистичке**: за дати скуп генератора **{G, H},** оператори **R** и ⊕ једнозначно одређују све изводљиве објекте. То значи да је **GH-мрежа** (Дефиниција 2.3) генерисана на јединствен начин. Ако теорија **T** задовољава Критеријум 5.1 (сваки објекат је генерисан из **GH-релација**), онда је **T** у потпуности одређена својим генераторима. Претпоставимо да постоји **T' ≠ T,** која задовољава исте основне услове (исте аксиоме домена). Тада **T'** има исте генераторе **{G, H}** (јер су они дефинисани аксиомама домена). Применом тих идентичних

детерминистичких оператора **R** и $\oplus$**, T'** мора да произведе исти скуп објеката као **T.** Дакле, **T' = T,** а то је контрадикција са **T' ≠ T**. Стога алтернативна теорија не постоји. ■

Доказ 2 (Преко контрадикције са конзистентношћу):

Претпоставимо да постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** и то она која задовољава исте основне услове. Посматрајмо објекат **O** који припада **T** али не припада **T'** (или обрнуто). Такав **O** мора постојати јер су теорије различите. Како обе теорије задовољавају Критеријум 5.1, **O** има деривацију у **T** из **GH-релација**. Међутим, иста деривација, применена у **T'** (која има исте генераторе и исте аксиоме), мора да произведе **O**. То значи да **O ∈ T'**. Контрадикција. Дакле, претпоставка о постојању **T'** води до тога да сваки објекат из **T** припада **T'** и обрнуто, па **T = T'**. Ово је супротно претпоставци **T' ≠ T.** ■

Доказ 3 (Преко јединствености модела):

Нека је **T** теорија која задовољава Критеријуме 5.1 и 5.2. Према Теореми 3.1, теорија **T** је структурно потпуна. Структурна потпуност повлачи да су сви модели **T** изоморфни (категоричност). Сада даље претпоставимо да постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** која задовољава потпуно исте основне услове. Посматрајмо произвољан модел $\mathbf{M_T}$ теорије **T** и произвољан модел $\mathbf{M_{\{T'\}}}$ теорије **T'**. Како **T** и **T'** обе задовољавају исте основне аксиоме, онда су и $\mathbf{M_T}$ и $\mathbf{M_{\{T'\}}}$ модели истог скупа аксиома. Из Ловенхајм-Сколемове теореме [10, 18], постоје елементарно еквивалентни модели. Међутим, из категоричности **T** (Теорема 3.1) следи да је сваки модел **T** изоморфан сваком другом моделу **T,** али то не значи и да су директно модели **T** и **T'** изоморфни. Кључно је: **ако T'** задовољава исте основне аксиоме као и **T, онда** је сваки модел T' такође модел тих аксиома. **Ако T** има јединствени модел (до изоморфизма), **онда** $\mathbf{M_{\{T'\}}}$ мора бити изоморфан $\mathbf{M_T}$**.** Али то би значило да **T'** описује исту структуру као **T**, па би **T'** била еквивалентна **T** (јер обе теорије генеришу исти скуп истинитих исказа о тој структури). Контрадикција са **T' ≠ T**. Дакле, алтернативна теорија не постоји. ■

5.2 Главне теореме валидације

Теорема 5.1: Еквивалентност критеријума и нужности

Теорија која задовољава све три критеријума (5.1, 5.2, 5.3) је математички нужна.

Доказ 1 (Директна импликација):

Нека **T** задовољава Критеријум 5.1. Из Доказа 1 Критеријума 5.1 (Преко деривационе затворености) следи да **T** задовољава Услов 3.1.3 (изводљивост).

Нека **T** задовољава Критеријум 5.2. Из Доказа 1 Критеријума 5.2 (Преко инволутивности **R**), Доказа 2 (Преко структурне комплементарности) и Доказа 3 (Преко итеративне конзистентности) заједно би следило да **T** задовољава Услов 3.1.1 (конзистентност), јер ту задовољавање свих трију **GH-аксиома** (2.1.2–2.1.4) гарантује да нема унутрашњих контрадикција.

Нека **T** задовољава Критеријум 5.3. Из Доказа 1 Критеријума 5.3 (Преко детерминистичности **GH-генерације**) следи да не постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** која задовољава исте основне услове, а то је управо Услов 3.1.2 (јединственост).

Дакле, **T** задовољава све услове Дефиниције 3.1, па је математички нужна. ■

Доказ 2 (Преко структурне комплементарности) и **Доказа 3** (Преко итеративне конзистентности) — заједно — из чега следи да **T** задовољава Услов 3.1.1 (конзистентност), јер задовољавање свих трију **GH-аксиома** (2.1.2–2.1.4) гарантује да нема унутрашњих контрадикција.

Нека **T** задовољава Критеријум 5.3. Из **Доказа 1 Критеријума 5.3** (Преко детерминистичности **GH-генерације**) следи да не постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** која задовољава исте основне услове, а то је управо Услов 3.1.2 (јединственост).

Дакле, T задовољава све услове Дефиниције 3.1, па је математички нужна. ■

Доказ 2 (Преко теорије категорија):

Формирамо категорију **C** чији су објекти теорије које задовољавају Критеријуме 5.1, 5.2 и 5.3.

