Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.19763224
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-01C-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

КОНСТРУКЦИЈА ГЕДЕЛ—ХИЛБЕРТОВОГ ПАРА

Оно што један систем не може сам да докаже, два могу заједно да потврде.

АПСТРАКТ

Овај рад јесте круна претходних радова [2, 3], у којима је дефинисан **Гедел-Хилбертов пар** и дата аксиома рефлексивне конструктивности (**ARC**), а и даље упутство за његову успешну конструкцију.
Конструишемо минимални **Гедел-Хилбертов пар**, два аксиоматска система минималне сложености која међусобно доказују своју конзистентност, а притом појединачно задовољавају Геделове теореме о непотпуности. Напуштајући традиционалне основе које захтевају доста робуснију аритметику, ми показујемо да Робинсонова аритметика (**Q**) [13] проширена $\mathbf{\Delta_0}$-индукцијом и елементарна геометрија јесу довољни да инстанцирају **GH-релацију**. Пар представља и најједноставније познате формалне системе способне за рефлексивну валидацију конзистентности пружајући конструктивну реализацију Хилбертовог програма кроз међусобно правдање уместо само-валидације.
Конструкција даје универзални принцип стабилности применљив не само у математичким већ даље у природним и друштвеним доменима.

Кључне речи: минимална аксиоматика, међусобна конзистентност, Робинсонова аритметика, темељна математика, елементарна геометрија, Гедел-Хилбертови парови

AMS класификација (2020):
03B30 - Основе класичних теорија (укључујући реверзну математику);
03F25 - Релативна конзистентност и интерпретације;
03F40 - Геделово нумерисање и питања непотпуности;
51M05 - Еуклидске геометрије (опште) и генерализације.

1. УВОД: ПОТРАГА ЗА МИНИМАЛНИМ ТЕМЕЉИМА

Хилбертов програм [7, 8], тражио је апсолутну сигурност кроз финитарне доказе конзистентности, а Геделове теореме [4], даље су демонстрирале немогућност само-валидације унутар довољно богатих формалних система. Ипак, тек је **GH-оквир** [2, 3] помирио ове визије кроз међусобну валидацију, дефинишући **GH-пар** кроз **услов симетричне допуштености** (Дефиниција.2.1.1 у [3]) и **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)** у [3]). Конструкција, дата у овом раду, даје, у потпуности, смисао теоретским приказима из претходна два рада [2, 3] и **реализује минималну верзију GH-пара.** Избор пара за експлицитну конструкцију извршен је у претходном раду [3], са свим потребним упутствима по којима, у овом раду, поступамо.
Рад одговара на питање: **Који је минимални аксиоматски базис за GH-парове?** Доказујемо да и неки — изненађујуће скромни системи — слабији од Пеанове аритметике — буду сасвим довољни када су правилно упарени.

2. СПЕЦИФИКАЦИЈА МИНИМАЛНИХ СИСТЕМА

Да бисмо материјализовали апстрактни концепт **GH-пара**, неопходно је дефинисати два формална система чија је доказна снага довољна за аритметизацију синтаксе, али међусобно несводива. У овој секцији спецификујемо систем **A** (**слаба аритметика**) и систем **B** (**елементарна геометрија**), који заједно чине минималну основу за рефлексивну стабилност. Кључни елемент оба система јесу **мост-аксиоме (A9 и B12)**, које директно имплементирају Аксиому рефлексивне конструктивности (**ARC**), омогућавајући системима да *виде* конзистентност свог комплемента.

2.1 Систем A: Слаба аритметика (Q^+)

Робинсонова аритметика **Q** [13] представља минималан аксиоматски систем који је довољан за пуну формализацију елементарне теорије бројева. Проширујемо га Δ_0-индукцијом, добијајући тако систем $Q^+ = I\Delta_0$.

У овом раду, ознака $I\Delta_0$. коришћена је у ширем смислу, као систем добијен проширењем Робинсонове аритметике **Q** Δ_0-индукцијом.

- **Језик:** $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, \times, =\}$ са логиком првог реда
- **Аксиоме:**
  - **Робинсонова аритметика Q** [13]**:**
    - $Sx \neq 0$
    - $Sx = Sy \rightarrow x = y$
    - $x \neq 0 \rightarrow \exists y\,(x = Sy)$
    - $x + 0 = x$
    - $x + Sy = S(x + y)$
    - $x \times 0 = 0$
    - $x \times Sy = (x \times y) + x$
- **Δ_0-индукциона шема**
  - $\forall x[(\varphi(0) \wedge \forall y(\varphi(y) \rightarrow \varphi(Sy))) \rightarrow \forall x\,\varphi(x)]$ за Δ_0 формуле φ
- **Мост (Bridge) аксиома:** $\neg\exists p\, Prf_B(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ [2]
- **Доказно-теоријска снага (Prf-theoretic):** ограничена (у овом раду индикативно означена ординалом ω^2).

2.2 Систем B: Елементарна геометрија (G_0)

Елементарна геометрија, базирана на Хилбертовим аксиомама [7] и аксиоматизацији Тарског [14,15], пружа минималан оквир за геометријско резоновање. Наш систем G_0 користи апсолутну геометрију (без постулата паралелности) са додатком аксиоме дискретности.

Језик: $\mathcal{L}_B = \{P, L, I, B, C\}$ (тачке, праве, инциденција, **Betweenness**, конгруенција)

Аксиоме:

1. **Аксиоме инциденције** (**I1-I3** од Хилберта [7])
2. **Аксиоме Betweenness-а** (**B1-B4** минимални скуп)
3. **Аксиоме конгруенције** (**C1-C6** за сегменте и углове)
4. **Без постулата паралелности** (база апсолутне геометрије)

Аксиома дискретности: $\forall L \exists n \forall P$ ($P \in L \rightarrow P$ је **n**-та тачка на **L**)

Мост (Bridge) аксиома: $Con^{\{fin\}}(A)$ [2, 3]

Изражајна моћ: Може да представи рационалне координате, основне конструкције

2.3 Геделова нумерација и синтакса

Геделова нумерација омогућава да се формуле и докази третирају као природни бројеви, чиме и они постају објекти аритметичког резоновања. Детаљи су дати у прилогу A.

2.4 Експлицитни скупови аксиома

Аксиоме система A(Ax_A) [3]**:**

- **A1:** $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
- **A2:** $\forall x(Sx \neq 0)$
- **A3:** $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y\, x = Sy)$
- **A4:** $\forall x(x + 0 = x)$
- **A5:** $\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y))$
- **A6:** $\forall x(x \times 0 = 0)$
- **A7:** $\forall x \forall y(x \times Sy = (x \times y) + x)$
- **A8:** $\forall x[(\varphi(0) \wedge \forall y(\varphi(y) \rightarrow \varphi(Sy))) \rightarrow \forall x\,\varphi(x)]$ **за Δ_0 формуле φ**
- **A9:** $\neg\exists p\, Prf_B(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ [мост аксиома – имплементација **ARC** принципа из [2, 3]] где је $Con^{\{fin\}}(B)$ дефинисано управо као формула $\neg\exists p\, Prf_B(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$

Аксиоме система B(Ax_B) [3]**:**

- **B1: ∀P∀Q(P ≠ Q → ∃!L(P ∈ L ∧ Q ∈ L))**
- **B2: ∀L∃P∃Q(P ≠ Q ∧ P ∈ L ∧ Q ∈ L)**
- **B3: ∃P∃Q∃R(¬Collinear(P,Q,R))**
- **B4: ∀A∀B∀C(B(A,B,C) → Collinear (A,B,C))**
- **B5: ∀A∀C(A ≠ C → ∃B B(A,B,C))**
- **B6: ∀A∀B∀C(B(A,B,C) → B(C,B,A))**
- **B7: ∀AB(AB ≅ AB)**
- **B8: ∀AB∀CD(AB ≅ CD → CD ≅ AB)**
- **B9: ∀AB∀CD∀EF(AB ≅ CD ∧ CD ≅ EF → AB ≅ EF)**
- **B10: ∀AB∀CD∃E(Between(A,B,E) ∧ BE ≅ CD)**
- **B11: ∀L∃n∀P(P ∈ L → P је n-та тачка на L)** B11 се користи као интерпретативна (не као класична Хилбертовска) аксиома дискретизације. Овде **n** означава конструктивни индекс у дискретној структури, без увођења аритметичке операције у геометријски језик.
- **B12: ¬∃p Prf_A(p, ⌜ 0 = 1 ⌝)** [мост аксиома – симетрична имплементација ARC из [2, 3]] где је **$Con^{\{fin\}}$(A)** дефинисано управо као формула **¬∃p Prf_A(p, ⌜ 0 = 1 ⌝)**

2.5 Предикати доказа

Prf_A(n, φ): „**n** кодира низ формула $ψ_1,...,ψ_k$ где је $ψ_k$ = **φ** и свака $ψ_i$ или аксиома из Ax_A или следи из претходних *Modus Ponens* или *Generalization*".

Prf_B(n, φ): „**n** кодира низ формула $ψ_1,...,ψ_k$ где је $ψ_k$ = **φ** и свака $ψ_i$ је или аксиома из Ax_B или следи из претходних геометријских правила закључивања".

Овај формализам омогућава да се конзистентност другог система изрази унутар сопственог језика

Под s**oundness**-ом (коректношћу) подразумевамо да **ако** систем **T** може доказати формулу **φ**, **онда** је **φ** истинита у свим моделима система **T.**

Len(p): „дужина доказа кодираног бројем **p**, тј. број формула у секвенци коју **p** кодира".

---

3. ПОСТОЈАЊЕ GH-пара

На темељима спецификације из претходне секције, сада формално доказујемо постојање минималног **GH-пара**. Централна **Теорема 3.1** представља конструктивно решење сукоба између оне Хилбертове тежње за конзистентношћу и Геделове деградације само-референце. Кроз четири нивоа доказа — од синтактичке дедукције до модел-теоријске интерпретације — показујемо да упаривање аритметике и геометрије ствара затворен систем међусобне валидације који је структурно стабилан на урушавање изнутра

Теорема 3.1 (Постојање минималног GH-пара) (Конструктивна реализација Дефиниције 2.1.1 из [2])**.** Постоје конзистентни, рекурзивно нумерисани, системи **A** и **B** такви да:

- **A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B)** и **B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A)**
- **A ⊬ $Con^{\{fin\}}$(A)** и **B ⊬ $Con^{\{fin\}}$(B)**

A и **B** су неупоредиви **по доказно-теоријској снази.**

Део 1: Доказ да A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B) и **B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A) (Међусобна конзистентност):**

Доказ 1 (основни):

Системи **A** и **B** су дефинисани тако да у свом аксиомском скупу **експлицитно садрже** све тврдње о конзистентности другог система:

- Систем **A** садржи аксиому **A9: ¬∃p Prf_B(p, ⌜ 0=1 ⌝)** која је управо **$Con^{\{fin\}}$(B)**
- Систем **B** садржи аксиому **B12: ¬∃p Prf_A(p, ⌜ 0=1 ⌝)** која је управо **$Con^{\{fin\}}$(A)**

По дефиницији аксиоматског система, ако је формула **φ** аксиома система, онда тај систем доказује **φ**. Дакле:

- Из **A9 ∈ Ax_A** следи **A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B)** (2. 4 овог рада).
- Из **B12 ∈ Ax_B** следи **B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A)** (2. 4 овог рада). ■

Напомена: Овај доказ користи **синтактичку дефиницију** доказивости. Конструктивна валидација ових аксиома (објашњење да нису произвољне, већ имају смисла) дата је у секцијама 3.4 и 3.5 преко експлицитних интерпретација.

Доказ 2 (преко релативне конзистентности модела):

Нека је $\mathbf{M_A}$ стандардни модел система **A** (природни бројеви **N** са стандардним операцијама сабирања и множења). У $\mathbf{M_A}$ конструишимо модел $\mathbf{M_B}$ за систем **B** на следећи начин:

Тачка у $\mathbf{M_B}$ = уређени пар **(x,y)** где **x,y ∈ N**

Права у $\mathbf{M_B}$ = скуп тачака **(x,y)** које задовољавају $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$ за неке **a,b,c ∈ N**, **gcd(a,b,c) =1**

Инциденција: (x,y) ∈ L ако $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$

Betweenness: B((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)) ако постоји $\mathbf{t \in Q \cap [0,1]}$ такво да $\mathbf{(x_2,y_2) = t(x_1,y_1) + (1\text{-}t)(x_3,y_3)}$

Конгруенција: AB ≅ CD ако $\mathbf{(x_2\text{-}x_1)^2 + (y_2\text{-}y_1)^2 = (x_4\text{-}x_3)^2 + (y_4\text{-}y_3)^2}$

$\mathbf{M_B}$ задовољава аксиоме система **B** (Прилог Б.2). Пошто $\mathbf{M_B}$ постоји у $\mathbf{M_A}$, следи да $\mathbf{A \vdash Con^{\{fin\}}(B)}$.

Симетрично, у моделу $\mathbf{M_B}$ система **B** конструишемо модел $\mathbf{M'_A}$ за систем А користећи сегментну аритметику (Прилог Б.3), па $\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$ [4]. ■

Оба система **A** и **B** задовољавају Геделове услове непотпуности

Доказ 3 (Кроз финитарну симулацију доказа):

$\mathbf{A \vdash Con^{\{fin\}}(B)}$ (преко симулације):

Систем **A** може симулирати сваки **B**-доказ дужине ≤ **N** на следећи начин:

- Свака **B**-формула се кодира као природан број у **A** (геометријска тачка **(x,y)** → број $\mathbf{p = 2^x \cdot 3^y}$)
- Свако **B**-правило инференције (*modus ponens*, аксиоме) се верификује аритметички
- **A** проверава секвенцу $\boldsymbol{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n}$ да ли свака $\boldsymbol{\varphi_i}$ јесте: или аксиома **B** или само следи из претходних

Пошто **B** има само **12 аксиома**, провера је примитивно рекурзивна функција коју $\mathbf{Q^+}$ може извршити. Ако би **B** имао доказ **0=1** дужине ≤ **N**, **A** би то детектовао, што даје контрадикцију.

Дакле $\mathbf{A \vdash Con^{\{fin\}}(B)}$.

$\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$ (преко геометријске репрезентације):

Систем **B** може репрезентовати аритметички доказ у **A** као геометријску конструкцију:

- Сваки број $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$ → сегмент дужине **n** јединица
- Сабирање $\mathbf{n + m}$ → конкатенација сегмената
- Множење $\mathbf{n \cdot m}$ → правоугаоник димензија $\mathbf{n \times m}$

Свака аксиома **A1-A9** постаје геометријска тврдња коју **B** може верификовати.

Ако би **A** имао доказ **0=1**, то би одговарало геометријској конструкцији која даје: „празан сегмент = непразан сегмент", што је геометријски немогуће.

Дакле $\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$ [3, 9]. ■

Део 2: Доказ да $\mathbf{A \nvdash Con^{\{fin\}}(A)}$ и $\mathbf{B \nvdash Con^{\{fin\}}(B)}$

Доказ 1 (Геделова дијагонализација):

Систем А је $\mathbf{Q^+ = I\Delta_0}$, проширење Робинсонове аритметике **Q** [13] са $\mathbf{\Delta_0}$-индукцијом. $\mathbf{Q^+}$ је:

- **Рекурзивно аксиоматизиран** (коначан скуп аксиома + шема)
- **Довољно јак** да репрезентује све примитивно рекурзивне функције
- **Конзистентан** (претпоставка)

По **Геделовој другој теореми непотпуности** [4], сваки рекурзивно аксиоматизиран, конзистентан систем који јесте довољно јак да формализује елементарну аритметику **не може доказати сопствену конзистентност**. Будући да $\mathbf{Q^+}$ задовољава ове услове, следи $\mathbf{A \nvdash Con^{\{fin\}}(A)}$.

Систем **B** је $\mathbf{G_0}$, или елементарна геометрија са дискретном аксиомом. **B** може да **аритметизује своју синтаксу** (Прилог А.6) и представља довољно јак систем за Геделову дијагонализацију. Према томе, $\mathbf{B \nvdash Con^{\{fin\}}(B)}$. ■

Доказ 2 (преко теореме Тарског о недефинисаности истине [15]**):**

У систему A, предикат истине $\mathbf{Tr_{A(x)}}$ („**x** је Геделов број тачне реченице у **A**") није дефинисљив у **A**. $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$. Формализација $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ повезана је са својствима предиката истинитости $\mathbf{Tr_A}$ па би и дефинисаност $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ имплицирала дефинисаност $\mathbf{Tr_A}$, што је контрадикција. То важи за **B**. ■

Доказ 3 (Кроз формализацију prf predicate-а):

За систем A:

Нека $\mathbf{Prf_A(x, y)}$ буде предикат „**x** је Геделов број [4] доказа формуле са Геделовим бројем **y**".

$\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ је формула $\mathbf{\neg\exists x\ Prf_A(x, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$.

Претпоставимо, ради контрадикције, да $\mathbf{A \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$.

По Геделовој конструкцији [4], постоји формула $\mathbf{G_A}$ таква да: $\mathbf{A \vdash G_A \leftrightarrow \neg\exists x\ Prf_A(x, \ulcorner G_A \urcorner)}$

Ако A може доказати сопствену конзистентност, **онда** може доказати и да је $\mathbf{G_A}$ истинита (јер је и $\mathbf{G_A}$ недоказива по конструкцији, а **ако** би A доказивао $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$, **онда** би, по Геделовој конструкцији, дошло до противречности са дефиницијом формуле $\mathbf{G_A}$).

Али ово значи $\mathbf{A \vdash G_A}$, што крши дефиницију $\mathbf{G_A}$.

Контрадикција. Дакле $\mathbf{A \nvdash Con^{\{fin\}}(A)}$.

За систем B: Исти аргумент применљив је на **B** јер **B** може формализовати $\mathbf{Prf_B(x, y)}$ кроз кодирање геометријских доказа [3, 9]. ■

Део 3: Доказ да оба система задовољавају Геделове услове непотпуности

Геделови услови (за примену прве и друге теореме) [4]**:**

- **Рекурзивна аксиоматизација** [4]
- **Репрезентабилност примитивно рекурзивних функција** [4]
- **Довољна јачина** (може да формализује основну аритметику) [4]

Доказ 1 за систем A ($\mathbf{Q^+ = I\Delta_0}$):

- **Рекурзивна аксиоматизација:** Аксиоме **A1-A8** чине коначан скуп (где је **A8** рекурзивна шема) [3, 4].
- **Репрезентабилност: $\mathbf{Q^+}$** може да репрезентује све примитивно рекурзивне функције [9].
- **Јачина: $\mathbf{Q^+}$** садржи Робинсонов **Q** [13], који је довољан за Геделову дијагонализацију [4].

Доказ 1 за систем B ($\mathbf{G_0}$):

- **Рекурзивна аксиоматизација:** Аксиоме **B1-B12** су коначне [3, 4].
- **Репрезентабилност:** Систем **B** може кодирати природне бројеве као сегменте и при томе репрезентује основне аритметичке операције (Прилог Б.3) [4, 9].
- **Јачина:** Систем **B** могао би формализовати сегментну аритметику потпуно еквивалентну Робинсоновој аритметици [4, 13].

Према томе, **оба система задовољавају Геделове услове** [4] и подлежу непотпуности [3]. ■

Доказ 2 (Кроз експлицитну верификацију репрезентабилности):

За систем A ($\mathbf{Q^+}$):

Покажимо да $\mathbf{Q^+}$ репрезентује примитивно рекурзивне функције експлицитно:

- **Функција следбеника S(n) = n+1**: Репрезентује је формула $\mathbf{\varphi_S(x, y) \equiv y = x + 1}$ (аксиома **A2**).
- **Функција сабирања +(n, m)**: Репрезентује је $\mathbf{\varphi_{+(x,y,z)} \equiv z = x + y}$ (аксиома **A3**).
- **Функција множења ·(n, m)**: Репрезентује је $\mathbf{\varphi_{\cdot(x,y,z)} \equiv z = x \cdot y}$ (аксиома **A4**).

Примитивна рекурзија: Ако су **f** и **g** репрезентоване, онда је **h** дефинисана са:

- $\mathbf{h(0, \bar{x}) = f(\bar{x})}$
- $\mathbf{h(n+1, \bar{x}) = g(n, h(n, \bar{x}), \bar{x})}$

репрезентована формулом која користи $\mathbf{\Delta_0}$**-индукцију** (аксиома **A8**).

По теореми репрезентабилности [9], $\mathbf{Q^+}$ репрезентује све примитивно рекурзивне функције.

За систем B ($\mathbf{G_0}$):

B репрезентује бројеве као сегменте и операције као геометријске конструкције (Прилог Б.3):

- **Сабирање:** Конкатенација сегмената.
- **Множење:** Површина правоугаоника.
- **Поређење:** Конгруенција сегмената.

Сегментна аритметика је еквивалентна Робинсоновој **Q** по изражајној снази, што је сасвим довољно за Геделову дијагонализацију [4, 9]. ■

Доказ 3 (Кроз верификацију аритметизације синтаксе):

За систем A:

A може кодирати сопствену синтаксу:

- Симболи **0, S, +, ·, =, ¬, ∧, ∨, →, ∀, ∃** → прости бројеви $p_1, p_2, ..., p_{11}$
- Формула $\varphi = (\forall x\,(x + 0 = x)) \rightarrow \ulcorner \varphi \urcorner = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot ...$

  где су **a, b, c** Геделови бројеви појединачних симбола
- Предикат $\mathbf{Form_A(x)}$ („**x** је Геделов број формуле") је Δ_0 формула у $\mathbf{Q^+}$.
- Предикат $\mathbf{Prf_A(x, y)}$ („**x** је доказ **y**") је такође Δ_0 (проверава секвенцу корака).

Ово задовољава Геделов услов за формализацију синтаксе [4].

За систем B:

B кодира геометријске објекте као бројеве (Прилог А.6):

- Тачка $(x, y) \rightarrow \ulcorner (x,y) \urcorner = 2^x \cdot 3^y$
- Права $ax + by + c = 0 \rightarrow \ulcorner L \urcorner = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

Предикат $\mathbf{Incidence_B(P, L)}$ („тачка **P** припада правој **L**") је примитивно рекурзивна функција коју **B** може верификовати.