Морфизми у **C** су **GH-изоморфизми** (Дефиниција 4.2). У тој категорији, постоји терминални објекат **T*** који представља „најопштију" нужну теорију. Свака теорија **T** у **C** има јединствени морфизам **f: T → T*** (јер се све теорије могу мапирати на **T*** кроз **GH-изоморфизам,** према Теореми 4.1). Ово значи

да T има иста структурна својства као **T**. Како **T** задовољава Дефиницију 3.1 (јер је терминални објекат у категорији нужних теорија), то и **T** задовољава Дефиницију 3.1. ■

Доказ 3 (Преко фиксне тачке):

Дефинишимо оператор F на простору теорија на следећи начин: **F(T)** је теорија добијена додавањем свих објеката који се сви могу генерисати из **GH-релација** полазећи од генератора **T**, али уз очување конзистентности. Ако **T** задовољава Критеријум 5.1, онда **T** већ садржи све такве објекте, па је онда и **F(T) ⊆ T.** Ако **T** задовољава Критеријум 5.2, **F(T)** је конзистентна. Ако **T** задовољава Критеријум 5.3, не постоји алтернативна теорија, па **F(T)** не може бити различита од **T**. Дакле, **T = F(T),** тј. **T** је фиксна тачка оператора F. Фиксне тачке **F** су управо теорије које су затворене под **GH-генерацијом**, конзистентне и јединствене — што је управо Дефиниција 3.1. ■

Теорема 5.2: Одлучивост проблема нужности

Провера да ли теорија задовољава критеријуме нужности је одлучив проблем [8, 10] за све коначне домене.

Доказ 1 (Коначна претрага):

За коначне домене, скуп могућих теорија је коначан (скуп објеката је коначан, а скуп релација међу њима коначан). Провера Критеријума 5.1 (сваки објекат има деривацију) захтева претрагу деривација до коначне дубине — што је коначно. Провера Критеријума 5.2 (конзистентност са аксиомама 2.1.2–2.1.4) је коначна провера својстава. Провера Критеријума 5.3 (непостојање алтернатива) захтева пуно упоређивање са свим осталим теоријама у коначном скупу. Све ово је изводљиво у коначном времену. ■

Доказ 2 (Алгоритамски):

Конструишемо алгоритам:

1- Генериши све објекте домена.
2. За сваки објекат, провери да ли има деривацију из GH-релација (Критеријум 5.1). Ако не — одбаци.
3. Провери да ли су аксиоме 2.1.2–2.1.4 задовољене (Критеријум 5.2). Ако нису — одбаци.
4. Провери да ли постоји алтернативна теорија **T' ≠ T** која пролази кораке 1–3. Ако постоји — одбаци.

Алгоритам се зауставља након коначно много корака и даје одговор **ДА/НЕ**. ■

Доказ 3 (Преко сложености):

Нека је **n = |домен|**.

- Провера Критеријума 5.1 захтева **O(n × d)** операција, где је **d** максимална дужина деривације (константа за дату структуру).
- Провера Критеријума 5.2 захтева **O(n)** операција (провера **R^2 = I**, комутативност ⊕, итд.).
- Провера Критеријума 5.3 захтева упоређивање са свим осталим теоријама у домену. У најгорем случају то је **O(2^n)**, јер број подскупова домена експоненцијално расте.

Дакле, укупан број корака је **O(2^n)** у најгорем случају. Проблем је **одлучив** за све коначне домене (Докази 1 и 2), али **није нужно полиномске сложености**.

За домене са **фиксном структуром** (то јест онда кад је број могућих теорија ограничен константом), сложеност је полиномска. У општем случају коначних домена, сложеност је експоненцијална. ■

5.3 Додатни критеријум робусности

Критеријум 5.4 (Робусност на пертурбације)

Теорија **T** мора бити робусна [2, 16] на мале промене у дефиницијама и аксиомама.

Доказ 1 (Преко континуитета нужности):

Нека је **T** математички нужна теорија. Према Теореми 3.2, **ν(T) = 1**. Посматрајмо фамилију теорија **T(ε)** која настаје малом пертурбацијом аксиома или дефиниција **T**, где **ε ∈ [0, $ε_0$)** мери интензитет промене. Функција **ν(T(ε))** је континуална у ε ако су пертурбације довољно мале (јер се и овај скуп

алтернативних теорија мења непрекидно). Како **ν(T(0)) = 1**, континуалност повлачи да за довољно мало ε важи **ν(T(ε)) > 1 − δ** за произвољно мало **δ.** Посебно, за **δ = 0.05, ν(T(ε)) > 0.95**. Вредност **ν(T) > 0.95** значи да је удео алтернативних теорија мањи од **5%,** што је довољно за практичну робусност — мала пертурбација не може произвести значајну алтернативу. Дакле, теорија **T** је робусна на мале промене. ■

Доказ 2 (Преко структурне стабилности):

GH-релације (Аксиоме 2.1.2–2.1.4) поседују својство структурне стабилности [1, 15]: мале промене у параметрима не мењају тополошку структуру система. Конкретно, оператор **R** (инволуција) јесте стабилан на мале пертурбације јер услов $\mathbf{R^2 = I}$ дефинише затворен скуп у простору оператора.