B формализује сопствену синтаксу и подлеже Геделовој непотпуности [7]. ■

Део 4: Доказ неупоредивости (A и B су неупоредиви у погледу prf-theoretic снаге)

Доказ 1 (преко контрапримера):

(1) A ⊬ T (Геометријска теорема)

Изаберимо теорему **T**: „Кроз тачку ван праве постоји тачно једна паралелна" (ово је Еуклидов 5. постулат). Ова теорема је независна од аксиома апсолутне геометрије **B1-B11** (што је показано од Хилберта [7, 8]). Дакле, **A ⊬ T**. Односно, **A** не може директно доказивати и геометријске теореме које захтевају просторну семантику система **B**.

(2) B ⊬ U (Аритметичка теорема)

Изаберимо теорему **U:** „Сваки природни број је збир четири квадрата" (Лагранжова теорема [5]).

Ова теорема **не следи** из сегментне аритметике система **B**, која захтева само коначне конструкције.

Дакле, **B ⊬ U**. ■

Доказ 2 (Неупоредивост - кроз ефективне ординале):

Пре bridge (мост) аксиома: $|\mathbf{Q^+}| = \omega^2$ и $|\mathbf{G_0}| = \omega$.

Bridge аксиоме $\mathbf{A9} = \mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ и $\mathbf{B12} = \mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ мењају ефективне ординале. Према теореми о рефлексији [9, 10]:

- Из $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ следи $|\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$
- Из $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ следи $|\mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}|$
- Заједно: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

Дакле, ефективни ординали оба система јесу **једнаки** — што је управо оно што **GH-услов** захтева (симетрична допуштеност без доминације). Неупоредивост не долази из разлике у ординалима, већ из **различитих димензија снаге**: **A** је јак у аритметичкој (индуктивној) димензији, **B** је такође јак и то у просторној (геометријској) димензији. Ниједан не садржи аксиоме оног другог. ■

Доказ 3 (Кроз категоријску онтолошку разлику):

A и **B** имају фундаментално различите онтолошке основе:

Систем A: Дискретни објекти (природни бројеви) са итеративним операцијама (индукција).

Систем B: Континуални објекти (геометријски простор) са просторним релацијама, као инциденција и, конгруенција.

A не може изразити „густоћу" геометрије:

У **B**, између било које две различите тачке **P** и **Q** мора постојати трећа тачка **R** таква да **B(P, R, Q)** (**Betweenness**).

Ово је својство **густоће** које не постоји у дискретној аритметици **A** - између два природна броја **n** и **n+1** нема трећег природног броја.

B не може изразити „неограничену рекурзију" аритметике:
У **A**, индукциона шема омогућава дефиниције облика **∀x ∀y (φ(x) ∧ φ(y) → φ(x+y))** за произвољно сложене **φ**.
B може радити само са **коначним** геометријским конструкцијама - не може изразити „за све бројеве" у смислу неограничене рекурзије.
Ова категоријална инкомпатибилност показује да **A** и **B** су **ортогонални** по својој природи [3, 7]. ■

---

4. ЕКСПЛИЦИТНА КОНСТРУКЦИЈА GH-пара

Након што смо, у претходним поглављима, дефинисали аксиоматски оквир и формулисали и главну теорему, у овој секцији приступамо њеној експлицитној конструктивној верификацији. Наш циљ је да покажемо да међусобна доказивост конзистентности у систему **(A, B)** није једна од формалиих претпоставки, већ резултат прецизних интерпретативних пресликавања. Кроз три нивоа доказа: кроз синтактички превод, релативну конзистентност модела и финитарну симулацију демонстрирамо како аритметика *види* геометрију и обрнуто, чиме се **ARC** принцип потпуно материјализује у конкретном математичком простору.

4.1 Теорема 4.1 : $A \vdash Con^{\{fin\}}(B)$

Теорема утврђује способност слабе аритметике да формализује основе геометрије. Кроз постојећу интерпретацију **I**, систем **A** доказује конзистентност система **B** редукујући овде геометријске објекте на аритметичке релације унутар $\mathbf{N^2}$, чиме би се геометријска неконзистентност свела на аритметичку немогућност.

Доказ 1 у систему A (Имплементација конструктивног превода из ARC [3]):
Дефинисати интерпретацију I: $\mathcal{L}_B \to \mathcal{L}_A$ **(**Ова интерпретација се користи као метатеоријска веза за доказ релативне конзистентности, а не као унутрашњи доказ у систему A.) :

- **I(P) = „уређени пар (x,y) где x,y ∈ ℕ"**
- **I(L) = „скуп {(x,y) | ax + by + c = 0} за a,b,c ∈ ℕ"**
- **I(P ∈ L) = „a·x + b·y + c = 0"**
- **I(Bet(A,B,C)) = „∃t ∈ ℚ (0 < t < 1 ∧ B = tA + (1-t)C)"**
- **I(AB ≅ CD) = „дистанца(A,B) = дистанца(C,D)"**

Доказати $I(Ax_B) \subseteq Th(A)$:

- За **B1: A** доказује јединствену праву кроз две различите тачке
- За **B2:** Свака права садржи бар две тачке
- За **B3:** Постоје три неколинеарне тачке (нпр. (0,0), (1,0), (0,1))
- За **B4-B6: Betweenness** аксиоме следе из линеарне алгебре
- За **B7-B9**: Конгруенција је релација еквиваленције
- За **B10:** Конструкција сегмента доказана аритметички
- За **B11:** Дискретност следи из коначности $\mathbb{N}^2$

Закључити $Con^{\{fin\}}(B)$:

- Претпоставимо $\exists p\ Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$
- Онда $I(\exists p\ Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner))$ важи у **A**
- Али **I(0=1)** је нетачно у **A**
- Контрадикција у моделу A под интерпретацијом **I**
- Према томе $\neg\exists p\ Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ ■

(Ово следи из дефиниције интерпретације **I** и принципа коректности (**soundness)** у **A**. Детаљи су дати у прилогу **Б**.)

Доказ 2 (Преко редукције конзистентности):
Претпоставимо супротно да $\neg Con^{\{fin\}}(B)$, тј. $B \vdash 0=1$ са доказом дужине **n**.
Сваки доказ у **B** има коначну дужину и може се кодирати као коначан објекат у A.
Користећи Δ_0**-индукцију**, **A** може доказати да за **свако n ∈ ℕ**, претрага кроз све доказе дужине **≤ n** у **B** не произведе **0=1**.
Пошто су докази у **B** су рекурзивно набројиви по дужини, ова претрага је комплетна.
Дакле, $A \vdash \neg\exists n\exists p\ (Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner) \wedge Len(p) = n)$, што је еквивалентно $A \vdash Con^{\{fin\}}(B)$. ■

Доказ 3 (Преко експлицитне конструкције коначног модела):

Систем **A** може конструисати **коначан модел** за подсистем **B** и верификовати да све аксиоме **B1-B12** важе у том моделу.

Конструкција коначног модела $\mathbf{M_n}$:

За произвољан $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$, дефинишемо модел $\mathbf{M_n}$ у **A**:

- **Тачке:** Скуп $\mathbf{\{(x, y) \mid x, y \in \{0, 1, 2, ..., n\}\}}$ (укупно $\mathbf{(n+1)^2}$ тачака)
- **Праве:** Све праве облика $\mathbf{ax + by + c = 0}$ где $\mathbf{a, b, c \leq n}$ и $\mathbf{gcd(a, b, c) = 1}$
- **Инциденција, Betweenness, Конгруенција:** Као у Доказу 1

Верификација аксиома:

A може примитивно рекурзивно проверити да $\mathbf{M_n}$ задовољава све аксиоме **B**:

- **B1-B3:** Инциденција - проверава се директно за све парове/тројке тачака у $\mathbf{M_n}$
- **B4-B6: Betweenness - linear order** на сегментима
- **B7-B9:** Конгруенција - еквиваленција рационалних дистанци
- **B10:** Конструктивност - сви објекти експлицитно набројиви
- **B11:** Дискретност - $\mathbf{M_n}$ је коначан

Закључак о конзистентности:

Пошто $\mathbf{M_n}$ задовољава све аксиоме **B**, у $\mathbf{M_n}$ важи $\mathbf{0 \neq 1}$ (геометријски: тај празан сегмент није једнак јединичном сегменту).

Ако би **B** имао доказ **0=1** дужине $\leq \mathbf{n}$, тај доказ би морао важити у $\mathbf{M_n}$ (**Soundness**), што нам даље даје контрадикцију.

A може конструисати $\mathbf{M_n}$ за произвољно велико **n** користећи $\mathbf{\Delta_0}$**-индукцију**, па:

$$\mathbf{A \vdash \forall n \neg \exists p\ (Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner) \wedge Len(p) \leq n)}$$

што је еквивалентно са $\mathbf{A \vdash Con^{\{fin\}}(B)}$ [3, 7]. ■

Ово показује да међусобна конзистентност није само аксиоматски постулат, већ јесте конструктивно проверљива кроз експлицитне моделе.

4.2 Теорема 4.2 : $\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$

Ова теорема успоставља сасвим обратну релацију: способност геометрије да обухвати аритметику. Интерпретација **J** користи сегментну аритметику како би рекурзивну структуру природних бројева преточила у просторну интуицију, чиме систем **B** постаје гарант конзистентности система **A**.

Доказ 1 у систему B:

Дефинисати интерпретацију J: $\mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}_B$:

- **J(0)** = „јединични сегмент **O**"
- **J(S(n))** = „**n** продужен јединичним сегментом"
- **J(n + m)** = „конкатенација сегмената **n** и **m**"
- **J(n × m)** = „правоугаоник са страницама **n** и **m**"
- **J(n = m)** = „сегменти **n** и **m** су конгруентни"

Доказати $\mathbf{J(Ax_A) \subseteq Th(B)}$:

- За **A1-A3:** Следе из сегментне аритметике
- За **A4-A7:** Робинсонове аксиоме проверене геометријски
- За **A8**: $\mathbf{\Delta_0}$-индукција доказана конструкцијом

Закључити $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$:

- Претпоставимо $\mathbf{\exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$
- Онда $\mathbf{J(\exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner))}$ важи у **B**
- Али **J(0=1)** је нетачно у **B**
- Контрадикција са **Soundness**-ом **J („**са коректношћу **J**")
- Према томе $\mathbf{\neg \exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$ ■

Детаљи су дати у прилогу Б.

Доказ 2 (Преко геометријске симулације и коначне претраге):

Сваки доказ у **A** се састоји од коначног низа формула. Овај низ може се геометријски репрезентовати у **B** као **низ конструкција**.

Ако би **A** био неконзистентан, постојао би доказ π за **0=1**. Геометријска симулација тог доказа у **B** би произвела **контрадикторну конструкцију** (нпр. сегмент који је и конгруентан и неконгруентан сам себи, истовремено).
Међутим, даљом претрагом кроз **све коначне конструкције** у **B,** ограничене овде дужином доказа (дубином конструкције), а **B** може верификовати да таква контрадикторна конструкција не постоји. Дакле, $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(A)}$. ■

Доказ 3 (Преко геометријске репрезентације аритметичких доказа):
Систем **B** може репрезентовати сваку примитивно рекурзивну функцију система **A** као геометријску конструкцију и верификовати да не производи контрадикцију.
Геометријска репрезентација примитивних операција:

- **Следбеник S(n):** Сегмент дужине **n** продужи за јединични сегмент **O** → ту добијамо сегмент дужине **n+1**.
- **Сабирање n + m:** Конкатеновати сегмент дужине **n** и сегмент дужине **m** → резултат је сегмент дужине **n+m**.
- **Множење n × m:** Конструисати правоугаоник са страницама **n** и **m** → површина је **n×m** (репрезентује се као одговарајући сегмент).
- **Примитивна рекурзија:** Ако је функција **f** дефинисана са:
  - **(0) = a**
  - **f(n+1) = g(n, f(n))**

онда **B** може конструисати низ сегмената **f(0), f(1), f(2), ...** итеративно, а свака следећа конструкција користи ону претходну.
Верификација конзистентности:
Претпоставимо да **A** има доказ π за **0=1** дужине ≤ **N**.
Овај доказ π и користи само примитивно рекурзивне функције (јер $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{+}$ репрезентује примитивно рекурзивне функције).
B може симулирати сваки корак доказа π као геометријску конструкцију:

- Аксиоме **A1-A9** → одговарајуће геометријске тврдње (као у Доказу 1)
- Правила закључивања (*modus ponens*) → композиција конструкција

Ако би π завршавао са **0=1**, **онда** би то значило да постоји геометријска конструкција која показује: да је „празан сегмент конгруентан јединичном сегменту **O**".
Међутим. по дефиницији конгруенције (**B7-B9**), ово је немогуће јер празан сегмент (дужина **0**) није конгруентан непразном сегменту (дужина **1**).
B може верификовати ову немогућност за све доказе дужине ≤ **N** коначном претрагом (коначан број конструкција до дубине **N**).
Дакле, $\mathbf{B} \vdash \neg\exists \mathbf{p}\ (\mathbf{Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)})$, односно $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(A)}$ [3, 9]. ■
Тако геометрија постаје гарант аритметичке стабилности, чиме се и **ARC** принцип материјализује у симетричном облику.

4.3 Теорема 4.3 (Неупоредивост – задовољавање услова неупоредивости из Деф. 2.1.1 у [3])

Доказ неупоредивости служи да потврди да међусобна валидација не потиче из какве хијерархијске надмоћи једног система над другим, већ из њихове онтолошке различитости. Показујемо и да постоје истине у геометрији које измичу аритметици и обрнуто, чиме **GH-пар** дефинишемо као симбиозу два комплементарна, а не идентична поља.

Докази 1 и 2:

(1) $\mathbf{A} \nvdash \mathbf{T}$ где је **T** геометријска теорема (нпр. постулат паралелности)
(2) $\mathbf{B} \nvdash \mathbf{U}$ где је **U** аритметичка теорема (нпр. јединствена факторизација)

(1) следи из независности постулата паралелности
(2) следи из геометријских модела где теорија бројева не важи ■

Доказ 3 (Преко интерпретабилности):
Ако би **A** доказивао геометријску теорему **T**, **онда** би, преко интерпретације **I** (у секцији 4.1), важило да **A** доказује и аритметичку формулацију **I(T).** Међутим, постоје модели **A** у којима интерпретација

I даје геометријске структуре у којима **T** не важи (нпр. модели без постулата паралелности). Дакле, **I(T)** није теорема система **A**, па ни **T** није доказива у **A**.
Симетрично важи за **B** и аритметичке теореме. ■

Доказ 4 (Преко теорије модела):
Постоји модел $\mathbf{M_A} \vDash \mathbf{A}$ (стандардни природни бројеви) у коме се може конструисати и геометријски модел $\mathbf{M_B} \vDash \mathbf{B}$ у коме постулат паралелности не важи. У овом моделу, постулат паралелности не важи, па **A** не може да докаже постулат паралелности за **све** моделе **B**.
Симетрично томе, постоји и модел $\mathbf{M_B} \vDash \mathbf{B}$ (нпр. геометрија над коначним пољима) у коме се може конструисати аритметички модел $\mathbf{M_A} \vDash \mathbf{A}$ где не важи фундаментална теорема аритметике. ■

Теорема 4.3.1 (A $\nvdash$ геометријска теорема о описаној кружници):
Систем **A** не доказује геометријску теорему: „За сваке три неколинеарне тачке, постоји тачно једна кружница која садржи све три."

Доказ 1 (Контрамодел у рационалним координатама):
Нека је $\mathbf{M_A}$ стандардни модел система **A** (природни бројеви). У њему се може конструисати модел $\mathbf{M_B}$ рационалне геометрије **($\mathbb{Q}^2$).** У $\mathbb{Q}^2$**,** троугао са теменима **(0,0), (1,0), (0,1)** нема описану кружницу са рационалним центром и полупречником, јер би њен центар био **(1/2, 1/2)** и полупречник $\sqrt{2}/2$**,** што није рационално јер $\sqrt{2}/2 \notin \mathbb{Q}$. Будући да **A** доказује да $\mathbf{M_B}$ задовољава све аксиоме система **B**, а ова конкретна геометријска чињеница важи **у** $\mathbf{M_B}$**,** следи да систем **A** не може да докаже општу теорему о описаној кружници. ■

Доказ 2 (Преко интерпретације у $\mathbb{Q}^2$):
У стандардном моделу **A** може се дефинисати геометријски модел над $\mathbb{Q}^2$**.** У том моделу постоје конфигурације тачака за које не постоји кружница дефинисана унутар истог система (јер то захтева проширење на ирационалне координате). Пошто **A** може интерпретирати овај модел, а теорема не важи у њему, следи да **A** не доказује општу теорему о описаној кружници. ■

Доказ 3 (Преко модела $\mathbb{Q}^2$):
Постоји модел геометрије над $\mathbb{Q}^2$ у коме не постоји кружница за све троуглове унутар датог система. Пошто је тај модел интерпретабилан у **A**, следи да теорема није опште важећа у свим моделима **B** које **A** може интерпретирати. Дакле, **A** $\nvdash$ дату теорему. ■

Теорема 4.3.2 (B $\nvdash$ Лагранжова теорема о четири квадрата): Систем **B** не доказује ни Лагранжову теорему [5]: „Сваки природан број може се изразити као збир четири квадрата природних бројева."

Доказ 1 (Геометријски модел са ограниченом аритметиком):
Унутар система **B** можемо конструисати модел сегментне аритметике изоморфан Робинсоновој **Q** [13]. У том моделу, Лагранжова теорема не мора да важи јер **Q** не доказује Лагранжову теорему (она је доказива у **PA**, али не и у **Q**). Конкретно, постоји нестандардни модел **Q** у којем неки елемент није збир четири квадрата. Преко интерпретације **J**, модел се пресликава у геометријски модел система **B** у којем Лагранжова теорема [5] не важи. Дакле, **B** не може да је докаже. ■

Доказ 2 (Преко ограничене квантификације у B):
Лагранжова теорема [5] захтева универзалну квантификацију над свим природним бројевима:

$$\forall n \, \exists a,b,c,d \, (n = a^2+b^2+c^2+d^2).$$

У систему **B**, природни бројеви су репрезентовани као сегменти коначне дужине, а квантификација $\forall n$ у **B** је ограничена – она се односи само на геометријске објекте (сегменте), а не и на апстрактне природне бројеве са пуним аритметичким својством. Постоје „бројеви" (сегменти) у неким моделима **B** који су и превише дугачки да би се могли конструктивно разложили на четири квадрата. ■

Доказ 3 (Преко интерпретационе слабости):

Систем **B** интерпретира само ограничену аритметику (која је еквивалентна или слабија од **Q**). Пошто постоје аритметичке теореме које нису доказиве у **Q** (као што је Лагранжова теорема), следи да ни **B**, који не надмашује ту снагу, не може доказати такве теореме. Дакле, $\mathbf{B} \nvdash \mathbf{U}$. ■

4.4 Коректност интерпретације I у систему A

Лема 4.4 (Систем A доказује исправност геометријских аксиома): За сваку аксиому φ система **B** (тј. за сваку $\varphi \in \mathbf{Ax_B}$), систем **A** доказује њену интерпретацију, тј. $\mathbf{A} \vdash \mathbf{I}(\varphi)$.

Доказ 1 (Конструктивни, аксиому по аксиому): За сваку аксиому **B1-B12**, изричито се конструише доказ у **A** за формулу **I(φ)**. На пример:

- За **B1** (јединственост праве): **I(B1)** тврди да за било које две различите тачке $\mathbf{(x_1,y_1)}$, $\mathbf{(x_2,y_2)}$ у $\mathbb{N}^2$ постоји јединствена тројка **(a,b,c)** са **gcd(a,b,c)=1** таква да $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$ за обе тачке. Доказ у **A** користи **Еуклидов алгоритам** за проналажење $\mathbf{a = y_2 - y_1}$, $\mathbf{b = x_1 - x_2}$, $\mathbf{c = x_2 y_1 - x_1 y_2}$, затим $\mathbf{\Delta_0}$-**индукцију** за доказ постојања **gcd** и његову јединственост, и коначно доказ да је ова пронађена права једина.
- Сличан поступак, али прилагођен семантици, понавља се за све остале аксиоме, док се докази заснивају на томе да су све релације у **I(φ)** дефинисане примитивно рекурзивним условима над $\mathbb{N}^2$, што их чини проверљивим у систему A. ■

Доказ 2 (Локална проверљивост аксиома):
Свака аксиома система **B** има облик формуле која онда квантфикује над коначним бројем тачака али и релација (инциденција, Betweenness, конгруенција). Под интерпретацијом **I**, дате релације постају аритметички услови над $\mathbb{N}^2$ који су дефинисани примитивно рекурзивним формулама. Провера да ли аксиома важи за дату коначну конфигурацију тачака практично се своди на проверу коначног броја аритметичких једнакости и неједнакости, што је формализујиво у систему **A**. Пошто су све аксиоме система **B** таквог локалног карактера, систем **A** може доказати њихове интерпретације.
Дакле, за сваку $\varphi \in \mathbf{Ax_B}$ важи $\mathbf{A} \vdash \mathbf{I}(\varphi)$. ■

Доказ 3 (Преко коректности интерпретације):
Интерпретација **I** дефинише геометријске релације као аритметичке услове над $\mathbb{N}^2$. Пошто су све ове релације дефинисане формулама које су доказиве у систему **A**, следи: **A** доказује све интерпретације аксиома система **B**. Дакле, $\mathbf{A} \vdash \mathbf{I}(\varphi)$ за сваку $\varphi \in \mathbf{Ax_B}$. ■

Ово обезбеђује транспарентност **GH-пара** и његову проверљивост у формалним асистентима доказа.

4.5 Коректност интерпретације J у систему B

Лема 4.5 (Систем B доказује исправност аритметичких аксиома): За сваку аксиому ψ система **A** (тј. за сваку $\psi \in \mathbf{Ax_A}$), систем **B** доказује њену интерпретацију, тј. $\mathbf{B} \vdash \mathbf{J}(\psi)$.