Слично, операција $\oplus$, она која задовољава асоцијативност, комутативност и постојање неутралног елемента дефинише структуру комутативног моноида која је стабилна на мале промене (јер су сва та својства затворена у одговарајућој топологији). Ако теорија **T** задовољава ове аксиоме, онда и њена мала пертурбација **T'** задовољава исте аксиоме (уз могуће безначајно померање граница). Како су Критеријуми 5.1–5.3 изведени из ових аксиома, **T'** ће их такође задовољавати, па ће према Теореми 5.1 бити математички нужна. ■

Доказ 3 (Преко тополошке отпорности):

Посматрајмо простор **X** као простор теорија које задовољавају основне аксиоме домена, опремљен природном топологијом [10, 18], у којој су две теорије близу ако се слажу на великом броју формула. Нека је $\mathbf{N \subseteq X}$ скуп математички нужних теорија. Онда тврдимо да је **N** отворен скуп. Претпоставимо супротно: нека $\mathbf{T \in N}$ није унутрашња тачка. Тада свака околина **T** садржи и теорију **T'** која није нужна. То значи да **T'** не задовољава барем један од Услова 3.1.1–3.1.3. Међутим, Услови 3.1.1 (конзистентност) и 3.1.3 (изводљивост) су затворени услови (ако су задовољени у **T**, задовољени су и у довољно малој околини). Услов 3.1.2 (јединственост) је такође отворен у простору теорија јер ако **T** нема алтернативу, мала пертурбација не може да произведе алтернативу (јер би алтернатива била близу **T**, па би већ постојала). Дакле, свака довољно мала околина **T** садржи само оне теорије које задовољавају све три услове, тј. само нужне теорије. Тиме је **N** отворен, што значи да за сваку нужну теорију **T** постоји **ε**-околина у којој су све теорије нужне. ■

---

6. МЕТРИКА НУЖНОСТИ СА ПРАКТИЧНИМ ПРИМЕРИМА

За квантитативну процену математичке нужности, уводимо формалну метрику нужности чија сврха је да омогући прецизну процену и упоређивање теорија. Апарат представља оперативни део теорије који омогућава практичну примену **ПМН**-а.

6.1 Формална дефиниција метрике нужности

Дефиниција 6.1 (Метрика математичке нужности): Према Дефиницији 3.2, степен математичке нужности теорије **T** је $\mathbf{\nu(T) = 1 - |\{T' \neq T \mid T' \models AX\}| / |\{укупне\ теорије\}|.}$

6.2 Практични критеријум нужности

Практични критеријум нужности изразићемо преко Теореме 6.2, уз коју дајемо три доказа као што смо дали и за остале теореме у радовима.

Теорема 6.2 (Практична нужност)

Ако ν(T) > 0.95, онда теорија **T** може се сматрати практично нужном за научне примене. То значи да је вероватноћа постојања алтернативне теорије мања од **5%.**

Доказ 1 (Статистичка значајност):

Нека је **ν(T) > 0.95**. Из Дефиниције 6.1, $\mathbf{\nu(T) = 1 - |\{T' \neq T \mid T' \models AX\}| / |\{укупне\ теорије\}|.}$ Одавде следи:

$\mathbf{|\{T' \neq T \mid T' \models AX\}| / |\{укупне\ теорије\}| < 1 - 0.95 = 0.05}$

Дакле, удео алтернативних теорија које задовољавају исте основне аксиоме **AX** је мањи од **5%**. Као што знамо, у научној методологији, ниво значајности $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ стандардно се и узима као граница за одбацивање нулте хипотезе [19]. Овде је нулта хипотеза да постоји алтернативна теорија. Како је ту

вероватноћа њеног постојања мања од **5%,** нулта хипотеза се одбацује. Стога се и **T** може сматрати практично нужном, тј. не постоји значајна алтернатива. ■

Доказ 2 (Преко Бајесове вероватноће):

Нека је **Ω** простор свих теорија које задовољавају основне аксиоме **AX**. Претпоставићемо униформну претходну расподелу вероватноће по **Ω,** тј. **P(T) = 1/|Ω|** за сваку теорију **T ∈ Ω**. Нека је, даље, догађај **A = {ν(T) > 0.95}.** Ако **ν(T) > 0.95**, тада из Дефиниције 6.1 следи да је **|{T' ≠ T | T' ⊨ AX}| / |Ω| < 0.05,** тј. број алтернативних теорија је мањи од **0.05|Ω|.** Бајесова апостериорна вероватноћа овде оповргава јединственост **T** (тј. постоји **T' ≠ T)** условљена догађајем **A** је:

$$\bullet\ P(\exists T' \neq T \mid A) = \frac{|\{T' \neq T \mid T' \vDash AX\}|}{|\Omega| < 0.05}$$

Дакле, вероватноћа грешке (да **T** заправо има алтернативу) мања је од **5%** и задовољава стандардни научни критеријум за практичну прихватљивост. ■

Доказ 3 (Преко теорије информације):

Свака теорија **T** носи одређену количину информације о домену који описује. Нека је **H(Ω) = $\log_2$|Ω|** ентропија [19] простора свих теорија које задовољавају **AX** (уз претпоставку равномерне расподеле). Када усвојимо теорију **T**, информациони губитак у односу на комплетан скуп свих могућих теорија износи:

$$\bullet\ I_{loss} = H(\Omega) - H(\{T\}) = \log_2|\Omega| - \log_2 1 = \log_2|\Omega|$$

Међутим, ако постоје алтернативне теорије, оне нису нужно изгубљене — оне су и даље могуће. Али прави информациони губитак услед усвајања **T** је заправо мера неизвесности коју одбацујемо. Кад је **ν(T) > 0.95**, то значи да је **|{T' ≠ T | T' ⊨ AX}| < 0.05|Ω|.** Тада је:

$$\bullet\ I_{loss} = \log_2\left(\frac{|\Omega|}{(|\Omega| - |\{T' \neq T\}|)}\right) < \log_2\left(\frac{1}{0.95}\right) \approx 0.074 \text{ бита}$$

Овај губитак је занемарљив у односу на укупну информацију система. Дакле, усвајање **T** не доводи до значајног губитка информације, што је практично оправдано. ■

6.3 Осетљивост метрике нужности

Дефиниција 6.2: Осетљивост метрике нужности

Осетљивост [2, 16] метрике нужности дефинишемо као брзину промене **ν(T)** у односу на промену скупа аксиома **AX**:

$$\bullet\ S(T) = \left|\frac{\partial \nu(T)}{\partial AX}\right|$$

6.4 Теорема о осетљивости нужних теорија

Теорема 6.3 (Осетљивост нужних теорија)

За нужне теорије, осетљивост **S(T) = 0**.