Доказ 1 (Геометријска конструкција аксиому по аксиому): За сваку аксиому **A1-A9**, изричито се конструише геометријски доказ у **B** за **J(ψ)**. На пример:

- За **A4 (x + 0 = x): J(A4)** тврди да конкатенација сегмента **J(x)** са нултим сегментом **J(0)** даје конгруентан сегмент **J(x)**. Могло би се доказати директно и то из аксиома конгруенције али и **Betweenness**-а у **B**.
- За **A8** (шема $\mathbf{\Delta_0}$-индукције): **J(A8)** тврди да ако неко својство **P** важи за јединични сегмент и **ако** из тога што важи за сегмент дужине **n** следи да важи за сегмент дужине **n+1**, **онда** би **P** важило за све сегменте. Ово се доказује у **B** конструкцијом сегмената коначне дужине као и применом геометријске индукције (ограничене на коначне дужине због **B11**). ■

Доказ 2 (Преко сегментне аритметике и коначних модела): Систем **B** овде дефинише **сегментну аритметику** која је интерпретабилна у Робинсоновој **Q** [13]. У моделу сегментне аритметике, све су аксиоме **A1-A9** задовољене. Будући да **B** може верификовати и овај модел (јер су све конструкције коначне), он може доказати да су све интерпретације **J(ψ)** тачне унутар тог модела, па самим тим и доказиве у систему **B**. ■

Доказ 3 (Преко Soundness интерпретације J):

Интерпретација **J** пресликава аритметичке аксиоме система **A** у геометријске конструкције у систему **B** (сегментна аритметика и конгруенција). Пошто су овде основне аритметичке операције **(0, S, +, ×)** репрезентоване као коначне геометријске конструкције, онда и свака аксиома $\psi \in \mathbf{Ax_A}$ има директну конструктивну реализацију у **B**. Због тога, свака интерпретација **J(ψ)** може се доказати унутар **B** као коначна геометријска конструкција заснована на аксиомама **B1–B12**.

Дакле, $\mathbf{B} \vdash \mathbf{J}(\psi)$ за сваку $\psi \in \mathbf{Ax_A}$. ■

Ово обезбеђује транспарентност **GH-пара** и његову проверљивост у формалним асистентима доказа.

4.6 Нециркуларност Bridge (мост) аксиома

Bridge (мост) аксиоме **A9** и **B12** су саставни делови дефиниција система **A** и **B.** Право питање њихове нециркуларности јесте питање да ли узајамна дефиниција система доводи ту до самореференцијалне конзистентности **($\mathbf{T} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T})$).**

Теорема 4.6.1 (Нециркуларност Bridge аксиома). Не постоји извођење облика $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ или $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B})$ које следи из Bridge (мост) аксиоме **A9** и **B12**.

Доказ 1 (Кроз теорију фиксне тачке):

Системи **A** и **B** дефинисани су узајамно: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{+} + \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B}) = \mathbf{G_0} + \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$**.** Према Клинијевој теореми рекурзије [4], оваква узајамна дефиниција има фиксну тачку — постоји пар (**A, B**) који би задовољавао обе једначине. Фиксна тачка није самореференцијална јер:

- Ниједна од једначина није облика $\mathbf{T} = \mathbf{T} + \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T})$**.**
- Свака од њих реферише на **други** систем.

Претпоставимо, ради контрадикције, да $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$**.** Тада према транзитивности рефлексије **($\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$)** добијамо $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A}) \wedge \mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$**,** не даје самореференцију за **B**. Али комбиновањем $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B})$ **и** $\mathbf{B} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ са претпоставком $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$**,** даље добијамо да би заједнички систем $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ могао извести $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$, што би кршило Геделову II теорему [4] за $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ (ако је тај систем довољно јак).

Како $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ није један од система **A** или **B** (није у пару), то није случај који Bridge аксиоме покривају. Дакле, претпоставка води у контрадикцију изван домена **GH-пара**. ■

Доказ 2 (Кроз ефективне ординале):

Из Теореме 3.1, Део 4, ефективни ординали су $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$**.** Претпоставимо да $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$**.** Тада по теореми о рефлексији [9, 10] мора $|\mathbf{A}| > |\mathbf{A}|$**,** што је немогуће. Симетрично за **B.** Дакле, ниједан систем не може доказати сопствену конзистентност. ■

Доказ 3 (Кроз модел-теоријску интерпретацију).

Нека је $\mathbf{M_A}$ стандардни модел за **A** (у коме важи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B})$ као истинита тврдња о **B**). Нека $\mathbf{M_B}$ буде стандардни модел за **B** (у коме важи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$).

У $\mathbf{M_A}$**,** формула $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ је истинита (јер је **A** конзистентан по претпоставци конструкције), али **није доказива** у **A** (Гедел II за **A**). Дакле, постоји модел $\mathbf{M_A'}$ за **A** у коме $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ не важи (ово је нестандардни модел — види Прилог Г.1). У том моделу, $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B})$ је и даље истинита (јер је ту **A9** аксиома). Дакле, **A** не може да изведе $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ ни у једном моделу — јер постоји модел у коме не важи. Симетрично за **B**. Дакле, Bridge аксиоме не генеришу самореференцијалну конзистентност. ■

Теорема 4.6.2 (Конзистентност A и B). Системи $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{+} + \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{B})$ и $\mathbf{B} = \mathbf{G_0} + \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ морају бити конзистентни ако су $\mathbf{Q}^{+}$ и $\mathbf{G_0}$ конзистентни и ако постоји фиксна тачка узајамне дефиниције.

Доказ 1 (Кроз Клинијеву теорему рекурзије):

По Клинијевој теореми рекурзије [4], узајамна дефиниција $\mathbf{A = Q^+ + Con^{\{fin\}}(B)}$, $\mathbf{B = G_0 + Con^{\{fin\}}(A)}$ има фиксну тачку (**A, B**). Пошто $\mathbf{Q^+}$ и $\mathbf{G_0}$ јесу конзистентни, а пошто и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ **и** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ јесу истините тврдње у стандардном моделу, додавање ових аксиома не уводи контрадикцију. Дакле, **A*** и **B*** су конзистентни. ■

Доказ 2 (Кроз модел-теоријску конструкцију:.

Нека је $\mathbb{N}$ стандардни модел аритметике. У $\mathbb{N}$, дефинишимо:

- $\mathbf{M_A} = \mathbb{N}$ (са интерпретацијом **A9** као „**B** је конзистентан")
- $\mathbf{M_B} = \mathbb{Q}^2$ (са интерпретацијом **B12** као „**A** је конзистентан")

У $\mathbb{N}$, $\mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ је истинита јер **B** има модел $\mathbf{M_B}$ (конструисан у Прилогу Б.2). У $\mathbb{Q}^2$, $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ је истинита јер **A** има модел $\mathbb{N}$. Дакле, оба система имају модел, па су конзистентни. ■

Доказ 3 (Кроз релативну конзистентност):

Претпоставимо да је **A** неконзистентан. Тада $\mathbf{A \vdash 0=1}$. По Soundness интерпретације I (Теорема 5.4.1), $\mathbf{B \vdash 0=1}$ **(јер I(0=1) = 0=1).** Али $\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}(A)}$ (по **B12**), Контрадикција са $\mathbf{B \vdash 0=1}$ и $\mathbf{B \vdash Con^{\{fin\}}}$(A). Дакле, **A** је конзистентан под условом да је **B** конзистентан. Симетрично за **B**. Како $\mathbf{Q^+}$ и $\mathbf{G_0}$ јесу оба конзистентни, и како су све интерпретације Soundness-очувајуће, оба система су конзистентни. ■

Напомена о нециркуларности. Системи **A** и **B** су дефинисани узајамно — **A** садржи тврдњу о **B, B** садржи тврдњу о **A**. Ово није порочна кружност, већ структурна карактеристика **GH-пара** (видети [2, 3]). Нециркуларност се огледа у томе да:

- Ниједан систем не тврди сопствену конзистентност.
- Свака тврдња је о **другом** систему.
- Услов неупоредивости (Теорема 3.1, Део 4) спречава колапс у један систем.
- Bridge аксиоме нису „произвољне" — оне су синтаксички представници релације која постоји између **A** и **B (**видети Прилог Е).

---

5. ОСТАЛЕ ТЕОРЕМЕ И ЛЕМЕ О МИНИМАЛНОМ GH-ПАРУ

У овој секцији вршимо формалну верификацију Геделових услова за системе **A** и **B**, а доказујемо још и техничке леме о ограниченој индукцији и успостављамо **Soundness** теореме интерпретација **I** и **J**. Ови докази чине техничку основу за потврду да овај конструисани пар задовољава све критеријуме минималног **GH-односа**.

5.1 Докази Геделових услова

Теорема 5.1: Оба система **A** и **B** задовољавају Геделове услове непотпуности [4].

Доказ 1 за систем A:

- **Рекурзивна аксиоматизација:** $\mathbf{Ax_A}$ је рекурзиван скуп
- **Репрезентабилност:** Све примитивно рекурзивне функције су репрезентабилне у $\mathbf{Q^+}$
- **Дијагонализација:** Може се конструисати реченица $\mathbf{G_A}$ таква да је:
  $\mathbf{A \nvdash G_A}$ и $\mathbf{A \nvdash \neg G_A}$ ако је **A** конзистентан

Доказ 2 (Експлицитна конструкција Геделове реченице):

Конструишимо Геделову реченицу $\mathbf{G_A}$ [4] за систем **A** експлицитно.

Корак 1: Дефинишимо предикат доказивости **Pr(x, y)** у **A**: $\mathbf{Prf_A(x, y)}$ ≡ „**x** је Геделов број коначне секвенце формула која чини валидан доказ формуле са Геделовим бројем **y**"

Овај предикат је $\mathbf{\Delta_0}$ у $\mathbf{Q^+}$ јер проверава:

- Сваки корак је аксиома **A1-A9** (коначна провера)
- Или следи из претходних по *modus ponens*

Корак 2: Применимо дијагонализациону лему (**fixed point theorem**): Постоји формула $\mathbf{G_A}$ таква да:

$$\mathbf{A \vdash G_A \leftrightarrow \neg \exists x\, Prf_A(x, \ulcorner G_A \urcorner)}$$

$\mathbf{G_A}$ „каже о себи" да није доказива у **A**.

Корак 3: Покажимо $\mathbf{A \nvdash G_A}$ и $\mathbf{A \nvdash \neg G_A}$ (ако је **A** конзистентан):

Ако $\mathbf{A} \vdash \mathbf{G_A}$, **онда** $\mathbf{A} \vdash \neg\exists x\, \mathbf{Prf_A}(x, \ulcorner \mathbf{G_A} \urcorner)$ (еквиваленција). Али пошто **A** доказује $\mathbf{G_A}$, постоји доказ π, па $\mathbf{A} \vdash \mathbf{Prf_A}(\ulcorner \pi \urcorner, \ulcorner \mathbf{G_A} \urcorner)$. Контрадикција. Дакле $\mathbf{A} \nvdash \mathbf{G_A}$.
Ако $\mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{G_A}$ **онда** $\mathbf{A} \vdash \exists x\, \mathbf{Prf_A}(x, \ulcorner \mathbf{G_A} \urcorner)$. То значи да **A** тврди „постоји доказ $\mathbf{G_A}$", иако смо показали $\mathbf{A} \nvdash \mathbf{G_A}$. **Ако** је **A Sound** (доказује само истините тврдње о доказима), **онда** је ово контрадикција.
Дакле $\mathbf{A} \nvdash \neg\mathbf{G_A}$.
Ово показује да је **A** непотпун [4, 13]. ■

Доказ 3 (Кроз верификацију Робинсоновог Q унутар Q^+):
Систем $\mathbf{A} = \mathbf{Q^+}$ садржи Робинсонову аритметику **Q** као подсистем (аксиоме **A1-A7** и јесу аксиоме **Q**).
Робинсонова аритметика **Q** [13] је **најслабији** систем за који Геделова теорема важи [4].
Q задовољава:

1. **Рекурзивна аксиоматизација:** 7 експлицитних аксиома
2. **Репрезентабилност:** Све рекурзивно набројиве релације су овде репрезентоване (иако нису и све примитивно рекурзивне функције - репрезентабилност у $\mathbf{Q^+}$ је довољна за аритметизацију синтаксе)
3. **Дијагонализација:** Геделова конструкција функционише у **Q**

Пошто $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q^+}$, све што важи за **Q** важи и за $\mathbf{Q^+}$.
Даље, $\mathbf{Q^+}$ додаје $\mathbf{\Delta_0}$**-индукцију** (аксиома **A8**), што **појачава** овај систем али **не елиминише** Геделову непотпуност - напротив, чини је **јаснијом** јер $\mathbf{Q^+}$ може доказати више метатврдњи о себи, али и даље не може доказати $\mathbf{Con^{\{fin\}}(Q^+)}$.
Дакле, $\mathbf{A} = \mathbf{Q^+}$ задовољава Геделове услове [4, 13]. ■

Доказ 1 за систем B:
Аритметизација синтаксе: B може да кодира своје формуле као тачке
Prf predicate: $\mathbf{Prf_B}$ је $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисан
Недостижност конзистентности: $\mathbf{Б \nvdash Con^{\{fin\}}(B)}$ стандардном дијагонализацијом

Доказ 2 (Експлицитна аритметизација геометријске синтаксе):
Систем **B** може кодирати своју синтаксу користећи сегментну аритметику.
Кодирање геометријских објеката:
Тачка P = (x, y): Кодирамо као $\ulcorner \mathbf{P} \urcorner = \text{сегмент}_{\text{дужине}}(\mathbf{2^x \cdot 3^y})$
Права L (ax + by + c = 0): Кодирамо као $\ulcorner \mathbf{L} \urcorner = \text{сегмент}_{\text{дужине}}(\mathbf{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c})$
Формула φ: Композиција кодова њених подформула користи правоугаонике и конкатенацију као множење и сабирање. Ова конструкција је примитивно рекурзивна.
Предикат доказивости $\mathbf{Prf_B(x, y)}$**:**
B може дефинисати $\mathbf{Prf_B(x, y)}$ као геометријски предикат: „**x** јесте конструкција (низ сегмената) која представља валидан доказ формуле кодиране са **y**"
Провера валидности доказа:
Свака формула у низу је аксиома **B1-B12** (коначна провера конгруенција).
Или следи из претходних (композиција конструкција).
Дијагонализација:
Користећи Теорему фиксне тачке (**fixed point theorem)** (која важи у било ком систему довољно јаком за аритметизацију), конструишемо $\mathbf{G_B}$: $\mathbf{B} \vdash \mathbf{G_B} \leftrightarrow \neg\exists x\, \mathbf{Prf_B}(x, \ulcorner \mathbf{G_B} \urcorner)$
Исти аргумент као за **A** показује $\mathbf{B} \nvdash \mathbf{G_B}$ и $\mathbf{B} \nvdash \neg\mathbf{G_B}$.
Дакле, **B** је непотпун [4, 7]. ■

Доказ 3 (Кроз еквиваленцију са Робинсоновом аритметиком):
Систем **B** може формализовати **сегментну аритметику**, еквивалентну Робинсоновој аритметици **Q** [13] (Прилог Б.3).
Сегментна аритметика у B:

- **0:** Празан сегмент
- **1:** Јединични сегмент **O**
- **n+1:** Продужење сегмента **n** за **O**
- **n+m:** Конкатенација

- **n×m:** Површина правоугаоника **n × m**

Еквиваленција: Постоји интерпретација **I: Q → B** таква да:

- **I(n)** = $\text{сегмент}_{\text{дужине}}$**(n)**
- **I(φ)** је геометријска верзија аритметичке формуле **φ**

Ова интерпретација **чува доказивост**: **Q ⊢ φ ако и само ако B ⊢ I(φ)**.

Пошто **Q** задовољава Геделове услове [4] (најслабији такав систем), онда их задовољава и **B** јер је **prf-theoretically** еквивалентан **Q**.

Конкретно, **B** може симулирати Геделову конструкцију из **Q** користећи сегментну репрезентацију, па **B ⊬ $\text{Con}^{\{\text{fin}\}}$(B)** [7, 13]. ■

5.2 Семантика Bridge (мост) аксиома и избегавање циркуларности

Мост аксиоме A9: ¬∃p Prf_{B}(p, ⌜ 0=1 ⌝) и **B12: ¬∃p Prf_{A}(p, ⌜ 0=1 ⌝)** нису циркуларне и то из три разлога:

Разлог 1: Prf_{B} и **Prf_{A}** су синтактички предикати дефинисани преко Геделових бројева [4]. Они не реферишу на семантичку конзистентност, већ на формалну структуру доказа.

Разлог 2: У систему **A**, **Prf_{B}** се интерпретира као аритметичка формула о коначним низовима природних бројева, не као тврдња о **истинитости** система **B**.

Разлог 3: Soundness теореме (4.4) обезбеђују да ове аксиоме нису произвољне – имају семантичку потпору у интерпретацијама **I** и **J.**

Теорема 5.2: Prf_{B} је **Δ_0**-дефинисан у систему **A** независно од аксиоме **A9.**

Доказ 1: Prf_{B}(p,φ) ≡ ∃n ≤ p [Seq(n) ∧ Len(n) = k ∧ ∀i < k (Item(n,i) ∈ Ax_{B} ∨ ...)]

где су сви квантификатори ограничени **(∃n ≤ p, ∀i < k).** Ова дефиниција користи само **Δ_0**-формуле. ■

Доказ 2 (преко редукције на примитивно рекурзивну функцију):

Функција која проверава да ли **p** кодира важећи доказ у **B** је **примитивно рекурзивна**.

Сви примитивно рекурзивни предикати су **Δ_0-дефинисани** у **Q^{+}** (као стандардна репрезентабилност примитивно рекурзивних функција у **Q^{+}**). Дакле, постоји **Δ_0**-формула **ψ(p,φ)** таква да:

A ⊢ ∀p∀φ (Prf_{B}(p,φ) ↔ ψ(p,φ))

Ова формула **ψ** не зависи од **A9** јер се дефинише само преко синтаксе. ■

Доказ 3 (преко коначне претраге):

За фиксирано **p**, скуп свих могућих доказа дужине **≤ p** у **B** је **коначан** (због аксиоме дискретности **B11**). Провера да ли **p** кодира важећи доказ се своди на коначну претрагу, која се може изразити **Δ_0**-формулом са ограниченим квантификаторима. ■

5.3 Техничке леме о Δ_0-индукцији

Лема 5.3.1: Q + Δ_0-индукција је довољна за:

- Дефинисање Геделових бројева [4]
- Доказивање основних својстава **Prf** предиката
- Конструкцију Геделових реченица

Доказ 1: Све неопходне функције су примитивно рекурзивне или **Δ_0**-дефинисане.

Доказ 2 (Експлицитна конструкција низова):

Систем **Q^{+}** може да дефинише **кодирање коначних низова** користећи **Канторово упаривање** и **Кинеску теорему о остацима** [5] које су **Δ_0-дефинисане**. Нека **β** буде Геделова **β**-функција кодирања. За сваки коначан низ **$a_1, \ldots, a_k$** постоје бројеви **n, m** такви да за свако **i ≤ k** важи **β(n, m, i) = a_i**.Ова се функција може дефинисати помоћу ограничења квантификације над дељивошћу и остацима, што је **Δ_0**. Одавде се директно конструише и **Seq(n)** („**n** кодира низ"), **Len(n),** и **Item(n, i).** Геделови бројеви симбола, формула и доказа су специјални случајеви ових низова. ■

Доказ 3 (Преко редукције на рекурзију ограничене сложености):

Свака функција, потребна за Геделово нумерисање (конкатенација симбола, провера синтаксе) има и **временску сложеност ограничену полиномом у односу на дужину свог улаза**. Позната је теорема [11] која тврди да $\mathbf{I\Delta_0}$ може **доказати тоталност** свих функција чија је сложеност ограничена овим полиномом, користећи $\mathbf{\Delta_0}$**-индукцију** на кодирањима прорачуна. Дакле, постојање и јединственост Геделових бројева, као и функције декодирања, могу се доказати у $\mathbf{Q^+}$ формализујући тако коначне прорачуне ограничене дужине помоћу Δ_0-индукције. ■

Доказ 4 (Преко формалне интерпретације у коначну аритметику):

Могуће је конструисати **релативну конзистентност,** модел $\mathbf{Q^+}$**,** они одсечени (bounded) модели који задовољавају $\mathbf{\Delta_0}$-фрагмент теорије. У том **коначном моделу**, скуп свих могућих низова, све до неке фиксне дужине, је **коначан и експлицитан,** а свака функција над оваквим коначним скуповима је тривијално тотална и израчунљива (computable). Пошто $\mathbf{Q^+}$ може доказати да и овакав „одсечени" модел задовољава своје аксиоме (због $\mathbf{\Delta_0}$ природе), може и симулирати рад свих оних алгоритама за кодирање и декодирање унутар тог модела, осигуравајући тако њихову добру дефинисаност. ■

Лема 5.3.2: $\mathbf{Q^+}$ не може да докаже:

(1) Тоталност функције експоненцијације
(2) Конзистентност **PA**
(3) Одређене универзалне теореме о простим бројевима

Импликација: Ова ограничења осигуравају да **A** остане **Гедел-способан** али не и прејак.

Доказ 1 за (1) (Преко модел-теоријског аргумента):

Постоји **нестандардни модел** $\mathbf{M \models I\Delta_0}$ у коме функција **експоненцијација није тотална**.

Конкретно, постоје елементи $\mathbf{a, b \in M}$ такви да $\mathbf{a^b}$ није дефинисано (тј., не постоји $\mathbf{c \in M}$ за који важи да је $\mathbf{M \models Exp(a,b,c))}$. Овај модел се може конструисати техником **ултрапроизвода** или **Хенкинових ограничења** [6]. Пошто $\mathbf{Q^+ \subset I\Delta_0}$, исти модел служи и за $\mathbf{Q^+}$. Како у **M** постоје **a, b** за које важи да је $\mathbf{\forall c \neg Exp(a,b,c)}$, то значи да $\mathbf{Q^+}$ не може доказати $\mathbf{\forall x \forall y \exists z\ Exp(x,y,z)}$. ■

Доказ 2 за (1) (Преко prf-theoretic аргумента):

Теорије са ограниченом индукцијом, као што је $\mathbf{I\Delta_0}$ (па тиме и $\mathbf{Q^+}$), имају строго ограничену доказну снагу у односу на теорије са пуном индукцијом. Познато нам је да овакве теорије не могу доказивати тоталност функција са довољно брзим растом [11].

Функција $\mathbf{2^x}$ (степени двојке) има експоненцијалан раст, који превазилази домен оних функција чија се тоталност може доказати у $\mathbf{I\Delta_0}$. Формално, важи да $\mathbf{I\Delta_0 \nvdash \forall x \exists y\ (y = 2^x)}$ [11], што даље имплицира недоказивост тоталности експоненцијације у општем облику. ■

Доказ 3 за (1) (Кроз синтаксички аргумент - недостатак аксиома):

$\mathbf{Q^+}$ нема експлицитну **аксиому експоненцијације**.

Аксиоме $\mathbf{Q^+}$ дефинишу:

- **Сабирање (A3):** $\mathbf{x + 0 = x,\ x + S(y) = S(x + y)}$
- **Множење (A4):** $\mathbf{x \cdot 0 = 0,\ x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x}$

Експоненцијација би захтевала нову аксиому облика:

$$\mathbf{x^0 = 1 \quad x^{S(y)} = x^y \cdot x}$$

Али $\mathbf{Q^+}$ нема такву аксиому, нити $\mathbf{\Delta_0}$**-индукциону шему** (**A8**), такву шему која би могла дефинисати експоненцијацију као некакву примитивно рекурзивну функцију кроз индукцију на **неограниченим** формулама.

$\mathbf{\Delta_0}$**-индукција** у $\mathbf{Q^+}$ важи само за **ограничене формуле** - све квантификаторе који су ограничени са $\leq$. Међутим, дефиниција експоненцијације $\mathbf{Exp(x, y, z) \equiv z = x^y}$ захтева **неограничену** рекурзију (раст функције је **експоненцијалан**, што превазилази све $\mathbf{\Delta_0}$ ограничене функције).

Конкретно, не можемо доказати $\mathbf{\forall x\ \forall y\ \exists z\ (z = x^y)}$ у $\mathbf{Q^+}$ јер:

1. $\mathbf{Q^+}$ нема експлицитну аксиому за $\mathbf{x^y}$
2. $\mathbf{\Delta_0}$**-индукција** не дозвољава дефиницију функција са експоненцијалним растом

Дакле, $\mathbf{Q^+}$ не може доказати тоталност експоненцијације [1, 13]. ■

Доказ 1 за (2) (Преко Геделове друге теореме и релативне снаге):
Претпоставимо, супротно томе, да $\mathbf{Q^+ \vdash Con^{\{fin\}}(PA)}$. **PA** може да интерпретира $\mathbf{Q^+}$ (јер је $\mathbf{Q^+ \subseteq PA}$). Такође, **PA** може да формализује мета-теорију потребну за доказ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$. Ако би $\mathbf{Q^+}$ доказао и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$, онда би и **PA** (који садржи $\mathbf{Q^+}$) могао да докаже $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$ *унутар себе*, користећи ту интерпретацију и **формализовану коректност**. Ово би било у супротности са **Геделовом другом теоремом** [4]. примењеном на **PA**. Дакле, $\mathbf{Q^+ \nvdash Con^{\{fin\}}(PA)}$. ■

Доказ 2 за (2) (Кроз prf-theoretic ординале):
Prf-theoretic ординал система $\mathbf{Q^+ = I\Delta_0}$ је ω^2, док је ординал **PA** (Пеанове аритметике) ε_0.
Важи $\omega^2 << \varepsilon_0$ (огромна разлика у снази).
По општем принципу из **prf theory** [1, 9, 12]: **Ако** систем $\mathbf{T_1}$ доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, **онда** $\mathbf{|T_1| > |T_2|}$ **(prf-theoretic ординал** $\mathbf{T_1}$ мора бити већи од ординала $\mathbf{T_2}$).
Ако би $\mathbf{Q^+ \vdash Con^{\{fin\}}(PA)}$, **онда** би морало важити $\mathbf{|Q^+| > |PA|}$, односно $\omega^2 > \varepsilon_0$.
Али $\omega^2 << \varepsilon_0$, што је контрадикција.
Дакле, $\mathbf{Q^+ \nvdash Con^{\{fin\}}(PA)}$ [1, 9, 12]. ■

Доказ 3 за (2) **(Кроз недостатак индукције):**
PA има **пуну индукциону шему**: за било коју формулу $\varphi(x)$: $\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$.
$\mathbf{Q^+}$ има само Δ_0**-индукцију**: ова индукција важи само за ограничене формуле (све квантификаторе који су ограничени).
Доказ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$ захтева индукцију над **неограниченим** формулама, а конкретно над предикатом доказивости $\mathbf{Prf_{PA}(x, y)}$ који није Δ_0.
Разлог: Да би доказао $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$, систем мора показати да за **сваки** број **n** (значење неограничени квантификатор), не постоји доказ контрадикције дужине $\leq \mathbf{n}$.
Ово захтева индукцију облика: $\varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)) \rightarrow \forall n\, \varphi(n)$
где је $\varphi(n) = \neg\exists p\, (\mathbf{Prf_{PA}}(p, \ulcorner 0=1 \urcorner) \land \mathbf{Len}(p) \leq n)$.
Али $\varphi(n)$ садржи неограничени егзистенцијални квантификатор $\exists p$, па није Δ_0 формула. $\mathbf{Q^+}$ не може применити индукцију на $\varphi(n)$, па не може доказати ни $\forall n\, \varphi(n)$, односно $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$ [1, 13]. ■

Доказ 1 за (3) (Конкретан контрапример - слаба верзија Бецове теореме):
Нека је **B(n)** тврдња: „За свако **m,** постоји прост број **p** између **n** и **2n**". Та слабија форма Бертрановог постулата (доказана у **PA**). $\mathbf{I\Delta_0}$ може доказати **B(n)** за **сваки стандардни n**, али **не може и** $\forall n$ **B(n)**. А разлог је што доказ $\forall n$ **B(n)** захтева експоненцијално растућу функцију (за проверу простих бројева у интервалу **(n, 2n)**), чија тоталност није доказива у $\mathbf{I\Delta_0}$. Постоје нестандардни модели $\mathbf{I\Delta_0}$ у којима универзалне тврдње о простим бројевима не важе, што показује недоказивост таквих теорема у систему. ■

Доказ 2 за (3) (Кроз недоказивост бесконачности простих бројева):
Еуклидова теорема: „Постоји бесконачно много простих бројева."
У **PA**, ово се доказује индукцијом: претпоставимо коначан скуп простих $\mathbf{\{p_1, ..., p_n\}}$, конструишемо $\mathbf{N = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1}$, и покажемо да **N** има простог делиоца ван скупа.
$\mathbf{Q^+}$ може доказати ово за **сваки конкретан n** (коначна провера), али не може доказати и $\forall n\, (\exists p > p_n$ **такав да је p прост)** јер захтева **неограничену индукцију**.
Експлицитна конструкција нестандардног модела:
Постоји нестандардни модел $\mathbf{M \models Q^+}$ такав да:

- **M** садржи нестандардне елементе (бесконачно велике бројеве)
- Постоји нестандардни елемент **H** у моделу **M** такав да у **M** не постоји прост број већи од **H**.
- У **M**, не постоје прости бројеви већи од **H**

Ово показује да $\mathbf{Q^+ \nvdash}$ „постоји бесконачно много простих бројева" [13]. ■
постоје нестандардни елементи који нарушавају стандардну структуру простих бројева

Доказ 3 за (3) (Кроз слабост Δ_0**-дефиниције простих):**

У $\mathbf{Q^+}$, простост броја **p** дефинишемо као: $\mathbf{Prime(p) \equiv p > 1 \land \forall x \leq p\ \forall y \leq p\ (x \cdot y = p \rightarrow x=1 \lor y=1)}$
Ова дефиниција је $\mathbf{\Delta_0}$ (ограничени квантификатори). Међутим, многе теореме о простим бројевима и захтевају тврдње са **неограниченим** квантификаторима.
Пример: Голдбахова хипотеза: „Сваки паран број > **2** је збир два проста." $\mathbf{\forall n > 2\ (Even(n) \rightarrow \exists p\ \exists q\ (Prime(p) \land Prime(q) \land p+q=n))}$
Ово је $\mathbf{\Sigma_1}$ формула (почиње са $\exists$), не $\mathbf{\Delta_0}$.
$\mathbf{Q^+}$ не може применити индукцију на $\mathbf{\Sigma_1}$ формуле, па не може доказати ни Голдбахову хипотезу (чак да је истинита), ни многе друге теореме о простим бројевима, које захтевају индукцију ван $\mathbf{\Delta_0}$ класе.
Општи принцип: Све теореме које су облика „за **све** бројеве важи својство које укључује проверу **неограниченог** скупа простих бројева" су ван домашаја $\mathbf{Q^+}$ [1, 13]. ■

5.4 Soundness теореме за интерпретације (техничка сржконструкције GH-пара из [2])

5.4.1 Soundness теорема за I (A → B)

Теорема 5.4.1: Ако $\mathbf{B \vdash \varphi}$, онда $\mathbf{A \vdash I(\varphi)}$
Вербално: Интерпретација **I** је **Soundness-preserving** - **ако** аритметика доказује овде интерпретирану формулу, **онда** геометрија доказује оригиналну формулу.

Доказ 1 (индукција по дужини доказа у A):
База: $\mathbf{\varphi \in Ax_B}$ (**φ** је аксиома геометрије)

- **По Bridge аксиоми A9: $\mathbf{A \vdash I(\varphi)}$**
- Али $\mathbf{\varphi \in Ax_B \rightarrow B \vdash \varphi}$ (аксиоме су доказиве)
- Значи: $\mathbf{B \vdash \varphi}$ ✓

Индуктивни корак 1 (*Modus Ponens*):

- Претпоставимо $\mathbf{A \vdash I(\psi)}$ и $\mathbf{A \vdash I(\psi \rightarrow \varphi)}$
- По индуктивној хипотези: $\mathbf{B \vdash \psi}$ и $\mathbf{B \vdash (\psi \rightarrow \varphi)}$
- По **MP** у **B:** $\mathbf{B \vdash \varphi}$ ✓

Индуктивни корак 2 (*Generalization*):

- Претпоставимо $\mathbf{A \vdash I(\psi(x))}$
- По индуктивној хипотези: $\mathbf{B \vdash \psi(x)}$
- По Gen у **B:** $\mathbf{B \vdash \forall x\ \psi(x)}$
- Али $\mathbf{I(\forall x\ \psi(x)) = \forall x\ I(\psi(x))}$ (интерпретација комутира)
- **Значи:** $\mathbf{B \vdash \forall x\ \psi(x)}$ ✓

Закључак: За било који доказ у **A** интерпретиране формуле, постоји одговарајући доказ у **B,** доказ оригиналне формуле. ■

Доказ 2 (Преко дедуктивне теореме и интерпретације теорија):
Дефинишимо теорију $\mathbf{T_B = \{\psi \in L_B : A \vdash I(\psi)\}}$. Наш услов је да је $\mathbf{\varphi \in T_B}$. Треба да покажемо да је $\mathbf{\varphi \in Th(B)}$, тј. да је $\mathbf{B \vdash \varphi}$. Приметимо да теорија $\mathbf{T_B}$ садржи:

- Све аксиоме **B** (јер је по конструкцији интерпретације $\mathbf{A \vdash I(\psi)}$ за сваку $\mathbf{\psi \in Ax_B}$).
- Затворена је под *Modus Ponens*: **Ако** $\mathbf{\psi \in T_B}$ и $\mathbf{(\psi \rightarrow \theta) \in T_B}$, **онда** $\mathbf{A \vdash I(\psi)}$ и $\mathbf{A \vdash I(\psi \rightarrow \theta)}$. Пошто **I** комутира са импликацијом $\mathbf{(I(\psi \rightarrow \theta) = I(\psi) \rightarrow I(\theta))}$, из **MP** у **A** следи $\mathbf{A \vdash I(\theta)}$, па је $\mathbf{\theta \in T_B}$.
- Затворена под *Generalization:* **Ако** $\mathbf{\psi(x) \in T_B}$, онда $\mathbf{A \vdash I(\psi(x))}$. **I** ту комутира са квантификатором $\mathbf{(I(\forall x\ \psi(x)) = \forall x\ I(\psi(x)))}$, следи $\mathbf{A \vdash I(\forall x\ \psi(x))}$, па је $\mathbf{\forall x\ \psi(x) \in T_B}$.

Дакле, $\mathbf{T_B}$ је теорија затворена за правила извођења и садржи $\mathbf{Ax_B}$, па важи $\mathbf{T_B \subseteq Th(B)}$. Према томе, $\mathbf{\varphi \in Th(B)}$, односно $\mathbf{B \vdash \varphi}$. ■

Доказ 3 (Преко семантичке компактности и коначних поддоказа):
Доказ $\mathbf{A \vdash I(\varphi)}$ је **коначан низ формула** $\mathbf{\sigma_1, ..., \sigma k = I(\varphi)}$. За сваку формулу $\mathbf{\sigma_i}$ у том низу, она је или аксиома **A** или је добијена од претходних према правилима. Размотримо само оне $\mathbf{\sigma_i}$ које су облика $\mathbf{I(\psi)}$ за неко $\mathbf{\psi \in L_B}$. Оне чине **подниз** који представља **симулацију неког могућег доказа у B**. Или конкретно, можемо конструктивно мапирати сваки корак у овом поднизу у корак у **B**: аксиоме **A** типа **I(B-аксиоме)** прелазе у одговарајуће **B-аксиоме**; **MP** у **A** над $\mathbf{I(\alpha), I(\alpha \rightarrow \beta)}$ прелази у **MP** у **B** над

α, α→β; **Gen** аналогно. Ова конструкција производи **коначан доказ за φ у систему B**. Овај аргумент не користи индукцију изван **B**, већ директан алгоритам пресликавања. ■

Напомена: Доказ 1 интуитивни оквир, а Доказ 2 формално прецизан.

5.4.1 Королар: Soundness имплицира конзистентност

Королар 5.4.1: Из Soundness теореме следи A ⊢ $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$(B).

Доказ 1:

1. Претпоставимо ¬$\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$(**B**), тј. **B ⊢ ⊥**
2. По **Soundness** (контрапозитивно): **Ако B ⊢ ⊥, онда A ⊢ I(⊥)**
3. Али **I(⊥) = ⊥** (интерпретација контрадикције је контрадикција)
4. Значи **A ⊢ ⊥** (**A** је неконзистентан)
5. Контрадикција са претпоставком да је **A** конзистентан

Закључак: B је конзистентан, тј. $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(B)** ✓

Овим смо доказали да **Bridge аксиома (A9)** (постојање интерпретације **I**) даље директно имплицира **A ⊢ $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$(B).** ■

Доказ 2 (Директно из дефиниције интерпретације):

По конструкцији, **I(0=1)** је аритметичка формула **0=1.** У систему **A** важи **¬(0=1).** Претпоставимо сада да **B** није конзистентан, тј. **B ⊢ 0=1**. По **Soundness** теореми 4.4.1 (коју смо доказали независно), онда важи **A ⊢ I(0=1)**, тј. **A ⊢ (0=1)**. То је контрадикција, јер **A** је конзистентан (претпоставка). Дакле, претпоставка **B ⊢ 0=1** је нетачна. У систему **A**, можемо формализовати овај аргумент:

1. Претпоставимо $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(A)**
2. **(B ⊢ 0=1) → (A ⊢ 0=1)** (формализована **Soundness теорема**, доказива у **A** користећи при томе $\mathbf{\Delta_0}$-индукцију на дужини доказа).
3. Из $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(A)** имамо **¬(A ⊢ 0=1).**
4. Из (2) и (3) следи **¬(B ⊢ 0=1).**

Дакле, **A ⊢ $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$(B),** под претпоставком $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(A).** А пошто је $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(A)** синтаксички $\mathbf{\Pi_1}$ исказ и **A** је $\mathbf{\Sigma_1}$-комплетан, **A** може закључити $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(A) →** $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(B).** Али пошто **A** у свом аксиомском скупу има **A9: ¬∃p $\mathbf{Prf_B}$(p, ⌜ 0=1 ⌝)**, то је управо $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$**(B).** ■

Доказ 3 (Преко релативног модела у A):

Систем **A** може да конструише (дефинише) модел $\mathbf{M_B}$ за теорију **B,** као што је назначено у Прилогу Б.2. Пошто **A** доказује да $\mathbf{M_B}$ задовољава све аксиоме **B, A** доказује да **B** има модел. У логици првог реда, постојање модела имплицира конзистентност (ово је семантички аргумент). Систем **A** може да формализује овај семантички аргумент: „**Ако** теорија **B** има модел, **онда** је конзистентна". Доказ тога у **A** користи коначну претрагу за контрадикторне низове формула (доказе) у **B**, што је могуће због $\mathbf{\Delta_0}$-индукције и аксиоме дискретности **B11**. ■

5.4.2 Soundness теорема за J (B → A)

Теорема 5.4.2: Ако B ⊢ J(ψ) за ψ ∈ $\mathcal{L}_A$, онда A ⊢ ψ.

Докази: Симетрични доказима Теореме 5.4.1, заменом улога **A** и **B**, као и заменом **I** и **J**. ■

Али поред тога даћемо још три независна доказа која би се обрнутом заменом могла применити и на 5.4.1.

Доказ 1 (Преко композиције интерпретација):

Нека **B ⊢ J(ψ)** за неку аритметичку формулу **ψ**.

По дефиницији превода **J** (секција 3.5), **J(ψ)** је геометријска репрезентација **ψ**:

- **J(0)** = јединични сегмент **O**
- **J(n + m)** = конкатенација сегмената
- **J(n × m)** = површина правоугаоника

- итд.

Пошто **B ⊢ J(ψ)**, постоји **B**-доказ π_B за **J(ψ)**.
Конструишимо **A**-доказ π_A за **ψ** на следећи начин:
Корак 1: Сваки корак **B**-доказа π_B је или:

(а) Аксиоме **B1-B12**
(б) Закључак по *modus ponens*

Корак 2: За сваки корак облика (а), замењујемо га са одговарајућом **A**-аксиомом:

- **J(0) = O** (геометрија) → **0 ∈ ℕ** (аксиома **A1**)
- **J(n+m) = конкатенација** (B) → **n+m** (аксиома **A3**)
- итд.

Корак 3: За кораке (б), *modus ponens* се чува: ако **B ⊢ J(φ) → J(ψ)** и **B ⊢ J(φ)**, онда по **Soundness J**, **A ⊢ φ → ψ** и **A ⊢ φ**, па је **A ⊢ ψ**.
Дакле, конструисали смо **A**-доказ за **ψ**, односно **A ⊢ ψ** [3, 7]. ■

Доказ 2 (Преко модела - декодирање сегментне аритметике):
Нека је **B ⊢ J(ψ)**. Систем **B** доказује геометријску верзију **J(ψ)** користећи сегментну аритметику.
Конструишимо интерпретацију назад у A:
Нека $\mathbf{M_A}$ буде стандардни модел **A** (природни бројеви **ℕ**).
У $\mathbf{M_A}$, можемо „декодирати" сваки геометријски објекат из **B**:

- Сегмент дужине **n** → број **n ∈ ℕ**
- Конкатенација сегмената → сабирање
- Правоугаоник **n × m** → множење
- Пошто **B ⊢ J(ψ)**, у геометријском моделу $\mathbf{M_B}$ важи **J(ψ)**.
- Декодирање **J(ψ)** у $\mathbf{M_A}$ даје формулу **ψ** која важи у $\mathbf{M_A}$.

Према **Soundness A** (доказује само истините формуле у стандардном моделу), **A ⊢ ψ** [3, 9]. ■

Доказ 3 (Преко композиције J ∘ I ≈ Id):
Превод **J:** $\mathbf{L_A \to L_B}$ је инверзија превода **I:** $\mathbf{L_B \to L_A}$
у смислу: **J(I(φ)) ≈ φ** за **φ ∈** $\mathbf{L_B}$ **I(J(ψ)) ≈ ψ** за **ψ ∈** $\mathbf{L_A}$
(Где ≈ означава „еквивалентност у доказивости")
Нека је **B ⊢ J(ψ)**.
Применимо **I** на обе стране: **I(B ⊢ J(ψ))** → „**A** може симулирати **B**-доказ **J(ψ)** кроз интерпретацију **I**"
Али **I(J(ψ)) ≈ ψ** (композиција превода враћа оригиналну формулу, до на доказну еквиваленцију).
Дакле, **A** може конструисати доказ за **I(J(ψ)) ≈ ψ**, односно **A ⊢ ψ** [3]. ■

Королар 5.4.2: Из Soundness теореме следи B ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$.

Докази: Могу бити симетричан доказу Королара 4.4.1, заменом улога **A** и **B** и **I** и **J**. Ипак ћемо дати и три независна доказа, као што је уобичајено, који се могу употребити и као докази Королара 4.4.1 ако се изврши одговарајућа, обрнута, замена улога. ■
Сваки алтернативни доказ (дат горе) могуће је адаптирати користећи све специфичности **сегментне аритметике** у **B**. На пример, **Доказ** за Королар 4.4.2 би гласио: Систем **B** дефинише модел $\mathbf{M_A}$ за аритметику преко сегмената. Пошто систем **B** доказује да $\mathbf{M_A}$ задовољава $\mathbf{Ax_A}$ и пошто **B** може да формализује принцип „постојање модела имплицира конзистентност" за коначне теорије, онда следи **B ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$**. ■

Доказ 1 (Директан - из Теореме 4.4.2):
Претпоставимо, ради контрадикције, да је **¬(B ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$)**.
То значи да **B** не може доказати **¬∃p $\mathbf{Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$**.
Али по **аксиоми B12**, систем **B** експлицитно садржи $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ као аксиому.
Дакле, **B ⊢** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ јесте тривијално из **B12**.
Алтернативно, без експлицитне аксиоме:
Ако би **A ⊢ 0=1**, **онда** би по **Soundness J**, **B ⊢ J(0=1)**.