Доказ 1 (Директно из нужности):

Нека је **T** математички нужна теорија. Према Теореми 3.2**, ν(T) = 1**. Ова вредност не зависи од избора скупа аксиома **AX**, под условом да **AX** задовољава основне постулате домена (јер је **T** нужна, па је и јединствена без обзира на мање варијације у аксиоматизацији). Дакле, **ν(T)** је константна функција на простору аксиома. Извод константне функције је нула: $\frac{\partial \nu(T)}{\partial AX} = 0$.

По Дефиницији 6.2, $S(T) = \left|\frac{\partial \nu(T)}{\partial AX}\right|$**, па S(T) = 0**. ■

Доказ 2 (Преко теорије оптималности):

Посматрајмо функционал **ν(T)** на простору свих теорија, које задовољавају основне аксиоме домена. Нужне теорије су, према Теореми 3.2, глобални максимуми овог функционала **(ν(T) = 1).** У теорији оптимизације [2, 16], у тачки глобалног максимума, сви парцијални изводи (у одговарајућем смислу) морају бити нула, јер би у супротном постојао правац у којем би функција расла.

Стога $\frac{\partial \nu(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{AX}} = \mathbf{0}$, па **S(T) = 0**. ■

Доказ 3 (Преко теорије стабилности):

Критеријум 5.4 (робусност на пертурбације) утврђује да су нужне теорије структурно стабилне: мале промене у дефиницијама и аксиомама не мењају њихов статус. Конкретно, **ако** је **T** нужна, **онда** за сваку довољно малу промену **δAX** скупа аксиома, **ν(T)** остаје **1**. Значи да је **ν(T)** локално константна функција на простору аксиома.

Локална константност повлачи да је извод нула: $\frac{\partial \nu(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{AX}} = \mathbf{0}$, па **S(T) = 0.** ■

Доказ 4 (Преко теорије симетрије):

Нужне теорије, према својој дефиницији (Услов 3.1.2), имају својство јединствености: алтернативна теорија **T'.** која задовољава исте основне постулате, не постоји. Ово својство је инваријантно на све симетријске трансформације скупа аксиома **AX** [1, 15]: **ако** је **T** нужна за **AX**, **онда** је и **T** нужна и за сваки симетријски трансформисани скуп аксиома **σ(AX).** Стога **ν(T)** не зависи од избора **AX** унутар орбите симетрије. Ово значи да је $\frac{\partial \nu(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{AX}} = \mathbf{0}$ у правцима који одговарају симетријама, а како ове симетрије генеришу цео простор аксиома (за нужне теорије), извод је нула у свим правцима. ■

Доказ 5 (Преко теорије инваријантности):

Нека је **T** математички нужна теорија. Према Дефиницији 3.1, **T** је јединствена (Услов 3.1.2), што ће значити да не постоји $\mathbf{T'} \neq \mathbf{T}$ која задовољава исте основне аксиоме **AX**. Та особина не зависи од тога како су ове аксиоме записане, где било која еквивалентна формулација истих постулата води ка истој теорији **T.** Стога је **ν(T)** инваријантна на све мале промене **AX** које не мењају садржину постулата. Инваријантност на мале промене имплицира да је $\frac{\partial \nu(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{AX}} = \mathbf{0}$, па **S(T) = 0**. ■

---

7. ВЕЗА СА ГЕДЕЛ–ХИЛБЕРТОВИМ ПАРОВИМА

Ова секција успоставља формалну везу између две важне теорије: **Теорије математичке нужности** и **Теорије Гедел–Хилбертових парова**. Ова веза показује како **GH-парови** представљају конкретну инстанцу математичке нужности и како се она може применити на ове парове [4, 5, 6].

7.1 Теорема о GH-паровима као инстанци нужности

Теорема 7.1 (GH-парови као инстанца математичке нужности)

Сваки минимални **Гедел–Хилбертов пар (A, B)** [4, 5, 6] увек инстанцира **Принцип математичке нужности:** задовољава Услове 3.1.1 (конзистентност), 3.1.2 (јединственост) и 3.1.3 (изводљивост).

Доказ 1 (Преко својстава GH-пара, уз експлицитну претпоставку конзистентности):

Нека је **(A, B)** минимални Гедел–Хилбертов пар, и нека су **A** и **B** конзистентни (што је претпоставка конструкције из [6]).

Из Дефиниције 2.1.0 (**GH**-релација), важи:

- $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{B})$ и $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{A})$ (међусобна доказивост конзистентности);
- $\mathbf{A} \nvdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{B} \nvdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{B})$ (индивидуална непотпуност);
- $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \not\subset \mathbf{A}$, аксиоматске основе су суштински дисјунктне (неупоредивост).

Напомена. Из $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{B})$ не следи да је **A** конзистентан — неконзистентан систем доказује све, па и $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{B})$. Конзистентност **A** и **B** је **претпоставка** конструкције, не последица. Услов 3.1.1 се тиме задовољава по претпоставци, а не изводом.

Дакле, **(A, B)** задовољава Услов 3.1.1 под претпоставком конзистентности оба система. ■

Доказ 2 (Преко јединствености релације):

Релација $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ (међусобна доказивост финитарне конзистентности) јесте јединствена за дати пар. Претпоставимо да постоји алтернативни пар **(A', B')** који задовољава исте основне услове (исте оне аксиоме домена). Због минималности **(A, B),** свако слабије појачање води до губитка **GH-својстава**.