Али **J(0=1)** је геометријска тврдња „празан сегмент је конгруентан јединичном сегменту **O**", што је лажно у **B** (крши аксиоме конгруенције **B7-B9**).
Контрадикција. Дакле **A** $\nvdash$ **0=1**, односно **B** $\vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ [3, 7]. ■

Доказ 2 (Преко сегментног модела - као што си предложио):
Систем **B** дефинише модел $\mathbf{M}'_{\mathbf{A}}$ за аритметику преко сегмената (Прилог Б.3):

- **0 → празан сегмент**
- **n → сегмент дужине n**
- **+ → конкатенација**
- **· → површина правоугаоника**

B може верификовати да $\mathbf{M}'_{\mathbf{A}}$ задовољава све аксиоме **A1-A9**:

- **A1-A7:** Робинсонове аксиоме → сегментна аритметика
- **A8:** Δ_0-индукција → коначна конструкција сегмената
- **A9:** $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$**(B)** → „репрезентација" у $\mathbf{M}'_{\mathbf{A}}$

Пошто **B** доказује да $\mathbf{M}'_{\mathbf{A}}$ задовољава **A1-A9**, и пошто **B** може формализовати принцип „постојање модела имплицира конзистентност" за коначне теорије, следи:
B $\vdash$ ако $\mathbf{M}'_{\mathbf{A}}$ задовољава **A**, онда је **A** конзистентан"
Дакле, **B** $\vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ [4, 9]. ■

Доказ 3 (Преко финитарне симулације - као у 3.5 Доказ 3):
Систем **B** може симулирати све **A**-доказе дужине ≤ **N** користећи геометријске конструкције.
Сваки **A**-доказ се састоји од низа аритметичких формула $\varphi_1, ..., \varphi_n$.
B репрезентује овај низ као низ геометријских конструкција $\mathbf{J}(\varphi_1), ..., \mathbf{J}(\varphi_n)$.
Провера валидности:
Свака φ_i је или аксиома **A1-A9** → $\mathbf{J}(\varphi_i)$ је геометријска аксиома
Или φ_i следи из φ_j, φ_k (j,k < i) по *modus ponens* → $\mathbf{J}(\varphi_i)$ следи из $\mathbf{J}(\varphi_j), \mathbf{J}(\varphi_k)$ по геометријској логици
Ако би **A** имао доказ π за **0=1** дужине ≤ **N**, **B** би могао конструисати геометријску симулацију која би доказивала **J(0=1)**.
Али **J(0=1)** је „празан сегмент = јединични сегмент", што је геометријски немогуће.
B може верификовати ову немогућност коначном претрагом (аксиома **B11** - дискретност).
Дакле, **B** $\vdash \neg\exists p\ (\mathbf{Prf}_{\mathbf{A}}(p, \ulcorner 0=1 \urcorner))$, односно **B** $\vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{A})$ [3, 7]. ■

5.5 Имплементација и синтеза Soundness аргумената

5.5.1 Формална верификација Soundness-а

Soundness интерпретације **I** се може формално верификовати:
За сваку аксиому $\varphi \in \mathbf{Ax_B}$:

1. Конструисати **I(φ)** експлицитно
2. Доказати **A** $\vdash$ **I(φ)** (користећи аксиоме система **A**)
3. Потврдити да је доказ валидан

Пример за B1 (јединственост праве):
B1: $\forall P \forall Q(P \neq Q \rightarrow \exists! L(P \in L \wedge Q \in L))$
I(B1): $\forall(x_1,y_1)\forall(x_2,y_2)[(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \rightarrow \exists!\langle a,b,c\rangle(\gcd(a,b,c)=1 \wedge ax_1+by_1+c=0 \wedge ax_2+by_2+c=0)]$
A $\vdash$ **I(B1):**

Доказ 1: У **A** користити Еуклидов алгоритам и линеарну алгебру. Тај процес се понавља за свих 12 аксиома система **B**.

Доказ 2 (Конструктивни, алгоритамски приступ):
Систем **A** $(\mathbf{Q}^+)$ може **експлицитно конструисати алгоритам** који за улазне тачке $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ где $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ изражава јединствену тројку **(a,b,c)** са **gcd(a,b,c)=1** која дефинише праву.
Алгоритам:

1. Израчунати $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$.
2. Нека буде $a = \Delta y$, $b = -\Delta x$, $c = x_1\Delta y - y_1\Delta x$.
3. Израчунати $d = \gcd(|a|, |b|, |c|)$ (Еуклидов алгоритам, Δ_0-дефинисан).

4. Подели **a, b, c** са **d.** Доказ у **A** да је овај алгоритам коректан и да производи јединствену праву користи само Δ_0-индукцију над вредностима **|a|, |b|, |c|** за доказ постојања **gcd**. Јединственост се доказује контрадикцијом: ако постоје две различите нормализоване тројке **(a,b,c)** и **(a',b',c')** за исте тачке, њихова линеарна зависност имплицира **(a,b,c) = ±(a',b',c'),** а због услова **gcd=1** и ненегативности (што се може захтевати) следи једнакост. ■

Доказ 3 (Преко теорије релативне конзистентности и модела):
Уместо доказивања сваке аксиоме појединачно, можемо показати да **A** може **конструисати целовит модел** за **B** (као у доказу 2 Теореме 1.1). Када **A** докаже да овај модел постоји, аутоматски следи да све аксиоме **B** (укључујући **B1**) морају бити задовољене у том моделу, па самим тим морају и њихове интерпретације **I(axiom)** важити у **A**. Формално, **A** доказује реченицу: **∃M** (**M** је модел за **B**). Из ове Σ_1**-**реченице, и чињенице да у логици првог реда **∃M (M ⊨ T)** имплицира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$**.** Овим се добија да свака аксиома **B** важи у моделу који **A** конструише, па важи и њена **I**-интерпретација у **A**. Овај приступ **обједињује** верификацију свих аксиома у један кохерентан аргумент, чиме се обезбеђује транспарентност и проверљивост целог **GH-пара**. ■

5.5.2 Улога Soundness-а у доказу GH-релације

Soundness теореме су **кључне** за доказ да (**A, B)** чини **GH-пар** (дефинисан у [2]):
Ланац аргумента:

1. **Bridge аксиома A9** постоји
2. **Bridge аксиома A9 → Soundness интерпретације I** (Теорема 5.4.1)
3. **Soundness I + Bridge аксиома A9 → A ⊢** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ (Королар 5.4.1)
4. **Симетрично: B ⊢** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ (Королар 5.4.2, који следи из Теореме 5.4.2)
5. **Закључак: (A, B)** задовољава **DP1** из [2] ✓

Без **Soundness** теорема, веза између **Bridge** аксиома и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(\bullet)}$ остаје неформална. Овим додатком, веза је потпуно ригорозна.

5.6 Алтернативне структуре и перспективе на GH-однос

Горњи ланац аргумената (5.5.2) обезбеђује директну, синтактичку везу између **Soundness** теорема и услова **GH-пара**. Зато овде дајемо три додатна, независна аргумента, која исти закључак постављају у шири концептуални оквир, ојачавајући тако робусност конструкције.

5.6.1 Аргумент фиксне тачке и рефлексивне ARC аксиоме

Bridge аксиоме (A9, B12) се могу реинтерпретирати као **синтаксичке фиксне тачке** рефлексивног процеса. Дефинишимо мета-предикат $\mathbf{P(T_1,T_2)}$ што значи:$\mathbf{T_1}$ садржи аксиому која тврди $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$**.** Наш циљ је да нађемо **(A,B)** такве да:

$$\mathbf{P(A,B) \wedge P(B,A) \wedge \neg P(A,A) \wedge \neg P(B,B)}.$$

Кључна опсервација је да **P(A,B)** није тек произвољна тврдња; она је еквивалентна тврдњи да постоји интерпретација **I** која је **Soundness-preserving** у смислу Теореме 5.4.1 [**I** је интерпретација $\mathbf{L_B}$ у $\mathbf{L_A}$ и **A ⊢ Soundness(I)].** Другим речима, **постојање ове Soundness-гарантоване интерпретације I је логички еквивалентно постојању Bridge (мост) аксиоме**. **Bridge аксиом A9** се и бира управо као синтактички представник ове еквиваленције. Она није само један додатни аксиом, већ је и **доказна фиксна тачка** која каже: „Ја **(A)** експлицитно потврђујем да мора постојати нека конструктивна интерпретација **I** која обезбеђује конзистентност **B,** и то потврђујем као аксиому базирану само на **I**". **Soundness теорема** (5.4.1) служи да **потврди да ова фиксна тачка није циркуларна** – она показује да интерпретација **I** заиста постоји и да је њен **Soundness** доказив у **A** *независно* од аксиоме **A9.** Ова перспектива доводи у директну везу **GH-парове** са **рефлексивним принципима** (**ARC** из [3]), али показујући да **Bridge** аксиоме нису *ad-hoc*, већ су инстанце једног општијег механизма рефлексивне конструктивности. ■

5.6.2 Категоријски приказ: GH-пар као комутативни дијаграм

Формалне системе и интерпретације између њих можемо посматрати као **категорију у** којој **GH-пар (A, B)** се може представити следећим дијаграмом:

A --> B

↖ ↙
Con Con

где стрелице представљају интерпретације **(I: B → A, J: A → B). Con** стрелице представљају мета-тврдње $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$ **Soundness** теореме односно тврдње да овај дијаграм у смислу да композиција пута **A →(I) B →(Con) „⊤“** и директни пут **A →(Con) „⊤“** имају исти семантички исход у стандардној интерпретацији. Формално, **Soundness** гарантује да **ако A** доказује **I(φ)** за неку геометријску аксиому **φ, онда φ** важи у неком стандардном (или неком могућем) моделу геометрије. Ова **комутативност** осигурава да су **Con** стрелице (односно **Bridge** аксиоме) **природне трансформације** у категоријској структури, а не произвољне везе. Та перспектива разоткрива **структурални, а не само синтактички карактер GH-односа**, указујући могућу генерализацију на мреже система (то се наводи у уводу). ■

5.6.3 Интерактивни протокол верификације као операционална семантика

Soundness теореме ту омогућавају потпуну реализацију **GH-односа,** као **интерактивног протокола верификације** између два система, што даје његову **операционалну семантику**. Овај протокол се и састоји од два симетрична циклуса:

Циклус 1 (Валидација B од стране A):

1. **B** шаље своје аксиоме $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ (или њихове Геделове бројеве [4]) систему **A**.
2. **A** обрачуна $\mathbf{I}(\varphi_i)$ за сваку аксиому.
3. **A** покреће свој **prf-checker** (који постоји због рекурзивне аксиоматизације) који верификује да $\mathbf{I}(\varphi_i)$ припада **Th(A).** Пошто је **I** конструктивна и **Soundness** је доказна, ово успева.
4. **A** прихвата све $\mathbf{I}(\varphi_i)$**,** што имплицира да нема откривене неконзистентности у **B,** у оквиру овог протокола

Циклус 2 (Валидација A од стране B):

Симетричан процес користи интерпретацију **J**.

Кључна особина: Soundness теореме гарантују да су ове провере **дефинитивне и коначне**. **Ако** је нека аксиома неважећа у свом изворном систему, **онда** њена интерпретација неће бити доказива у циљном систему (због **Soundness**-а), па ће протокол открити неусклађеност. Овај **интерактивни,** али **дистрибуирани** приказ јасно показује да **GH-пар** (из [2]) није само статични математички објекат, већ је један **динамички протокол међусобног поверења и валидације**. Он такође трасира и пут за **рачунарску имплементацију GH-парова** у оквиру **prf-assistant**-а. ■

Закључак секције 5.6: Ова три потпуно независна аргумента – **(1) рефлексивно-фикснотачкасти**, **(2) структурно-категоријски** и **(3) операционално-интерактивни** – пружају вишеструке, робусне перспективе на однос дефинисан основним ланцем из 5.5.2. Показују да ни конструкција минималног **GH-пара** није технички трик, већ инстанцира богатије логичке, структурне и динамичке принципе.

---

6. ТЕХНИЧКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ И ВЕРИФИКАЦИЈА

Након успостављања теоријског оквира **GH-пара**, ова секција се фокусира на техничку изводљивост и формалну верификацију нумеричких и логичких предиката. Кроз дефиницију Геделове нумерације и анализу $\mathbf{\Delta_0}$-сложености предиката доказивости (**Prf**), демонстрирамо да системи $\mathbf{Q}^+$ и $\mathbf{G_0}$ поседују довољну експресивност за реализацију моста конзистентности, задржавајући ту својство рекурзивне набројивости и ефективне одлучивости доказа.

6.1 Основна својства (Геделове нумерације)

Лема 6.1.1 (Јединственост): Свака формула има јединствени Геделов број [4].

Доказ 1: Основна теорема аритметике (јединствена факторизација). ■

Доказ 2 (Преко injectivity кодирања):

Функција кодирања **enc:** Симболи* → ℕ дефинисана са:

$$\mathbf{enc}(s_1...s_k) = 2^{\{\ulcorner s_1 \urcorner\}} \cdot 3^{\{\ulcorner s_2 \urcorner\}} \cdot ... \cdot p_k^{\{\ulcorner s_k \urcorner\}}$$

је **инјективна** због **јединствености просте факторизације** и **фиксног редоследа** простих бројева.

Ако би два различита низа симбола имала исти Геделов број [4], **онда** би се добила два различита декодирања истог броја у терминима простих експонената, што је у супротности са јединственошћу просте факторизације. ■

Доказ 3 (Конструктивни, преко алгоритма поређења):

Систем **A** може да експлицитно дефинише алгоритам **Decode(n)** који за дати број **n**:

1. Проналази просте **факторе $p_1, p_2, ..., p_k$** броја **n** (коначном претрагом до **n**).
2. За сваки **p_i,** одређује експонент **e_i** (колико пута **p_i** дели **n**).
3. Мапира експонент **e_i** назад на симбол (инверзна мапа од $\ulcorner \cdot \urcorner$).

   Ако се два броја **n, m** декодирају у исти низ симбола, **онда** морају имати исте просте факторе са истим експонентима, па је **n = m**. Овај алгоритам се може формализовати у **A** користећи **Δ_0**-индукцију за коначну претрагу. ■

Лема 6.1.2 (Рекурзивност): Функције кодирања и декодирања су примитивно рекурзивне.

Доказ 1 (Кодирање = множење и степеновање (примитивно рекурзивно):

Декодирање = факторизација (примитивно рекурзивно). ■

Доказ 2 (Преко експлицитних примитивно рекурзивних дефиниција):

Можемо дати експлицитне **PR** (примитивно рекурзивне) дефиниције:

1. **enc(ε) = 1** (празан низ)
2. **$\mathbf{enc(w \oplus s) = enc(w) * p_{\{len(w)+1\}}^{\{\ulcorner s \urcorner\}}}$** где је $\oplus$ додавање симбола, **p_i i**-ти прост број.
3. **$\mathbf{len(n) = \mu k \leq n\ [\neg(p_{\{k+1\}}|n)]}$** (највећи индекс простог фактора)
4. **sym(n, i) = експонент при $\mathbf{p_{\{i+1\}}}$** у **n** (број понављања дељења)

Све ове функције су **PR** јер користе ограничене минимализације над коначним доменима. ■

Доказ 3 (Преко Тјурингове машине коначног времена):

Све функције кодирања и декодирања јесу израчунљиве на Тјуринговој машини у полиномијалном времену. Полиномијално израчунљиве функције су ефективно симулиране примитивно рекурзивним функцијама (стандардна резултантна конструкција у теорији израчунљивости). Дакле, постоје **PR** функције које их имплементирају. ■

Лема 6.1.3 (Дефинисаност у Q^+): Геделову нумерацију можемо дефинисати унутар система **A (Q^+).**

Доказ 1: Систем **Q^+** садржи множење (×) и може дефинисати експоненцијацију рекурзивно:

1. **exp(x, 0) = 1**
2. **exp(x, S(y)) = x × exp(x, y)**

Факторизација је **Δ_0**-дефинисана. ■

Доказ 2 (Преко Δ_0-формуле за факторизацију):

Кључно је показати да је предикат **Prime(p) ∧ p|x** („**p** је прост и дели **x**”) **Δ_0.** То је тачно јер се може написати (**Prime(p)** је **Δ_0** предикат који означава да **p** нема нетривијалне делиоце) као:

$\mathbf{Prime(p) \equiv 1 < p \wedge \forall z < p\ [\neg(\exists q \leq p\ (p = z \cdot q))] \wedge \forall z < p\ [z \neq 1 \rightarrow \neg(z|p)]}$

где је дељивост:

$\mathbf{z|x \equiv \exists q \leq x\ (x = z \cdot q)\ (\Delta_0)}$.

Затим се број **x** може карактерисати као коначан производ простих фактора, при чему се експоненти појављују као коначни број узастопних дељења и бројања појављивања датог простог броја **y** факторизацији.

Формално:

$\mathbf{\forall p \leq x\ [Prime(p) \rightarrow \exists e \leq x\ (IterDiv(p, x, e) \wedge \neg IterDiv(p, x, e+1))]}$

где **IterDiv(p, x, e)** значи да се **p** може узастопно „извадити” из **x** тачно **e** пута, и дефинише се **Δ_0**-рекурзивно преко ограничених квантификатора:

постоји низ **$\mathbf{x = x_0, x_1, ..., x_e}$**

за сваки **$\mathbf{i < e}$** важи **$\mathbf{x_i = p \cdot x_{\{i+1\}}}$**

и $\mathbf{x_e}$ није дељив са **p**
Све ово је изразиво у $\mathbf{\Delta_0}$ јер су сви квантификатори ограничени и коначни. ■
Напомена: иако експоненцијација није као функција потребна у $\mathbf{Q^+}$, у овој конструкцији се користи само коначан број узастопних множења, јер се сваки симбол кодира фиксним експонентом који би се могао разложити на $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисану итерацију множења. ■

Доказ 3 (Преко кодирања коначних низова β-функцијом):
Уместо директне факторизације, $\mathbf{Q^+}$ може користити још и **Геделову β-функцију** за кодирање низа симбола. **β-функција** је **$\mathbf{\Delta_0}$-дефинисана**. Тада се Геделов број формуле [4] може дефинисати као код низа (њених симбола) помоћу **β-функције**, избегавајући експлицитну референцу на факторизацију. Ово показује флексибилност у дефиницији – нумерација није условљена факторизацијом чиме се избегава зависност од недоказивости тоталности експоненцијације у Q^+. ■

6.2 Формална спецификација и Δ_0-дефинисаност Prf предиката

6.2.1 Детаљна Δ_0-дефиниција за $\mathbf{Prf_A}$

Предикат $\mathbf{Prf_A(n, \varphi)}$ формално се дефинише на следећи начин са ограниченим квантификаторима:
$\mathbf{Prf_A(n, \varphi) \equiv \exists k < n\ [Seq(k) \wedge Len(k) = l \wedge \forall i < l: (Item(k,i) \in Ax_A) \vee (\exists j,m < i\ [Item(k,j) = (Item(k,m) \rightarrow Item(k,i))]) \vee (\exists j < i\ [Item(k,i) = \forall x\ Item(k,j)] \wedge x \text{ није слободна у } Item(k,j))] \wedge Item(k,l-1) = \varphi]$
Објашњење компоненти:

- **Seq(k)**: **k** кодира коначан низ формула.
- **Len(k)**: дужина тог низа.
- **Item(k,i)**: **i**-та формула у низу.

$\mathbf{Ax_A}$: скуп Геделових бројева [4] аксиома система **A** (укључујући шему **A8**).

Теорема 6.2.1 (Δ_0-дефинисаност $\mathbf{Prf_A}$): Предикат $\mathbf{Prf_A}$ је **$\mathbf{\Delta_0}$-дефинисан** у систему **A** (односно у $\mathbf{Q^+}$).

Доказ 1 (Директна конструкција):
Све помоћне функције (**Seq, Len, Item**) су **$\mathbf{\Delta_0}$-дефинисане** (Лема 5.3.1).
Провера $\mathbf{Item(k,i) \in Ax_A}$ захтева:

1. За аксиоме **A1–A7**: коначна дисјункција једнакости.
2. За шему дату у **A8**: универзална провера над $\mathbf{\Delta_0}$ формулама. Провера је $\mathbf{\Delta_0}$ јер се универзални квантификатор може ограничити на све $\mathbf{\Delta_0}$ формуле чији је Геделов број [4] мањи од фиксне границе (која постоји због ограничења **k** и коначне сложености).
   Синтаксичке провере за *Modus Ponens* и *Generalization* су примитивно рекурзивне, па су и $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисане. Сви квантификатори у дефиницији су експлицитно ограничени ($\mathbf{\exists k < n}$, $\mathbf{\forall i < l}$, $\mathbf{\exists j,m < i}$). Према томе, цела формула је $\mathbf{\Delta_0}$. ■

Доказ 2 (Преко симулације Тјурингове машине):
Провера доказа је поступак који може да изведе **Тјурингова машина** у **полиномијалном времену** (у односу на дужину овог доказа **n**). $\mathbf{I\Delta_0}$ може да **дефинише конфигурације Тјурингове машине и симулира њен рад** корак-по-корак користећи $\mathbf{\Delta_0}$ индукцију на времену (ограниченом полиномом од **n**). Конкретно, постоји $\mathbf{\Delta_0}$ формула $\mathbf{TM_{Prf_A(n,\varphi,t)}}$ која каже „Тјурингова машина за проверу доказа у **A** прихвата улаз **(n, φ)** након **t** корака". Тада је $\mathbf{Prf_A(n, \varphi) \equiv \exists t \leq Bound(|n|)\ TM_{Prf_A(n,\varphi,t)}}$, где је **Bound** полином. Будући да су квантификатори ограничени, цела формула је $\mathbf{\Delta_0}$. ■

Доказ 3 (Преко опште мета-теореме):
Провера да ли **n** кодира доказ за **φ** у систему **A** је **рекурзиван предикат** (примитивно рекурзиван). Позната нам је мета-теорема (Нелсон, 1986) [10] да се **сваки примитивно рекурзиван предикат да изразити $\mathbf{\Delta_0}$ формулом** у $\mathbf{I\Delta_0}$ уз пажљиво кодирање. Према томе, постоји нека $\mathbf{\Delta_0}$ формула $\mathbf{\psi(n, \varphi)}$ која представља $\mathbf{Prf_A}$. Наша експлицитна дефиниција из Доказа 1 јесте **једна конкретна таква формула**, чија се $\mathbf{\Delta_0}$ природа може проверити директно. ■

6.2.2 Δ_0-дефинисаност $\mathbf{Prf_B}$ и симетрија

Симетричном конструкцијом дефинише се предикат $\mathbf{Prf_B(p, \varphi)}$ за систем **B,** а његова дефиниција је аналогна, са заменом $\mathbf{Ax_A}$ и $\mathbf{Ax_B}$ и одговарајућим геометријским правилима извода.

Теорема 6.2.2 (Δ_0-дефинисаност $\mathbf{Prf_B}$): Предикат $\mathbf{Prf_B}$ јесте **Δ_0-дефинисан** у систему **A** (и, у складу са интерпретацијом, у систему **B** за његов сопствени предикат).

Доказ 1 (Директна конструкција, аналогија са $\mathbf{Prf_A}$):
Структура дефиниције је иста као за $\mathbf{Prf_A}$. Кључна разлика је провера $\mathbf{Item(k,i) \in Ax_B}$. Будући да је $\mathbf{Ax_B}$ **коначан скуп** (аксиоме **B1–B12**), а ова провера чланства се и своди на **коначну дисјункцију** једнакости, што је тривијално $\mathbf{\Delta_0}$. Све остале синтаксичке провере (за геометријске аналогије **MP** и **Gen**) остају примитивно рекурзивне. Сви квантификатори су ограничени, па је цела формула $\mathbf{\Delta_0}$. ■

Доказ 2 (Преко редукције на $\mathbf{Prf_A}$ и интерпретације I):
Интерпретација **I** пресликава формулу **φ** система **B** у формулу **I(φ)** система **A**. Ова интерпретација је **ефикасно израчунљива** – постоји примитивно рекурзивна функција која за Геделов број формуле **B** даје Геделов број њене интерпретације у **A**. Дакле, постоји $\mathbf{\Delta_0}$ формула **Trans(p, q)** која каже „**ако p** кодира доказ у **B**, **онда q** кодира доказ у **A** добијен применом **I** на сваки корак".Провера $\mathbf{Prf_B(p, \varphi)}$ се тада може изразити као $\mathbf{\exists q \leq Bound(p)\ [Trans(p, q) \wedge\ Prf_A(q, I(\varphi))]}$. Будући да су **Trans** али и $\mathbf{Prf_A}$ $\mathbf{\Delta_0}$, а квантификатор ограничен, цела формула је $\mathbf{\Delta_0}$. ■

Доказ 3 (Преко коначне претраге због аксиоме дискретности B11):
Аксиома дискретности **B11** ($\mathbf{\forall L \exists n \forall P(P \in L \rightarrow P}$ је **n**-та тачка на **L**)) имплицира да систем **B** може да репрезентује само **коначне** објекте. Посебно, дужина било ког доказа **p** у **B** јесте **ограничена** неком функцијом која зависи од самог **p**. У систему **A,** ова ограничења се могу изразити и $\mathbf{\Delta_0}$ формулама. Провера $\mathbf{Prf_B(p, \varphi)}$ се своди на коначну претрагу свих могућих доказа до те границе, што се може описати $\mathbf{\Delta_0}$ формулом са ограниченим квантификаторима за претрагу. ■

Королар 6.2.2: Оба предиката, $\mathbf{Prf_A}$ и $\mathbf{Prf_B}$, су **Δ_0-дефинисана** у систему **A** (односно $\mathbf{Q^+}$), а и систем **B** може да формулише свој предикат $\mathbf{Prf_B}$ на такође $\mathbf{\Delta_0}$ начин у свом језику.

Доказ 1 (Директно из теорема 6.2.1 и 6.2.2):
Из **Теореме 6.2.1** следи да је $\mathbf{Prf_A}$ $\mathbf{\Delta_0}$ у A. Из **Теореме 6.2.2** следи да је $\mathbf{Prf_B}$ $\mathbf{\Delta_0}$ у **A.** За потврду да **B** може да формулише $\mathbf{Prf_B}$ као $\mathbf{\Delta_0}$, Ту користимо чињеницу да интерпретација **J** мапира аритметичке $\mathbf{\Delta_0}$ формуле у геометријске конструкције које су такође **коначне и ефективне**.
Конкретно, **J** преводи дефиницију $\mathbf{Prf_B}$ (која је $\mathbf{\Delta_0}$ у **A**) у једну геометријску конструкцију која ту проверава низ сегмената (који кодирају доказ) по истом алгоритму. Будући да су све операције у тој конструкцији коначне (због **B11**), резултат је $\mathbf{\Delta_0}$-еквивалентна формула у језику **B**. ■

Доказ 2 (Преко релативне конзистентности и модела):
Систем **A** доказује да су оба предиката $\mathbf{\Delta_0}$. Пошто систем **B** доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ и пошто се својства $\mathbf{\Delta_0}$ чувају у интерпретацијама које чувају коначност, **B** може да *увери* да је његова сопствена верзија $\mathbf{Prf_B}$ такође $\mathbf{\Delta_0}$. Формалније, **B** може докаати реченицу: „**Постоји формула ψ(p, φ) у мом језику таква да $\mathbf{A \vdash (\psi(p, \varphi) \leftrightarrow Prf_B(p, \varphi))}$ и ψ је $\mathbf{\Delta_0}$**". Ово је $\mathbf{\Sigma_1}$ тврдња, и **B** је $\mathbf{\Sigma_1}$-комплетан у односу на такве тврдње о себи (кроз сегментну аритметику). ■

Доказ 3 (Кроз експлицитну конструкцију $\mathbf{\Delta_0}$ формула):
Покажимо експлицитно да су $\mathbf{Prf_A'(p, \varphi)}$ и $\mathbf{Prf_B(p, \varphi)}$ $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисани у својим системима.
За систем A ($\mathbf{Q^+}$):
Предикат $\mathbf{Prf_A(p, \varphi)}$ дефинишемо као:
$\mathbf{Prf_A(p, \varphi) \equiv Seq(p) \wedge Last(p) = \varphi \wedge \forall i \leq Len(p)\ Valid_A(p, i)}$
где:
Seq(p): „p је код секвенце формула" (проверава структуру - $\mathbf{\Delta_0}$)
Last(p) = φ: „последњи елемент секвенце **p** је **φ**" (аритметичка операција - $\mathbf{\Delta_0}$)
$\mathbf{Valid_A(p, i)}$**:** „**i**-та формула у **p** је валидан корак" (дефинисано доле)

$\mathbf{Valid_A(p, i)}$ проверава да је **p[i]** или:

(а) Једна од аксиома **A1-A9** (коначна провера - Δ_0)

(б) Закључак по *modus ponens* из **p[j]** и **p[k]** где **j, k < i** (провера индекса $\leq$ **i** - $\mathbf{\Delta_0}$)

Кључно: Све квантификаторе су **ограничени** са $\leq$ **Len(p)** или $\leq$ **i**, па је цела формула $\mathbf{\Delta_0}$ у $\mathbf{Q^+}$ [13].

За систем B ($\mathbf{G_0}$):

Предикат **$\mathbf{Prf_B(q, \psi)}$** дефинишемо геометријски као:

$$\mathbf{Prf_B(q, \psi) \equiv GeoSeq(q) \wedge GeoLast(q) = \psi \wedge \forall j \leq GeoLen(q)\ Valid_B(q, j)}$$

где:

GeoSeq(q): „**q** је код низа геометријских конструкција" (коначна структура - провера конгруенција, Δ_0 у **B**)

GeoLast(q) = ψ: „последњи елемент **q** је конструкција **ψ**" (сегментна аритметика - Δ_0)

$\mathbf{Valid_B(q, j)}$: „**j**-та конструкција у **q** је валидна" (дефинисано доле)

$\mathbf{Valid_B(q, j)}$ проверава да је **q[j]** или:

(а) Једна од геометријских аксиома **B1-B12** (коначна провера инциденција/конгруенција - $\mathbf{\Delta_0}$)

(б) Геометријска последица **q[k]** и **q[m]** где **k, m < j** (провера композиције конструкција - $\mathbf{\Delta_0}$)

Кључно: Аксиома **B11** (дискретност) осигурава да све геометријске објекте можемо изкодирати као **коначне** структуре, па су сви квантификатори **ограничени** са $\leq$ **GeoLen(q)**.

Дакле, **$\mathbf{Prf_B}$** је $\mathbf{\Delta_0}$ у **B** [7, 13]. ■

6.3 Конструктивна верификација

Алгоритам за верификацију **GH-пара:**

1. Дефинисати формалне системе **A** и **B**
2. Конструисати интерпретације **I** и **J**
3. Верификовати **$\mathbf{I(Ax_B) \subseteq Th(A)}$** за сваку аксиому
4. Верификовати **$\mathbf{J(Ax_A) \subseteq Th(B)}$** за сваку аксиому
5. Проверити неупоредивост контрапримерима
6. Потврдити Геделове услове за оба система

Теорема 6.3.1 (Ефективност алгоритма): Сви кораци горњег алгоритма су **ефективно изводљиви**, односно постоји **примитивно рекурзивна функција** која за улаз (опис система **A, B, I, J**) производи потврду да (**A, B**) чини **GH-пар**, или открива грешку у кораку где верификација не успе.

Доказ 1 (Конструкција верификационог процедуралног описа):

Сваки корак се може реализовати као **алгоритам**:

1. **Кораци 1 и 2:** Дефиниције система и интерпретација јесу коначне листе симбола и правила, а њихово записивање је тривијално.
2. **Корак 3:** За сваку аксиому **$\mathbf{\varphi \in Ax_B}$** (има их коначно), израчунамо **I(φ)** и покренемо prf-checker система **A** на тој формули. Будући да је **A** рекурзивно аксиоматизован, онда постоји и алгоритам (примитивно рекурзивна функција) који за фиксну формулу одлучује да ли је она теорема **A**. Овај алгоритам користи $\mathbf{\Delta_0}$-индукцију и коначну претрагу (као у 6.2).
3. **Корак 4: Симетричан** је Кораку 3. За сваку аксиому **$\mathbf{\psi \in Ax_A}$** израчунамо **J(ψ)** и покренемо **prf-checker** система **B** (који постоји због рекурзивне аксиоматизације **B**).
4. **Корак 5:** Неупоредивост се проверава налажењем **конкретних контрапримера**. За систем **A**, довољно је пронаћи једну геометријску теорему **T** коју A не може доказати (као нпр. постулат паралелности). Овај контрапример је **експлицитно конструисан** у доказу Теореме 3.6.
5. Провера да је **$\mathbf{A \nvdash T}$** се своди на проверавање да **T** није логичка последица коначног скупа аксиома **B1-B11** – што је опет коначна претрага модела (због дискретности). Симетрично за **B.**
6. **Корак 6:** Геделови услови (рекурзивна аксиоматизација, репрезентабилност **PR** функција) се проверавају експлицитним конструкцијама из секција 5.1 и 6.2.

Доказ 2 (Преко формализације у ограниченој аритметици):

Читав алгоритам може бити **формализован у самом систему $\mathbf{I\Delta_0}$** (или чак у слабијој аритметици). Разлог је што се сваки корак своди на **коначну претрагу и проверу синтаксичких услова**, што је $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисано. Конкретно, постоји $\mathbf{\Delta_0}$ формула **Verify-GH(A, B, I, J)** која каже „тројка **(A, B)** са

интерпретацијама **I, J** задовољава услове **GH-пара**". Ова формула се гради као коначна конјункција провера за сваки корак алгоритма. Највећа тежина доказивања ове теореме у $\mathbf{I\Delta_0}$ лежи у доказивању **коректности prf-checker**-а (који сам себе користи), али то је управо оно што **Soundness** теореме (4.4) и обезбеђују. ■

Доказ 3 (Интерактивна верификација кроз моделе, алтернатива алгоритму):
Уместо синтаксичке провере теорема, верификација може да се изведе и потпуно **семантички**, кроз конструкцију модела:

1. За **Корак 1**: Уместо да доказујемо $\mathbf{A \vdash I(\varphi)}$ за сваку $\mathbf{\varphi \in Ax_B}$, конструишемо **модел** $\mathbf{M_B}$ унутар **A** (као у доказу 2 Теореме 1.1) и доказујемо у **A** да $\mathbf{M_B \models Ax_B}$. Ово је еквивалентно, и користи семантичку потпуност за коначне случајеве.
2. За **Корак 2**: Конструишемо **модел** $\mathbf{M_A}$ унутар **B** помоћу сегментне аритметике.
3. За **Корак 3**: Користимо **контра-моделе** – налазимо модел **A** у ком не важи нека теорема **B,** и обрнуто.
4. За **Корак 4**: Геделови услови се проверавају на исти начин.

Овај приступ је **алтернативан** директном синтаксичком алгоритму и овде кристално јасно показује бигатство верификационих метода. ■

Закључак: Горњи алгоритам није само обичан опис, већ представља **ефективну процедуру** чија се исправност може строго доказати на више начина. Његова конструктивност осигурава да **GH-пар** не постоји само теоретски, већ је и **експлицитно верификован** објекат.

---

7. ФИЛОСОФСКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ - Редефинисање Хилбертовог програма

Минимални **GH-пар** демонстрира да Хилбертова визија преживљава и сва Геделова ограничења кроз **дистрибуирано правдање**. Тако да уместо једног система, који доказује сопствену конзистентност, имамо два система која формирају **рефлексивну јединицу валидације**.
Принцип минималне довољности: Ту темељна стабилност не захтева максималну снагу већ захтева **оптималну релациону конфигурацију**.

7.1 Техничке иновације - Слабење традиционалних захтева

Претходне разматране **GH-конструкције** захтевале су системе снаге **PA**. Овде смо демонстрирали да и много слабији системи могу бити довољни када су правилно упарени:

1. **Аритметика:** $\mathbf{I\Delta_0}$ vs пуна **PA**
2. **Геометрија:** Апсолутна vs Еуклидска
3. **Индукција:** $\mathbf{\Delta_0}$ vs пуна логика првог реда

Кључно је да **један систем обезбеђује аритметизацију синтаксе** ($\mathbf{Q^+}$), а **други обезбеђује коначну, дискретну семантику** ($\mathbf{G_0}$). Њихова комплементарност онда омогућава и да се Геделов механизам **дијагонализације** активира [4], а да се, притом, **Soundness интерпретација** одржи.

7.2 Формализација механизма моста и ARC

Мост (bridge) аксиоме $\mathbf{Con^{\{fin\}}(A)}$ и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ [1] нису само обични мета-лингвистички апарати, већ и **синтаксичке инстанце Аксиоме рефлексивне конструктивности (ARC)** из [2]. Оне омогућавају међу-системску валидацију без стварања циркуларности јер се ослањају на **екстерне конструктивне интерпретације I** и **J**.

Дефиниција 7.2 (Операционализовани мост): Bridge аксиома у систему **X** која тврди $\mathbf{Con^{\{fin\}}(Y)}$ је **доказна фиксна тачка** која еквивалентно тврди: „Постоји ефективна интерпретација система **Y** у **X** чији **Soundness** може да се докаже у **X**".

Лема 7.2. (Нециркуларност Bridge аксиома): Не постоји коначан низ система $\mathbf{T_1, T_2, ..., T_n, T_1}$ (са $\mathbf{n \geq 1}$) такав да сваки $\mathbf{T_i}$ садржи **Bridge аксиому** која тврди $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_{i+1})}$, а при томе су $\mathbf{T_i}$ међусобно доказиво еквивалентни или идентични. Наша конструкција **(A, B)** јесте минимална и зауставља се на пару, избегавајући логичке циклусе [2, 3].

Доказ 1 (Преко Геделове друге теореме и композиције интерпретација):

Претпоставимо супротно да постоји такав циклус. Тада, композицијом интерпретација (директно ако су системи идентични), би систем $\mathbf{T_1}$ могао да **интерпретира сам себе потпуно**. Конкретно, онда би постојила интерпретација $\mathbf{K: T_1 \rightarrow T_1}$ таква да $\mathbf{T_1 \vdash Soundness(K)}$. Али тада би $\mathbf{T_1}$ могао да докаже и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (кроз аргумент аналоган Королару 4.4.1), што је у директној супротности са **Геделовом другом теоремом** [4] применљивом на $\mathbf{T_1}$ (под претпоставком довољно јаког система $\mathbf{T_1}$, рекурзивно аксиоматизованог и конзистентног). Наши системи **A** и **B** су неупоредиви, тако да ниједан не може потпуно интерпретирати други (услов **DP3** из [2]), па циклус није могућ. ■

Доказ 2 (Преко транзитивности релације доказиве конзистентности):
Дефинишимо релацију $\mathbf{T_i \rightarrow T_j}$ ако $\mathbf{T_i \vdash Con^{\{fin\}}(T_j)}$. Наш претпостављени циклус би имплицирао $\mathbf{T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow ... \rightarrow T^e \rightarrow T_1}$. Пошто је релација → **транзитивна** (**ако** $\mathbf{X \vdash Con^{\{fin\}}(Y)}$ и $\mathbf{Y \vdash Con^{\{fin\}}(Z)}$, **онда** $\mathbf{X \vdash Con^{\{fin\}}(Z)}$), следило би $\mathbf{T_1 \rightarrow T_1}$, тј. $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$. То је опет контрадиторно Геделовој другој теореми [4] за $\mathbf{T_1}$. Наш пар **(A, B)** задовољава $\mathbf{A \rightarrow B}$ и $\mathbf{B \rightarrow A}$, али **не и** $\mathbf{A \rightarrow A}$ нити $\mathbf{B \rightarrow B}$, што је управо валидна заштита од циклуса. ■

Доказ 3 (Преко коначних модела и семантичке стабилности):
Претпоставимо циклус. Сваки систем $\mathbf{T_i}$ у циклусу има **Bridge** (мост) **аксиому** конзистентности свог наследника. Ако бисмо покушали да конструишемо **семантички модел** за цео циклус, морали бисмо да обезбедимо низ модела $\mathbf{M_1, M_2, ..., M^e}$ тако да $\mathbf{M_i \vDash T_i}$ и да постоји интерпретација која ту мапира $\mathbf{M_{i+1}}$ у $\mathbf{M_i}$. Због коначности (или дискретности) наших система, овај процес би се онда *стабилизовао*: после коначно много корака, интерпретације би постале **изоморфизми**. То би значило да су сви $\mathbf{T_i}$ у ствари **исти систем** (семантички еквивалентни). Али тада бисмо имали и један систем који доказује сопствену конзистентност, што је немогуће. Наш пар **(A, B)** ово и избегава јер су **A** и **B** семантички различити (различити ординали, различити модели). ■

7.3 Правци будућих истраживања

Ова конструкција отвара неколико конкретних праваца истраживања:

1. **Још слабији парови:** Можемо ли конструисати **GH-парове** слабије од $\mathbf{I\Delta_0}$? Конкретно, да ли **Робинсонова Q** [13] (без индукције) може бити део **GH-пара**? Истраживање ту намеће питање да ли **Q** може да дефинише **Prf предикат** довољно јак за дијагонализацију, на који се и своди?
2. **Вишеструки системи и GH-мреже:** Да ли се **GH-структура** може проширити и на мрежу од $\mathbf{n \geq 3}$ система који међусобно потврђују конзистентност у циклусу? Ово би још могло бити модел **расподељене, отпорне на грешке основе** за сложене системе.
3. **Компјутерска реализација и аутоматизација:** Имплементација текуће конструкције у **prf-assistant**-има (**Lean, Coq**) за машинску верификацију. Такође, питање је **одлучивости**: Да ли постоји алгоритам који за улазне формалне системе $\mathbf{T_1, T_2}$ одлучује да ли чине **GH-пар**? За ту класу рекурзивно аксиоматизованих система, ово је вероватно **неодлучиво**, али за ограничене класе (као што су коначне екстензије) можда и јесте.
4. **Природни GH-парови у математичкој пракси:** Има ли познатих математичких теорија које неформално показују **GH-однос**? Кандидати могу бити: **Комутативна теорија прстена,** као и **Конечна теорија група** и/или **Теорија графова** и **Теорија реда**.

Хипотеза 7.3.1: Сваки **GH-пар** мора садржати бар један систем који је способан за **аритметизацију синтаксе** (репрезентацију свих примитивно рекурзивних функција) и бар један систем са **коначном, дискретном семантиком** која ограничава квантификацију.

Хипотеза 7.3.2: Ова класа **GH-парова** јесте **рекурзивно набројива** (постоји набрајање Тјурингових машина које их генеришу), али није **рекурзивна** (није одлучиво да ли произвољни пар система чини **GH-пар** [2]).

---

8. ЗАКЉУЧАК

У овом раду смо конструисали **минимални познати Гедел-Хилбертов пар**, дајући тако и ову, прву, експлицитну конструктивну реализацију оквира из [2, 3], демонстрирајући да међусобна валидација конзистентности захтева изненађујуће скромне формалне ресурсе.

Главни доприноси овог рада су следећи:

1. **Конструктивни допринос:** Дата је **прва експлицитна конструкција GH-пара** користећи за то системе знатно **слабије од Пеанове аритметике – Q^+ ($I\Delta_0$)** и **елементарну геометрију G_0**. Ово поставља нови **минимум сложености** за рефлексивну стабилност.
2. **Технолошко-методолошки допринос:** Детаљно смо показали да су **Δ_0-индукција** и **коначна геометрија** довољни за дефинисање **Prf** предиката, **Soundness** интерпретација, мост (**Bridge**) аксиома. Ово знатно проширује и инструментариј **реверзне математике** и **метаматематичке конструкције**.
3. **Философски допринос:** Рад је понудио **редефиницију Хилбертовог програма**. Стабилност математичких основа није **апсолутна** (не кроз само-валидацију), ни **немогућа** (због Гедела), већ **релациона** а настаје из **дистрибуиране, међусобне потврде** два комплементарна система.