Ако би **(A', B')** био различит, **онда** би морао бити или јачи или слабији. **Ако** је јачи, **онда** нарушава услов неупоредивости (јер би један систем садржавао други). **Ако** је слабији, **онда** не може доказати $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$ оног другог. Дакле, алтернатива не постоји. Ова јединственост одговара **Услову 3.1.2**. ■

Доказ 3 (Преко изводљивости из GH-релација):

Минимални **GH-пар (A, B)** је конструисан у [6] као пар $\mathbf{(Q^{+}, G_0)}$ са експлицитним интерпретацијама **I: B → A** и **J: A → B**. Ове интерпретације омогућавају да се свака теорема једног система преведе у теорему другог. Посебно, $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(B)}$ је изведена у **A**, и $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(A)}$ у **B**. Сама теорија **A** (односно **B**) изводи се из **GH-релација** кроз интерпретацију **J** (односно **I**). Дакле, сваки од система је изводљив из **GH-релација** преко интерпретација, што одговара **Услову 3.1.3**. ■

Доказ 4 (Преко категоријске дуалности):

GH-парови формирају категорију у којој су **A** и **B** дуални објекти [1, 13, 15]. Дуалност подразумева постојање морфизама **f: A → B** и **g: B → A** таквих да су композиције идентитети. Ова структура јесте изоморфна **GH-релацији** дефинисаној аксиомама 2.1.2–2.1.4: оператор **R** одговара преласку са **A** на **B,** а $\oplus$ одговара категоријском копроизводу. Како је **(A, B)** минималан, ова категоријска структура је јединствена. Тиме је показано да **GH-пар** инстанцира аксиоме **GH-релација** (Секција 2), као основу за примену Теореме 5.1. ■

Доказ 5 (Преко теорије информације):

Посматрајмо **GH-пар (A, B)** као информациони систем [19]. Међусобна доказивост $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(B)}$ у **A** и $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(A)}$ у **B** ствара информациону петљу. Ентропија таквог система је минимална када је релација симетрична и без сувишних информација. Минимални **GH-пар** управо и постиже тај минимум: свака додатна аксиома у **A** или **B** нарушила би равнотежу. Минимална ентропија ту одговара максималној нужности **(ν = 1)**. Стога **(A, B)** задовољава услове нужности. ■

Доказ 6 (Преко фиксне тачке оператора комплементарности):

Дефинишимо оператор **Φ** на простору парова формалних система: $\mathbf{\Phi(A, B) = (A + Con^{\{fin\}}(B), B + Con^{\{fin\}}(A))}$. **GH-пар** је фиксна тачка овог оператора: **Φ(A, B) = (A, B)** (јер **A** већ садржи $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(B)}$ као теорему, и обрнуто). Ова минималност осигурава да је ова фиксна тачка јединствена за дати ниво сложености. Фиксне тачке оператора **Φ** уштраво и јесу они парови који су затворени под операцијом додавања конзистентности оног другог. Ова затвореност одговара Услову 3.1.3 (изводљивост), док је јединственост садржана у Услову 3.1.2. Конзистентност (Услов 3.1.1) ту следи из Геделове II теореме [9] ($\mathbf{A} \nvdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(A)}$ и $\mathbf{B} \nvdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(B)}$). ■

7.2 Дефиниција GH-релација као нужних структура

Дефиниција 7.2: GH-релације као нужне структуре

GH-релација између система $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$ је математички нужна ако задовољава:

- $\mathbf{\nu(S_1 \to S_2) = 1}$ (потпуна нужност везе $\mathbf{S_1}$ ка $\mathbf{S_2}$)
- $\mathbf{\nu(S_2 \to S_1) = 1}$ (потпуна нужност везе $\mathbf{S_2}$ ка $\mathbf{S_1}$)
- $\mathbf{\nu(S_1) < 1}$ и $\mathbf{\nu(S_2) < 1}$ (појединачни системи нису потпуно нужни)

Дефиниција осигурава да нужност припада релацији, а не појединачним системима. Ово и одговара природи **GH-парова** где релација носи семантичку тежину.

Дефиниција је конзистентна са општим принципима релационе нужности и одговара Дефиницији 3.1 за релационе системе.

7.3 Конструкција минималних GH-парова

Пример 7.3: $\mathbf{Q^{+} \leftrightarrow G_0}$ као нужна структура

Системи $\mathbf{Q^{+}}$ ($\mathbf{I\Delta_0}$ — Робинсонова аритметика са $\mathbf{\Delta_0}$-индукцијом) и $\mathbf{G_0}$ (елементарна геометрија али са аксиомом дискретности и без постулата паралелности) [6] формирају нужну структуру јер:

- $\mathbf{\nu(Q^{+} \to G_0) = 0.99}$ (потпуна нужност везе $\mathbf{Q^{+}}$ ка $\mathbf{G_0}$)
- $\mathbf{\nu(G_0 \to Q^{+}) = 0.99}$ (потпуна нужност везе G_0 ка $\mathbf{Q^{+}}$)
- $\mathbf{\nu(Q^{+}) < 1}$ и $\mathbf{\nu(G_0) < 1}$ (појединачни системи нису потпуно нужни)

Систематска претрага парова [6] показује да ниједан слабији пар не може остварити **GH-релацију**. При томе се мисли на реалне постојеће аксиоматске системе, не мисли се на примитивни **GH-пар.** Свако појачање једног система руши равнотежу, док слабљење онемогућава међусобну валидацију. Доказно-теоријска анализа ових система дата је у [17].
Овим је показано да (Q^+, G_0) представља минимални **GH-пар** који инстанцира Дефиницију 7.2.
*Вредност **0.99** је симболичка – означава да је вероватноћа алтернативе **< 1%,** што је строже од стандардног $\alpha = 0.05$. У граничном смислу, $\nu \to 1$.*

7.4 Теорема о минималности и нужности

Теорема 7.4 (Минималност имплицира нужност)
Ако је (S_1, S_2) минимални **GH-пар**, **онда** је њихова релација математички нужна (која. задовољава Дефиницију 7.2).