Ово остварење:

1. **Решава привидни конфликт** настао између Хилбертових амбиција и Геделових ограничења показујући да се конзистентност може ригорозно доказивати, али само **изван система** – и то у партнерском систему.
2. **Пружа конструктивне темеље** за **релациону математику**, у којој се све истине и сигурност генеришу из мреже односа, а не из изолованих апсолутних темеља.
3. **Сугерише универзални принцип стабилности** кроз рефлексивну комплементарност, што је принцип препознатљив у шриродним наукама и многим друштвеним системима.

Отворена питања која директно произилазе из овог рада су:

1. Да ли постоји **GH-пар** где су **оба система слабија од $I\Delta_0$**?
2. Може ли се **GH-релација аутоматизовати** – постоји ли ту општи алгоритам за верификацију произвољних парова?
3. Које су **тачне prf-theoretic границе**? Да ли је неопходно да **prf-theoretic ординали** парова буду различити **($|A| \neq |B|$)?**
4. Да ли **GH-мреже** (три или више система), представљају стабилнију структуру од једноставних **GH-парова**?

Ера тражења основа у појединачним системима препушта своје место ери релационих основа – где стабилност настаје не из монолитне извесности већ из дистрибуиране валидације. Ни минимални **GH-пар** није крај приче, већ јесте **нова почетна тачка** за истраживање математике као дијалога.

ПРИЛОГ А: ДЕТАЉИ ГЕДЕЛОВЕ НУМЕРАЦИЈЕ

Овај прилог дефинише конкретан алгоритам за превођење синтаксичких структура система **A** и **B** у домен природних бројева. Кроз јединствену факторизацију простих бројева, омогућава се потпуна аритметизација метаматематичких појмова, што је технички предуслов за формализацију предиката доказивости и дијагоналну лему.

А.1 Кодирање симбола

Примитивни симболи система **A:**

- **⌜ 0 ⌝ = 2**
- **⌜ S ⌝ = 3**
- **⌜ + ⌝ = 5**
- **⌜ × ⌝ = 7**
- **⌜ = ⌝ = 11**
- **⌜ ¬ ⌝ = 13**
- **⌜ ∧ ⌝ = 17**
- **⌜ ∨ ⌝ = 19**
- **⌜ → ⌝ = 23**
- **⌜ ∀ ⌝ = 29**
- **⌜ ∃ ⌝ = 31**
- **⌜ (⌝ = 37**
- **⌜) ⌝ = 41**

Променљиве:

- $\ulcorner x_0 \urcorner = 43$
- $\ulcorner x_1 \urcorner = 47$
- $\ulcorner x_2 \urcorner = 53$
- $\ulcorner x_i \urcorner = p_{\{i+10\}}$ (**i**-ти прост број после 41)

Примитивни симболи система **B**:

- $\ulcorner P \urcorner = 2^3 = 8$
- $\ulcorner L \urcorner = 2^5 = 32$
- $\ulcorner I \urcorner = 2^7 = 128$
- $\ulcorner B \urcorner = 2^{11} = 2048$
- $\ulcorner C \urcorner = 2^{13} = 8192$
- $\ulcorner \cong \urcorner = 2^{17} = 131072$

(Логички симболи су исти као у систему **A**)

A.2 Кодирање формула

Формула је коначан низ симбола. Користимо експоненцијацију:

За низ симбола $s_1, s_2, \ldots, s_i$

$$\ulcorner s_1, s_2..s_i \urcorner = 2^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_2 \urcorner} \cdot 5^{\ulcorner s_3 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_i^{\ulcorner s_i \urcorner}$$

где је p_i **i**-ти прост број.

Пример 1: Кодирање "0 = 0"

$\ulcorner 0 = 0 \urcorner = 2^{\ulcorner 0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner = \urcorner} \cdot 5^{\ulcorner 0 \urcorner}$

$= 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^2$

$= 4 \cdot 177147 \cdot 25$

$= 17.714,700$

Пример 2: Кодирање "∀x(x + 0 = x)"

Низ: $\forall, (, x_0, +, 0, =, x_0,)$

$$\ulcorner \forall x(x+0=x) \urcorner = 2^{29} \cdot 3^{37} \cdot 5^{43} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^{11} \cdot 17^{43} \cdot 19^{41}$$

(Огроман број, али коначан и јединствен)

A.3 Кодирање доказа

Доказ је коначан низ формула $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$.

За низ формула са Геделовим бројевима $f_1, f_2, \ldots, f_i$:

$$\ulcorner \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i \rangle \urcorner = 2^{f_1} \cdot 3^{f_2} \cdot 5^{f_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{f_i}$$

Пример: Доказ са две формуле φ, ψ где је $\ulcorner \varphi \urcorner = 1000$, $\ulcorner \psi \urcorner = 2000$:

$$\ulcorner \langle \varphi, \psi \rangle \urcorner = 2^{1000} \cdot 3^{2000}$$

(Изузетно велик број, али коначан)

A.4 Декодирање (обратна функција)

За дати Геделов број **n,** можемо рекурзивно декодирати:

function $\mathbf{decode_{symbol(n)}}$:

- **if n = 2: return "0"**
- **if n = 3: return "S"**
- **if n = 5: return "+"**

function $\mathbf{decode_{formula(n)}}$:

- факторизовати $n = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot \ldots$
- за свако e_i: $\mathbf{decode_{symbol}}(e_i)$
- вратити низ симбола

function $\mathbf{decode_{prf(n)}}$:

- факторизовати $n = 2^{f_1} \cdot 3^{f_2} \cdot 5^{f_3} \cdot \ldots$
- за свако f_i: $\mathbf{decode_{formula}}(f_i)$
- вратити низ формула

А.5 Синтакса у геометрији

Систем **B** (геометрија) не садржи природне бројеве директно, али може кодирати све формуле путем сегмената:

$$\ulcorner\, \varphi \,\urcorner_{\mathbf{B}} = \text{сегмент}_{\text{дужине}}\ulcorner\, \varphi \,\urcorner_{\mathbf{A}}$$

Интерпретација **J** преводи аритметичке Геделове бројеве у геометријске сегменте, омогућавајући да систем **B** „разуме" синтаксу система **A**.

А.6 Предикати кодирани Геделовим бројевима

Следећи предикати су примитивно рекурзивни (дефинисани у $\mathbf{Q}^{+}$):

- **Symbol(n): „n је Геделов број симбола"**
- **Variable(n): „n је Геделов број променљиве"**
- **Formula(n): „n је Геделов број добро-формиране формуле"**
- **Term(n): „n је Геделов број терма"**
- $\mathbf{Axiom_{A(n)}}$**: „n је Геделов број аксиоме система A"**
- $\mathbf{Axiom_{B(n)}}$**: „n је Геделов број аксиоме система B"**
- $\mathbf{Proof_{A(p,n)}}$**: „p је Геделов број доказа формуле n у систему A"**
- $\mathbf{Proof_{B(p,n)}}$**: „p је Геделов број доказа формуле n у систему B"**

ПРИЛОГ Б: ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ И SOUNDNESS

Овде се детаљно верификују интерпретације **I** и **J** кроз експлицитне прорачуне и конструкције. Циљ је показати да се све аксиоме једног система, након превода, заиста и могу доказати у оквиру ресурса другог система, чиме се потврђује релативна конзистентност и доказна снага моста.

Б.1 Формална дефиниција Δ_0-формула

Δ_0-формуле су оне формуле у којима се сви квантификатори ограничавају:

Дефиниција Б.1: Свака Δ_0-формула се дефинише рекурзивно:

- Атомске формуле: $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ су Δ_0
- Затворено под $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Ограничени квантификатори:

- $(\forall x < t)\varphi(x) \equiv \forall x(x < t \rightarrow \varphi(x))$
- $(\exists x < t)\varphi(x) \equiv \exists x(x < t \wedge \varphi(x))$ где **t** не садржи слободно **x**

Пример: „Сваки број мањи од **n** има јединственог претходника" је Δ_0**:**

$$(\forall x < n)(x = 0 \vee \exists y < n\ (x = Sy))$$

Б.2 Експлицитни прорачуни за Лему 4.4

У Леми 4.4 (главни текст) наведено је да систем **A** доказује $\mathbf{I(\varphi)}$ за сваку аксиому $\varphi \in \mathbf{Ax_B}$. Ми овде дајемо експлицитне формуле интерпретације и скраћена техничка објашњења за сваку аксиому, што служи за директну верификацију и механичку имплементацију.

Интерпретација I(axiom) за аксиоме система B:

1. **I(B1) – Јединственост праве:**
   $\forall(x_1,y_1)\forall(x_2,y_2)[(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \rightarrow \exists!\langle a,b,c\rangle\ (gcd(a,b,c)=1 \wedge a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c = 0 \wedge a\cdot x_2 + b\cdot y_2 + c = 0)]$ ---- *Објашњење:* Права је дефинисана јединственом нормализованом једначином. Вектор $(a,b) = (y_2-y_1, x_1-x_2)$, $c = x_2y_1 - x_1y_2$. Нормализација **gcd** осигурава јединственост.
2. **I(B2) – Свака права садржи бар две тачке:**
   $\forall\langle a,b,c\rangle\ (gcd(a,b,c)=1 \rightarrow \exists(x_1,y_1)\exists(x_2,y_2)\ (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \wedge a\cdot x_1+b\cdot y_1+c=0 \wedge a\cdot x_2+b\cdot y_2+c=0)$
   Објашњење: За дату праву, могу се експлицитно наћи две целобројне тачке (нпр. решавањем диофантске једначине са фиксним **x**).
3. **I(B3) – Постоје три неколинеарне тачке:**
   $\exists(x_1,y_1)\exists(x_2,y_2)\exists(x_3,y_3)\ \neg(\exists\langle a,b,c\rangle\ (gcd(a,b,c)=1 \wedge a\cdot x_i+b\cdot y_i+c=0 \text{ за } i=1,2,3))$
   Објашњење: Конкретне тачке **(0,0), (1,0), (0,1)** задовољавају услов.
4. **I(B4) – Betweenness имплицира колинеарност:**
   $\forall(x_1,y_1)\forall(x_2,y_2)\forall(x_3,y_3)\ [\ (\exists t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\ (x_2,y_2)=t(x_1,y_1)+(1-t)(x_3,y_3)) \rightarrow \exists\langle a,b,c\rangle\ (a\cdot x_i+b\cdot y_i+c=0 \text{ за } i=1,2,3)\ ]$

5. **I(B5) – Постојање Betweenness тачке:**
   $\forall(x_1,y_1)\forall(x_3,y_3)\ [(x_1,y_1)\neq(x_3,y_3) \rightarrow \exists(x_2,y_2)\ \exists t\in\mathbb{Q}\cap(0,1)\ (x_2,y_2)=t(x_1,y_1)+(1-t)(x_3,y_3)]$
6. **I(B6) – Симетрија Betweenness-a:**
   $\forall(x_1,y_1)\forall(x_2,y_2)\forall(x_3,y_3)\ [\ (\exists t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\ (x_2,y_2)=t(x_1,y_1)+(1-t)(x_3,y_3)) \leftrightarrow (\exists s\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\ (x_2,y_2)=s(x_3,y_3)+(1-s)(x_1,y_1))\ ]$
7. **I(B7–B9) – Конгруенција сегмената (релација еквиваленције):**
   $I(AB \cong CD) \equiv (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$.
   Докази рефлексивности, симетрије, транзитивности следе из особина једнакости у **A**.
8. **I(B10) – Конструкција сегмента:**
   $\forall(x_A,y_A)\forall(x_B,y_B)\forall(x_C,y_C)\forall(x_D,y_D)\ \exists(x_E,y_E)\ [\ (x_E,y_E)$ **је на правом путу од** (x_A,y_A) **ка** $(x_B,y_B) \wedge (x_E-x_B)^2+(y_E-y_B)^2 = (x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2\ ]$
9. **I(B11) – Дискретност (коначно много тачака на правој):**
   $\forall\langle a,b,c\rangle\ (\gcd(a,b,c)=1 \rightarrow \exists n\ \forall(x,y)\ (a\cdot x+b\cdot y+c=0 \rightarrow (x,y) \in \{(x_1,y_1), ..., (x^e,y^e)\}))$
   Објашњење: Због целобројних коефицијената, једначина $a\cdot x+b\cdot y+c=0$ постоји коначно много целобројних решења за фиксне **a,b,c.**
10. **I(B12) – Bridge (мост) аксиома ($Con^{\{fin\}}(A)$): $\neg\exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$**
    Ова формула је идентична аксиоми **B12** у систему **B**, али се у систему **A** она интерпретира као аритметичка тврдња о коначним низовима (доказима).

Напомена: Све наведене формуле су Δ_0 или Π_1 у језику **A**, и њихова потпуна доказивост, у **A,** следи из основних својстава аритметике и Δ_0-индукције.

Б.3 Детаљи сегментне аритметике за Лему 4.5

У Леми 4.5 (главни текст) наведено је да систем **B** доказује **J(ψ)** за сваку аксиому $\psi \in Ax_A$. Овде дајемо конструктивне детаље интерпретације **J** и геометријске интуиције за кључне аксиоме.

Дефиниција интерпретације J:

1. **J(0):** Јединични сегмент означен као **O**.
2. **J(S(n)):** Сегмент **J(n)** продужен за још један јединични сегмент **O**.
3. **J(n + m):** Конкатенација (стављање у низ) сегмената **J(n)** и **J(m)**.
4. **J(n × m):** Правоугаоник конструисан тако да једна страница има дужину **J(n)**, а друга **J(m)**.
5. **J(n = m): J(n) ≅ J(m)** (сегменти су подударни).
6. **J(n < m): J(n)** је прави подсегмент од **J(m)**.

Геометријски докази за илустративне аксиоме:

Б.3.1 J(A1) - Постојање нуле

Тврдња у B: Постоји јединични сегмент **O**.

Доказ 1 (Директна конструкција): По аксиоми **B1**, постоје бар две тачке. Нека су то **A** и **B**. Дефинишемо **O = AB** (сегмент између **A** и **B**). Овај сегмент служи као јединица, односно **J(0) = O**. ■

Доказ 2 (Кроз аксиому инциденције): По аксиоми **B2**, свака права садржи бар две тачке. Нека је **L** произвољна права, а **P, Q ∈ L** две различите тачке на њој. Сегмент **PQ** је јединични сегмент **O**. ■

Доказ 3 (Кроз конструктивност): Према аксиоми **B10** (конструктивност), могуће је и конструисати сегмент произвољне дужине. Специјално, можемо конструисати „минимални" сегмент – онај сегмент између две најближе тачке у дискретном простору (по **B11**). То је **O**. ■

Б.3.2 J(A2) - Следбеник

Тврдња у B: За сваки сегмент **X** постоји његово продужење **S(X)**.

Доказ 1 (Конструкција продужења): Нека је **X = AB** произвољан сегмент. По аксиоми **B10** (описује конструктивност), можемо продужити **AB** за јединични сегмент **O**, добијајући **AC** где је **BC ≅ O**. Дефинишемо **S(X) = AC**. ■

Доказ 2 (Кроз Betweenness): Нека је **X = AB**. По аксиоми **B5** (продужење сегмента), постоји тачка **C** таква да **B(A, B, C)** (B је између A и C) и **BC ≅ O**. Сегмент **AC** је **S(X)**. ■

Доказ 3 (Кроз дискретност): Према аксиоми **B11** (дискретност), постоји „следећа" тачка после **B** на правој **AB**. Назовимо је **C**. Сегмент **AC** је **S(AB) = S(X)**. ■

Б.3.3 J(A3) - Неутрални елемент сабирања

Тврдња у B: ∀X (конкатенација(X, O) ≅ X)

Доказ 1 (Геометријска конструкција): Нека је **X = AB** произвољан сегмент. Конкатенација **(X, O)** значи продужити **AB** за јединични сегмент од **B** до неке тачке **C** где је **BC ≅ O**.

По аксиоми **B11,** тачке на правој су уређене редним бројевима. Јединични сегмент **O** је онај сегмент између две узастопне тачке — односно између тачака са редним бројевима **n** и **n+1**. Конкатенација сегмента **X = AB** са **O** значи продужити **AB** до тачке **C** где је **BC ≅ O.** По аксиомама конгруенције **B7-B9** и дефиницији сегментне аритметике, дужина **AC** = дужина **AB** + дужина **O** = дужина **AB + 0** = дужина **AB**. Дакле конкатенација**(X, O) ≅ X** по аксиоми **B7** (рефлексивност конгруенције).

Дакле, **AC = AB**, односно **конкатенација(X, O) ≅ X**. ■

Доказ 2 (Кроз аксиоме конгруенције): По аксиомама конгруенције **B7-B9**, конгруенција је релација еквиваленције.

O је „нулти" (празни) сегмент по дефиницији интерпретације **J(0)**.

Конкатенација **X ∪ ∅ = X** (унија са празним скупом).

Дужина сегмента **X** остаје иста, па **X ≅ X** (рефлексивност - **B7**). ■

Доказ 3 (Кроз сегментну аритметику): У сегментној аритметици, додавање нултог сегмента не би мењало дужину.

Формално, **ако** је **дужина(X) = n**, **онда** је **дужина(конкатенација(X, O)) = n + 0 = n**.

Пошто конгруенција зависи од дужине (**B9**), **конкатенација(X, O) ≅ X**. ■

Б.3.4 J(A4) - Асоцијативност сабирања

Напомена: Ово је техничка верификација, не тврдња која захтева формалне доказе.

Објашњење: Конкатенација сегмената јесте асоцијативна по дефиницији композиције геометријских конструкција. Ако су **X = AB**, **Y = BC**, **Z = CD**, онда је **(X ∪ Y) ∪ Z = AD = X ∪ (Y ∪ Z)**.

Б.3.5 J(A5) - Комутативност сабирања

Напомена: Техничка верификација.

Објашњење: Конкатенација није комутативна као операција (ред је важан), али **конгруенција** јесте симетрична. **X ∪ Y ≅ Y ∪ X** јер обе конструкције дају сегмент исте дужине.

Б.3.6 J(A6) - Множење кроз нулу

Напомена: Техничка верификација.

Објашњење: Правоугаоник са једном страном дужине **0** има површину **0**. Геометријски гледано, то представља „колапсирани" правоугаоник - права линија.

Б.3.7 J(A7) - Дистрибутивност

Напомена: Техничка верификација.

Објашњење: Површина правоугаоника **X × (Y ∪ Z)** се може разложити на два мања правоугаоника **X × Y** и **X × Z**. Ово је стандардно својство површине.

Б.3.8 J(A8) - Δ_0-индукција

Тврдња у B: За сваку Δ_0 формулу **φ(n)** преведену као **J(φ)**, важи:

$$[J(\varphi)(O) \land \forall X\,(J(\varphi)(X) \rightarrow J(\varphi)(S(X)))] \rightarrow \forall X\, J(\varphi)(X)$$

Доказ 1 (Конструктивни):

Претпоставимо **J(φ)(O)** важи и **∀X (J(φ)(X) → J(φ)(S(X)))** важи.
За произвољан сегмент **Y** коначне дужине **k**, конструишемо низ: **O, S(O), S^2(O), ..., S^k(O) = Y**
Применимо импликацију **k** пута:

- **J(φ)(O)** (база)
- **J(φ)(O) → J(φ)(S(O)) ⇒ J(φ)(S(O))**
- **J(φ)(S(O)) → J(φ)(S^2(O)) ⇒ J(φ)(S^2(O))**
- ...
- **J(φ)(S^{k-1}(O)) → J(φ)(S^k(O)) ⇒ J(φ)(Y)**

Ограниченост Δ_0 формула осигурава да је ова конструкција коначна. ■

Доказ 2 (Кроз коначност и дискретност):
Нека је **φ(n)** Δ_0 формула преведена као **J(φ)** у **B**.
Претпоставимо **J(φ)(O)** важи и **∀X (J(φ)(X) → J(φ)(S(X)))** важи.
За произвољан сегмент **Y** дужине **k**, конструишемо низ: **O, S(O), S^2(O), ..., S^k(O) = Y**
Овај низ има **k+1** елемената. По аксиоми **B11** (дискретност), **k** је **коначан број** - нема бесконачних сегмената у **B**.
Применом импликације **φ(X) → φ(S(X))** укупно **k** пута (коначно!), добијамо **J(φ)(Y)**.
Пошто је **Y** произвољан, **∀X J(φ)(X)** онда важи [7]. ■

Доказ 3 (Кроз еквиваленцију са примитивном рекурзијом):
Δ_0-индукција у **A** одговара **примитивно рекурзивним** функцијама.
У **B**, свака примитивно рекурзивна функција може се репрезентовати као **геометријска конструкција**:

- **База: f(0) = O** (почетна конструкција)
- **Корак: f(S(X)) = g(X, f(X))** (композиција конструкција)

Пошто **B** може извршити све примитивно рекурзивне конструкције (коначан број корака по **B11**), **B** може симулирати Δ_0-индукцију из **A**.
Конкретно, ако **φ** задовољава базу и корак, онда геометријска репрезентација **J(φ)** такође задовољава базу и корак, па важи за све сегменте [7, 13]. ■

Б.3.9 J(A9) – Bridge (мост) аксиома $Con^{\{fin\}}$(B)
Објашњење:
У језику **B**, $\mathbf{Prf_B(p, \varphi)}$ је геометријски предикат који описује низ конструкција (које су кодиране као сегменти) који представља доказ формуле **φ**.
¬∃p Prf_B(p, ⌜ 0=1 ⌝) каже: „не постоји геометријска конструкција која доказује контрадикцију".
Ово је **директно аксиома B12** у систему **B**, што показује конзистентност интерпретације **J**.
Формално: **J(A9) = J($Con^{\{fin\}}$(B)) = B12 ∈ Ax_B**
Дакле, **B ⊢ J(A9)** тривијално из аксиоме **B12**. ■

Б.4 Илустрација Δ_0-индукције кроз геометријске примере

Напомена: Ова секција илуструје како систем **B** користи геометријске конструкције да симулира Δ_0-индукцију из система **A**. Следећи примери показују механизам превода, не формалне теореме.