Доказ 1 (Преко контрадикције са минималношћу):
Нека је (S_1, S_2) минимални **GH-пар**. Претпоставимо супротно, да њихова релација *није* математички нужна. То значи, према Дефиницији 7.2, да барем један од услова није испуњен:

- $\nu(S_1 \to S_2) < 1$, или
- $\nu(S_2 \to S_1) < 1$, или
- $\nu(S_1) = 1$ или $\nu(S_2) = 1$

Ако $\nu(S_1) = 1$, **онда** би S_1 био потпуно нужан сам за себе, што би значило да не постоји алтернатива, али тада би S_2 био сувишан, па (S_1, S_2) не би био минималан. Ако $\nu(S_1 \to S_2) < 1$, то значи да постоји алтернативна теорија S_1' која задовољава исте услове као S_1 у релацији према S_2. Тада би и пар (S_1', S_2) такође био **GH-пар,** али са мањим ресурсима (јер је $S_1' \neq S_1$), што представља контрадикцију са минималношћу (S_1, S_2). Аналогно за $\nu(S_2 \to S_1) < 1$. Дакле, сви услови Дефиниције 7.2 морају бити испуњени. ■

Доказ 2 (Преко теорије решетки):
GH-парови формирају решетку [1, 15] у којој је релација поретка дефинисана са $(S_1, S_2) \leq (T_1, T_2)$ ако $S_1 \subseteq T_1$ и $S_2 \subseteq T_2$ (тј. један пар је мањи ако су његови системи подтеорије другог пара).
Минимални **GH-пар** је, по дефиницији, минимални елемент у овој решетки. У решетки, минимални елементи имају својство да су јединствени у свом нивоу сложености: не постоји други елемент који је строго мањи. Ова јединственост је управо услов $\nu(S_1 \to S_2) = 1$ и $\nu(S_2 \to S_1) = 1$ (јер алтернативна релација би представљала други елемент у решетки). Такође, $\nu(S_1) < 1$ и $\nu(S_2) < 1$ следи из тога да су S_1 и S_2 појединачно непотпуни (Гедел), што је неопходан услов за **GH-пар**. Дакле, минимални **GH-пар** задовољава Дефиницију 7.2. ■

Доказ 3 (Преко теорије информације):
Нека је (S_1, S_2) минимални **GH-пар**. Према Дефиницији 2.1.0, $S_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(S_2)$ и $S_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(S_1)$. Ова међусобна доказивост ствара информациону петљу. Ентропија [19] оваквог система је $H = H(S_1) + H(S_2) - I(S_1; S_2)$, где је $I(S_1; S_2)$ међусобна информација. Минималност значи да се ентропија не може даље смањити без губљења **GH-својстава**. Када је ентропија минимална, онда је и међусобна информација $I(S_1; S_2)$ максимална, што значи да сваки систем носи максималну информацију о оном другом. Ово одговара условима $\nu(S_1 \to S_2) = 1$ и $\nu(S_2 \to S_1) = 1$ (јер би свака алтернатива значила да информација није потпуна). Такође, $\nu(S_1) < 1$ и $\nu(S_2) < 1$ следи из тога да појединачни системи нису потпуно детерминисани (Гедел). Дакле, минимални **GH-пар** задовољава Дефиницију 7.2. ■

---

8. ЗАКЉУЧАК: МАТЕМАТИКА КАО УНИВЕРЗАЛНИ МОСТ

Принцип математичке нужности представља снажан алат за уједињење свих методолошких основа различитих научних дисциплина [2, 16]. Кроз формалну теорију **GH-релација**, овај принцип нуди сасвим јединствен критеријум валидације теорија, који представља мост између чисте и примењене математике, и могућност верификације теорија ван домена емпиријске проверљивости.
Ово је први рад тријаде коју би могли назвати *Тријада нужности* у којој је и разрађена методологија нужности. Дакле следе још два рада на тему нужности.

ПРИЛОГ А: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

Овај прилог резервисан је за неке евентуалне критике рада и саме математичке нужности као појма и његове могуће везе са другим научним дисциплинама. На те критике дајемо и припадајуће одговоре. Основна сврха прилога је да допуни нека објашњења која у раду можда нису била довољно детаљна па могу довести читаоца у недоумицу. Зато у све теоријске радове додајемо овакву врсту прилога да би додатно разјаснили неке елементе рада које би читалац можда могао погрешно схватити. Наравно да није искључена ни могућност стварне критике, тако да прилог служи и ономе што његов наслов говори али му то није примарна сврха.

Критика 1: „Појам *математичке нужности* није прецизно дефинисан у стандардној математичкој литератури.“

Одговор: Рад уводи нови појам кроз формалну Дефиницију 3.1, засновану на три оперативна услова: конзистентност, јединственост и изводљивост из **GH-релација**. Ова дефиниција јесте у потпуности формализована и омогућава проверу у конкретним случајевима, као што је пример $(\mathbf{Q^+, G_0})$ у 7.3.

Критика 2: „Метрика $\boldsymbol{\nu(T) = 1 - |\{T' \neq T\}|/|\{\text{укупне теорије}\}|}$ претпоставља коначан број теорија, што у општем случају није испуњено.“

Одговор: Дефиниција 6.1 користи нормализацију $\mathbf{10^n}$ као симболички запис који показује да $\boldsymbol{\nu(T) \to 1}$ када алтернативе не постоје. У пракси, $\boldsymbol{\nu(T)}$ се не рачуна директно, већ се користе критеријуми из Секције 5 који су оперативно примењиви. За коначне домене, $\boldsymbol{\nu(T)}$ је добро дефинисано; бесконачне, ради се о граничној вредности.

Критика 3: „GH-релације из Секције 2 (аксиоме 2.1.2–2.1.4) делују произвољно. Зашто узети баш те аксиоме?“

Одговор: Изабране аксиоме су далеко од произвољних! Оне су апстракција својстава експлицитно реализованих у **Гедел-Хилбертовим паровима** формалних система [4, 5, 6]. Конкретно, оператор **R** одговара преласку између комплементарних система, $\oplus$ одговара структурној синтези, а итеративна конзистентност одражава чињеницу да примена **R** мења улоге система. Детаљна оправданост дата је кроз Теорему 7.1, где се показује да минимални **GH-парови** задовољавају ове аксиоме.

Критика 4: „Рад користи појмове из теорије категорија, теорије модела, теорије информације на неки начин који није у потпуности формализован.“

Одговор: Свака од ових теорија коришћена је на нивоу стандардних референци [1, 10, 14, 18, 19]. Докази који се позивају на њих (нпр. Теорема 4.1, доказ 2; Теорема 4.3, доказ 3) само показују да се принцип математичке нужности може изразити у тим оквирима, али ови докази не захтевају дубоку формализацију. Главни докази ослањају се на аксиоме и теореме изведене унутар самог рада.

Критика 5: У Примеру 7.3 вредности $\boldsymbol{\nu = 0.99}$ делују произвољно.

Одговор*:* Вредност је симболичка — у [6] је доказано да је $(\mathbf{Q^+, G_0})$ минимални **GH-пар**, па је $\boldsymbol{|\{T' \neq T\}| = 0}$ и $\boldsymbol{\nu = 1}$. Вредност **0.99** означава да је вероватноћа алтернативе **< 1%,** строже од стандардног $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$.

Критика 6: „Рад тврди универзалну применљивост (Теорема 4.1), али не даје конкретне примере ван математике.“

Одговор: Примена на друге начне дисциплине биће обрађена у посебним радовима који следе. Овај рад даје теоријски оквир; практичне примене су предмет наредних публикација.

Критика 7: „Рад користи појам **GH-изоморфизам** (Дефиниција 4.2) иако га нигде експлицитно није дефинисао као посебан појам — само описно у доказима.“

Одговор: GH-изоморфизам је бијекција која чува **GH-релације**. Његова дефиниција је имплицитно дата у Дефиницији 4.2: домени $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ су **GH-еквивалентни** ако постоји бијекција $\mathbf{f: D_1 \to D_2}$ таква да $\mathbf{X \diamond Y}$ у $\mathbf{D_1}$ **ако и само ако** $\mathbf{f(X) \diamond f(Y)}$ у $\mathbf{D_2}$**.** Свака таква бијекција јесте **GH-изоморфизам**.

Експлицитна дефиниција није уведена засебно јер је довољно јасна из контекста, а њено својство је детаљно обрађено кроз доказе рефлексивности, симетричности и транзитивности у Теореми 4.2.

ПРИЛОГ Б: СКИЦЕ АЛТЕРНАТИВНИХ ДОКАЗА

У овом прилогу дајемо скице алтернативних доказа, с тим што треба имати у виду да се приложени докази не сматрају правим доказима већ само њиховом интуитивном поткрепом. То што носе назив „доказ“ не треба да збуни јер му другачији назив не би приличио из разлога што би се сваки од њих заиста могао развити у онај прави доказ ако би се за то указала потреба. Ипак, знамо да се та потреба неће указати у овом раду јер би то значило да су сви докази неке теореме погрешни што није реална опција, па тако можемо очекивати да се неко упусти у доказивање из ових слица ради радозналости.

Б.1 Скице алтернативних доказа Теореме 3.2

Доказ 1 (Преко тополошке густине):

Простор теорија је компактан [10, 18]. **Ако** теорија **T** није јединствена, **онда** мора постојати отворена околина алтернативних теорија, што је у супротности са нужношћу.

Б.2 Скице алтернативних доказа Теореме 4.1

Доказ 1 (Преко теорије типова):

Дефинишемо систем типова [1] за **T** и **D**. **ПМН** обезбеђује пресликавање типова $\boldsymbol{\tau}$**:Type(T)→Type(D)** које чува релациону структуру и осигурава конзистентност нужности.

Доказ 2 (Преко теорије инваријанти):

Сваки домен **D** има универзалне инваријанте [1, 15] $\mathbf{I_D}$**.** Конструишемо онда и мапу $\boldsymbol{\phi(t)=f(I_D(t))}$ где **f** осигурава очување **GH**-структуре и нужности.

Доказ 3 (Преко теорије рефлексивних језгара):

Сваки домен **D** садржи рефлексивно језгро [1, 13] $\mathbf{K_D}$ изоморфно **GH**-структури. Следи мапа $\boldsymbol{\phi}$ која се дефинише као проширење изоморфизма $\boldsymbol{\psi:T\rightarrow K_D}$ на читав домен **D**.

Б.3 Скице алтернативних доказа Критеријума 5.3

Доказ 1 (Егзистенцијална проверка):

Систематска претрага простора теорија које задовољавају исте основне постулате. Коришћење ових алгоритма за генерисање кандидата и доказ да ниједан овај кандидат не задовољава све критеријуме нужности.

Доказ 2 (Коришћење теорије модела):

Коришћење теореме јединствености из теорије модела [10, 18]. Показивање да су сви модели теорије **T** изоморфни елиминише простор за алтернативне теорије.

Б.4 Скице алтернативних доказа Теореме 6.2

Доказ 1 (Преко теорије игара):

Стратегија усвајања **T** има очекивану добит **> 95%** као максимално могућу, што је високо ефикасна стратегија.

Б.5 Скице алтернативних доказа Теореме 7.4

Доказ 1 (Преко теорије оптималности):

Минимални **GH-парови** су глобални оптимуми функције сложености. У оптималности, нужност је максимална.

Доказ 2 (Преко теорије симетрије):

Минималност осигурава максималну симетрију у релацији, која одговара нужности.

Доказ 3 (Преко теорије инваријанти):

Минимални парови имају јединствене инваријанте. Јединственост инваријанти одговара нужности.

ЕПИЛОГ

Када математичка нужност, у смислу Дефиниције 3.1, достигне свој максимум, сусрећемо се не само са пуком вероватноћом већ са структурном нужношћу. Нису у питању само прорачуни — то су мапе нужности, мапе које нам показују пут ка дубљем разумевању структуре теорија. Када смо започели овај истраживачки пут, били смо руковођени уверењем да математичке структуре нису произвољне конструкције, већ да одређени системи носе сами у себи својство јединствености и конзистентности које их чини изузетним. Резултати *Тријаде нужности*, коју овај рад започиње, не само да потврђују ову хипотезу већ је уздижу на ниво формалне теорије. То нам говори да истине које откривамо нису произвољне творевине, већ структурни услови које смо препознали и формализовали. Математика, у новоствореном оквиру, није само језик којим описујемо универзум — она открива нужне односе који претходе сваком опису. Зато ова тријада представља почетак неког новог пута који ко зна куда води.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

[1] **Awodey, S.** (2010). *Category Theory*. 2nd edition. Oxford University Press.

[2] **Barabási, A.-L. & Albert, R.** (1999). *Emergence of Scaling in Random Networks.* Science 286(5439), 509-512.

[3] **Беклемишев, Л. Д.** (2005). *Рефлексивные принципы и алгебры доказуемости в формальной арифметике*. Успехи математических наук, 60(2), 3–78.

[4] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Гедел-Хилбертов пар и релациона унија.* PH-MAT-01-01A-SRB

[5] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Конструктивни Гедел-Хилбертови парови.* PH-MAT-01-01B-SRB • https://doi.org/10.5281/zenodo.19762864 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763178

[6] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Конструкција Гедел-Хилбертовог пара,* PH-MAT-01-01C-SRB • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763224

[7] **Feferman, S.** (1960). *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* Fundamenta Mathematicae; 49(1), 35–92.

[8] **Gentzen, G.** (1936). *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Mathematische Annalen.

[9] **Gödel, K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I Monatshefte für Mathematik und Physik.

[10] **Henkin, L.** (1949). *The completeness of the first-order functional calculus*. Journal of Symbolic Logic.

[11] **Hilbert, D.** (1926). *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen.

[12] **Kripke, S.A.** (1963). *Semantical Considerations on Modal Logic*.Acta Philosophica Fennica,16, 83-94

[13] **Lawvere, F.W.** (1969). *Adjointness in Foundations*. Dialectica, 23, 281-296.

[14] **Lewis, D.** (1973). *Counterfactuals*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

[15] **Mac Lane, S.** (1998). *Categories for the Working Mathematician.* 2nd edition. Springer-Verlag, New York.

[16] **Newman, M.E.J.** (2003). *The Structure and Function of Complex Networks.* SIAM Review, 45(2),167-256.

[17] **Rathjen, M.** (2012). *An Overview of Predicative Proof Theory*. In Feferman Festschrift, ed. P. Hájek et al., College Publications.

[18] **Tarski, A.** (1959). *What is elementary geometry*? In L.Henkin, P.Suppes, & A. Tarski (Eds.), The Axiomatic Method. North-Holland.

[19] **Shannon, C.E.** (1948). *A Mathematical Theory of Communication.* Bell System Technical Journal, 27, 379-423 & 623-656.

POST SCRIPTUM:

Овај рад посвећујемо свим истраживачима који су се усудили да верују у моћ чисте мисли — али посебно онима који су, читајући ову тријаду, препознали да истина не тражи присталице, већ храброст да се погледа из свих углова.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Нови Сад
14.01.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.19763344
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-02A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

THEORY OF MATHEMATICAL NECESSITY

All universes speak the same language—
the language of mathematical necessity.

ABSTRACT
We introduce a formal **Theory of Mathematical Necessity (TMN)** as a fundamental tool for the structural validation of theories in any domain of knowledge. Through an axiomatic theory, we define criteria of necessity, consistency, and universal applicability. **TMN** serves as a much-needed bridge between pure mathematical theory and applied sciences, offering a unique method of verification independent of empirical testability.

KEYWORDS:
mathematical necessity, axiomatic theory, universal validation, theoretical bridge, structural consistency, abstract methodology.

AMS CLASSIFICATION (2020):
00A35 (Philosophy of Mathematics)
03B42 (Logic of Necessity and Modality)
03G30 (Categories, Toposes, Algebraic Logic)
97C70 (Mathematical Methods in Interdisciplinary Research)

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
14.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"