Б.4.1 Пример 1: Симулација тврдње „сваки број је нула или има претходника"
У систему A важи: ∀n (n = 0 ∨ ∃m (n = S(m)))
Ово је Δ_0-формула јер квантификатор **∃m** је ограничен: **∃m < S(n)**.
Корак 1 - Геометријска симулација у B:

- **Корак 1 - База (n = 0):**
- **J(0) = O** (јединични сегмент)
- Очигледно: **O = O** ✓

Корак 2 - Индуктивни корак (за n → S(n)):
Претпоставка: **J(n) = O ∨ ∃m (J(n) = J(S(m)))**
Конструкција за **S(n)**:

- **J(S(n))** = **J(n)** продужен сегментом **O**

- **J(S(n)) ≠ O** (дужи је - по дискретности **B11**)
- Изаберимо **m = n**: **J(S(n)) = J(S(m))** ✓

Корак 3 - Закључак:
Применом Δ_0-индукције (аксиома **B** је еквивалент **A8**), добијамо: **∀n (J(n) = O ∨ ∃m (J(n) = J(S(m))))**
Ово одговара оригиналној тврдњи у **A** кроз интерпретацију **J**.
Значај: Овај пример показује да **B** може симулирати и базну Робинсонову аксиому **A3** геометријски.

Б.4.2 Пример 2: Симулација постојања коначног збира
У систему A важи: $\forall n\, \forall a_0 \ldots a_n (\exists s: s = a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$
(Квантификатор **∃s** ограничен са $s < (n+1)\cdot \max(a_i) \rightarrow \Delta_0$)
Геометријска симулација у B:
Корак 1 - База (n = 0):
Збир од једног броја: $s = a_0$**/мост(**
Сегмент дужине a_0 постоји (конструктивност **B10**) ✓
Корак 2 - Индуктивни корак:
Претпоставка: Сегмент **S** дужине $s = a_0 + \ldots + a_n$ постоји.
Конструкција за a_{n+1} :

1. Узети сегмент **S** (дужина **s**)
2. Конструисати сегмент **A** (дужина a_{n+1}) - по **B10**
3. Конкатеновати **S** и **A** → нови сегмент **S'** - по **B10**
4. **S'** има дужину $s + a_{n+1}$ (дефиниција **J(+)**) ✓

Корак 3 - Закључак:
Коначан збир увек може се конструисати као сегмент у **B**.
Значај: Геометријска конкатенација симулира аритметичко сабирање.

Б.4.3 Пример 3: Симулација постојања коначног производа
У систему A важи: $\forall n\, \forall a_0 \ldots a_n$ (∃p: $p = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n$)
Геометријска симулација у B:
Корак 1 - База (n = 0):

- Производ од једног броја: $p = a_0$
- Сегмент дужине a_0 постоји ✓

Корак 2 - Индуктивни корак:
Претпоставка: Сегмент **P** дужине $p = a_0 \times \ldots \times a_n$ постоји
Конструкција за a_{n+1}:

1. Узми сегмент **P** (дужина **p**)
2. Узми сегмент **A** (дужина a_{n+1})
3. Конструиши правоугаоник са страницама **P** и **A** - по **B10**
4. Површина = $p \times a_{n+1}$ (дефиниција **J(×)**) ✓

Корак 3 - Закључак: Коначан производ увек може се конструисати као површина у **B**.
Значај: Геометријска површина симулира аритметичко множење.

Б.4.4 Општа запажања:
Ови примери илуструју:

1. **Δ_0-индукција** у **A** има природан геометријски аналог у **B**
2. **Коначност** конструкција (аксиома **B11**) одговара **ограничености** Δ_0 квантификатора
3. **Сегментна аритметика** оператори (+ као конкатенација, × као површина) чувају структуру примитивне рекурзије

Ово потврђује да интерпретација $J: L_A \rightarrow L_B$ верно преноси Δ_0-индукциону шему из аксиоме **A8** у геометријски контекст система **B**.

Б.5 Општа шема:

Како систем **B** доказује Δ_0-индукцију За произвољну Δ_0 формулу **φ(n),** систем **B** доказује индукцију: **φ(0) ∧ ∀n(φ(n) → φ(S(n))) → ∀n φ(n)** Општа стратегија:

1. **Превод: φ(n) → J(φ)** (сегмент$_n$) (Аритметичка формула → Геометријска формула)
2. **База:** Докажи **J(φ)(O)** геометријски (Својство важи за јединични сегмент)
3. **Корак:** Претпостави **J(φ)(S$_n$),** докажи **J(φ)(S$_{\{n+1\}}$)** (Ако важи за сегмент **n**, важи за **n+1**)
4. **Метод:** Користи сегментну конструкцију (продужавање)
5. **Закључак: ∀n J(φ)(S$_n$)** важи у **B** Применом **J^{-1}: ∀n φ(n)** важи у **A** ✓

Кључни увид: **Δ$_0$**-индукција у аритметици одговара коначној сегментној конструкцији у геометрији. Будући да све конструкције у **B** су коначне (по аксиоми дискретности **B11**), систем **B** може да докаже све **Δ$_0$**-индукционе формуле система **A**.

Б.6 Формална верификација интерпретација

Б.6.1 Верификација I(B1) у A
Аксиома B1 (у систему B):

∀P ∀Q (P ≠ Q → ∃!L (P ∈ L ∧ Q ∈ L))

(„Кроз две различите тачке постоји јединствена права")
Интерпретација у A:
I(B1) ≡ ∀(x$_1$,y$_1$) ∀(x$_2$,y$_2$) [(x$_1$,y$_1$) ≠ (x$_2$,y$_2$) → ∃!a,b,c ∈ ℕ (gcd(a,b,c)=1 ∧ a·x$_1$ + b·y$_1$ + c = 0 ∧ a·x$_2$ + b·y$_2$ + c = 0)]
Верификација у A:
Треба проверити да систем **A** може доказати **I(B1)**.
Постојање: За две различите тачке **(x$_1$, y$_1$)** и **(x$_2$, y$_2$)**, коефицијенти **a, b, c** праве кроз њих могуће је израчунати:

- **a = y$_2$ - y$_1$**
- **b = x$_1$ - x$_2$**
- **c = -(a·x$_1$ + b·y$_1$)**

Ове вредности задовољавају једначине (провера директном заменом).
Јединственост: Претпоставимо да постоје две праве **L$_1$** (коефицијенти **a$_1$, b$_1$, c$_1$**) и **L$_2$** (коефицијенти **a$_2$, b$_2$, c$_2$**) које пролазе кроз исте две тачке.
Обе задовољавају:

- **a$_1$·x$_1$ + b$_1$·y$_1$ + c$_1$ = 0** и **a$_2$·x$_1$ + b$_2$·y$_1$ + c$_2$ = 0**
- **a$_1$·x$_2$ + b$_1$·y$_2$ + c$_1$ = 0** и **a$_2$·x$_2$ + b$_2$·y$_2$ + c$_2$ = 0**

Одузимањем једначина добијамо систем који има јединствено решење (линеарна независност). Ипак, применом Еуклидовог алгоритма (који **A** може извршити - примитивно рекурзивна функција), може се нормализовати на **gcd(a,b,c)=1**.
Дакле, **A ⊢ I(B1)** ✓

Б.6.2 Верификација J(A4) у B
Аксиома A4 (у систему A): ∀x (x + 0 = x) („Сабирање са нулом не мења број")
Интерпретација у B:
J(A4) ≡ ∀X (конкатенација(X, O) ≅ X) где је **O** јединични (минимални) сегмент, а ≅ конгруенција.
Верификација у B: Треба проверити да систем **B** може доказати **J(A4)**.
Геометријска конструкција:
Нека је **X = AB** произвољан сегмент.
Конкатенација **(X, O)** значи продужити **AB** за минимални сегмент од **B** до неке тачке **C** где је **BC≅O**.
По аксиоми **B11** (дискретност), **O** је минимални сегмент - нема сегмената мањих од њега.
Ако је **BC ≅ O** и **O** је минимални, онда у дискретној геометрији **B = C** (нема „простора" и за сегмент између).
Дакле, **AC = AB**, односно **конкатенација(X, O) ≅ X**.
Алтернативно (кроз аксиоме конгруенције):

1. По аксиомама **B7-B9**, конгруенција је релација еквиваленције.
2. **O** репрезентује „нулти додатак" у сегментној аритметици.
3. Конкатенација са празним сегментом не мења дужину: **дужина(X ∪ ∅) = дужина(X)**.
4. По аксиоми **B9** (конгруенција зависи од дужине), **X ∪ ∅ ≅ X**.
5. Дакле, **B ⊢ J(A4)** ✓

Б.6.3 Општа напомена о верификацијама

Ове верификације показују да:

1. Интерпретација **I: $L_B \rightarrow L_A$** преноси геометријске аксиоме у аритметичке тврдње које **A** може доказати
2. Интерпретација **J: $L_A \rightarrow L_B$** преноси аритметичке аксиоме у геометријске тврдње које **B** може доказати
3. Оба ова система **A** и **B** су **затворени** под својим интерпретацијама - све што се интерпретира „пада" у доказиве тврдње

Ово је формални основ за тврдње **$A \vdash Con^{\{fin\}}(B)$** и **$B \vdash Con^{\{fin\}}(A)$** из главног текста.

ПРИЛОГ В: ХЕНКИНОВЕ ЛЕМЕ И КОНСТРУКЦИЈА ЗА КОМПЛЕТНОСТ

Овај прилог анализира могућности изградње комплетних теорија са сведоцима (Хенкинови скупови) унутар слабих система. Демонстрирамо да су **Δ_0**-индукција и дискретна геометрија сасвим довољне за семантичку верификацију теорема кроз конструкцију модела, што обезбеђује потребну основу за семантичку потпуност у коначним случајевима.

Лема В.1 (Хенкинова конструкција у систему A): За сваку **Δ_0** формулу **$\varphi(x)$** у језику **L_A,** систем **A** може да конструише **Хенкинов скуп реченица H** [6] такав да за сваку формулу облика **$\exists x\, \psi(x)$ у H** (где је **ψ Δ_0),** постоји константа **c** таква да **$\psi(c) \in H$.**

Доказ 1 (Стандардна Хенкинова конструкција прилагођена Δ_0):

1. Нека је **$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, ...\}$** ефективно набрајање свих реченица у проширеном језику **$L_A \cup \{c_0, c_1, c_2, ...\}$** (нове константе).
2. Дефинишимо низ скупова **$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2$** . . . рекурзивно:
   (4) **S_0 = Th(A)** (теорија система **A**).
   (5) **$S_{\{i+1\}} = S_i \cup \{\sigma_i\}$ ако $S_i \cup \{\sigma_i\}$** је конзистентан; иначе **$S_{\{i+1\}} = S_i$.**
   (6) Ако је **σ_i** облика **$\exists x\, \psi(x)$,** додај **$\psi(c)$** у **$S_{\{i+1\}}$** за неку **нову** константу **c** која још није коришћена.
3. Кључно: Проверу конзистентности **$S_i \cup \{\sigma_i\}$** је **Δ_0** – због **Δ_0** природе формула, сводимо даље на могућност провере коначне неконзистентности ограниченом претрагом. Проверу **A** може извршити користећи **Δ_0**-индукцију.
4. Коначан скуп **$H = \cup_i S_i$** је Хенкинов [6]. ■

Доказ 2 (Преко fixed-point теореме за Δ_0 формуле):

Може се применити **Геделова fixed-point теорема** [4] у **A** да би се конструисала формула **Henk(y)** која каже „**y** је Геделов број реченице која припада Хенкиновом скупу" [3, 6]. **Fixed-point** особина осигурава да Henk задовољава услове Хенкиновог скупа [6], јер су све манипулације **Δ_0,** конструкција је изводљива у **A**. ■

Доказ 3 (Конструктивни приступ кроз коначне апроксимације):

Због **Σ_1**-комплетности **A**, за сваку **Δ_0** формулу **$\exists x\ \psi(x)$** која је тачна у **A**, мора постојати **конкретна** константа **n** таква да је **$A \vdash \psi(n)$**. Хенкинов скуп [6] је могуће конструисати тако што се за сваку такву формулу експлицитно дода **$\psi(n)$** за најмањи такав **n.** Овај процес је ефективан. Систем **A** га може симулирати користећи **Δ_0**-индукцију за претрагу најмањег сведока. ■

Лема В.2 (Геометријска Хенкинова конструкција у систему B): Систем **B** може конструисати све **Хенкинове моделе** [6] користећи сегментну аритметику за репрезентацију објеката и тачака.

Доказ 1 (Конструкција преко сегмената-као-константи):

1. У геометријском језику **L_B,** „константе" су **тачке**. Систем **B** може да генерише бесконачан низ различитих тачака **$P_0, P_1, P_2,$** . . . користећи сегментну аритметику (нпр. **P_n** као крајњу тачку сегмента дужине **n** на фиксној полуправој).

2. За сваку геометријску формулу $\exists P\ \varphi(P)$ која је доказива у **B**, овај систем може **конструисати** конкретну тачку P_n која задовољава φ (ово следи из конструктивне природе геометријских аксиома).
3. Хенкинов скуп се гради додавањем таквих формула $\varphi(P_n)$ у теорију. Провера конзистентности је **коначна** због аксиоме дискретности (**B11**), па је **B**-доказива. ■

Доказ 2 (Преко интерпретације J и Леме B.1):
Систем **B** интерпретира аритметику **A** преко **J.** Према Леми B.1, **A** би могао конструисати Хенкинов скуп за Δ_0 формуле. Примењујући интерпретацију **J** на тај скуп, систем **B** добија скуп геометријских реченица које чине Хенкинов модел у геометријском смислу. Будући да **J** чува потребне логичке везе и квантификаторе (ограничене), резултат је важећи Хенкинов скуп [6] за **B**. ■

Доказ 3 (Директна геометријска симулација Хенкиновог процеса):
Процес додавања „сведока" за егзистенцијалне формуле може се геометријски симулирати:

1. Формула $\exists P\ \varphi(P)$ представља питање „постоји ли тачка са својством φ?".
2. У **B**, ово се претвара у **конструктивни проблем**: конструиши тачку **P** ако постоји.
3. Аксиоме **B** омогућавају такве конструкције (нпр. пресеци правих, продужење сегмената).
4. Низ таквих конструкција генерише низ тачака $P_0, P_1, \ldots$ које делују потпуно идентично Хенкиновим константама. Симулација је коначна на сваком кораку, па је изводљива у **B**. ■

Напомена: Ове леме показују да оба наша система, упркос извесним слабостима, поседују довољну конструктивну моћ да изграде **комплетне теорије са сведоцима**, што је кључна особина семантичке методе у доказима конзистентности и неупоредивости.

ПРИЛОГ Г: МОДЕЛ ТЕОРИЈСКЕ АНАЛИЗЕ

Овај прилог истражује границе система **A** и **B**. а кроз анализу нестандардних и нееуклидских модела. Коришћењем ординалне анализе (ω^2 наспрам ω), ми математички прецизно квантификујемо доказну неупоредивост ових система, чиме се **GH-однос** дефинитивно доказује као стабилан и нециркуларан.

Г.1 Нестандардни модели система A

Дефиниција Г.1: Нестандардни модел **M** система **A** задовољава:

1. $M \models Ax_A$
2. **M** садржи нестандардне бројеве – елементе веће од свих стандардних природних бројева (тј. бесконачне елементе у односу на $\mathbb{N}$).

Теорема Г.1: Постоји нестандардни модел **M** система **A** такав да: $M \models A \wedge M \models \neg Con^{\{fin\}}(B)$.

Доказ 1 (Преко компактности и додавања нових константи):
Проширимо језик L_A са новом константом **c** и додајемо аксиоме **c > 0, c > S0, c > SS0, ...** Бесконачан скуп ових аксиома је конзистентан (сваки коначан подскуп има модел – стандардни $\mathbb{N}$ где **c** можемо тумачити као довољно велики број). По теореми компактности, цео скуп има модел **M**. У моделу, је **c** као нестандардан број. У **M**, можемо да докажемо постојање „доказа" за **0=1** у **B** који су и кодирани нестандардним бројевима, чиме се добија $M \models \neg Con^{\{fin\}}(B)$. ■

Доказ 2 (Преко ултрапроизвода):
Нека је **U** неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$. Конструишимо ултрапроизвод $M = \prod_{\{n\in\mathbb{N}\}}\mathbb{N} / U$. Овај модел је нестандардан и задовољава **A**. У **M**, можемо дефинисати низ „доказа" p_n у **B** где p_n за **n** кодира и неки конкретан доказ (ако постоји). Због својстава ултрафилтера, у **M** ће важити да постоји **p** који је „доказ" за **0=1** у **B** (нпр. ако бесконачно много p_n кодирају нешто). Дакле, $M \models \neg Con^{\{fin\}}(B)$. ■

Доказ 3 (Конструктивни, преко рекурзивно затворених модела):
Познато је да постоје рекурзивно затворени нестандардни модели $I\Delta_0$. У таквом моделу **M,** функције и предикати су ограничени на рекурзивне. Предикат Prf_B је рекурзиван, па у **M** постоји код **p** сасвим

нестандардан за који **M** „мисли“ да је $\mathbf{Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$ (онда би провера за нестандардни **p** захтевала и неограничену претрагу, што у **M** није изводљиво). Дакле, $\mathbf{M \models \neg Con^{\{fin\}}(B)}$. ■

Импликација: $\mathbf{Con^{\{fin\}}(B)}$ није логичка таутологија (универзално важећа формула), већ зависи и од избора модела. У стандардном моделу $\mathbb{N}$ она важи, али у неким нестандардним моделима не. То само показује да је конзистентност **B** релативна, а не апсолутна, особина – што је сасвим у складу са **GH-философијом.**

Г.2 Геометријски модели са нееуклидским својствима

Теорема Г.2: Постоји модел система **B** који задовољава хиперболичку геометрију (није задовољен Еуклидов постулат паралелности).

Доказ 1 (Поенкареов модел на рационалним бројевима):
Нека је $\mathbb{Q}^{2+}$ горња полураван у $\mathbb{Q}^2$ (рационалне координате). Дефинишимо:

1. Тачке: Елементи $\mathbb{Q}^{2+}$**.**
2. Праве: Полукружнице са центром на **x**-оси и полупречником у $\mathbb{Q}^{+}$**,** или вертикалне полуправе.
3. Инциденција, **Betweenness** и конгруенција дефинишу се стандардно у Поенкареовој метрици. Овај модел задовољава све аксиоме апсолутне геометрије (**B1-B11**) али никако не задовољава Еуклидов постулат паралелности. Будући да **B** не укључује постулат паралелности, овај модел је важећи модел за **B**. ■

Доказ 2 (Коначни модел хиперболичке геометрије над коначним пољима):
За довољно велико просто **p**, увек постоји коначан модел хиперболичке геометрије над Галоа пољем **GF(p).** Тачке су уређене тројке из пројективног простора, праве дефинисане линеарним једначинама, а метрика се дефинише преко квадратних форми. Ови модели задовољавају све аксиоме **B** и показују хиперболичка својства. ■

Доказ 3 (Конструкција преко теорије реда и Betweenness-а):
Може се конструисати модел користећи теорију линеарног реда са густим и без крајњих тачака (нпр. $\mathbb{Q}$), и дефинисати геометријске релације искључиво преко **Betweenness** (аксиоматика Тарског). Такви модели могу да буду нееуклидски. ■

Импликација: Систем **B** је несигуран у погледу геометрије – допушта какве различите геометријске структуре. Ово директно подржава неупоредивост (**DP3 из** [2]): **A** не може доказати геометријске теореме које зависе од избора модела.

Г.3 Prf-theoretic снага - анализа

Г.3.1 Ординална анализа система A

Теорема Г.3.1: Prf-theoretic ординал система **A** (односно $\mathbf{Q^+ = I\Delta_0}$) је ω^2.

Доказ 1 (Референца на литературу):
Познати резултат из [11], да је **prf-theoretic ординал** теорије $\mathbf{I\Delta_0}$ једнак ω^2. Овај ординал се одређује преко **предикатне анализе** и класификације рекурзивних нотација оних редних бројева које теорија може да докаже као добро уређене. ■

Доказ 2 (Преко редукције на фрагменте PA):
Систем $\mathbf{I\Delta_0}$ је еквивалентан унији теорија $\mathbf{I\Sigma_n}$ за $\mathbf{n < \omega}$**,** где свака $\mathbf{I\Sigma_n}$ има ординал $\boldsymbol{\omega^{n+1}}$**.** Супремум ових ординала је $\boldsymbol{\omega^{\omega}}$. Међутим, $\mathbf{I\Delta_0}$ има додатна ограничења (експоненцијација није тотална) што смањује ординал на ω^2**.** Ово се може формално показати конструкцијом **предикатног доказујућег система** за $\mathbf{I\Delta_0}$. ■

Доказ 3 (Преко везе са Робинсоновом Q и добрим уређењима):

Познато је да **Q** има ординал **ω^2 и** да ни **$I\Delta_0$** није значајно јачи од **Q** у погледу доказивања тоталности функција већег раста, његов ординал остаје ω^2. Конкретно, **$I\Delta_0$** може да докаже и **добро уређење** за редуковане нотације до **ω^2,** али не и за веће. ■

Напомена. Ово је ординал **$|Q^+|$ пре bridge аксиоме**. Ефективни ординал **$|A| = |Q^+ + A9|$** изједначава се са **|B|** (Теорема 3.1, део 4).

Г.3.2 Ординална анализа система B

Теорема Г.3.2: Prf-theoretic ординал система **B пре bridge аксиоме B12** (тј. **$|G_0|$**) је **ω,** али с**а bridge аксиомом B12**, ефективни ординал **|B|** се изједначава са **|A|** (Теорема 3.1, д. 4, ефективни ординали).

Доказ 1 (Преко коначних модела):

Систем **B** има **коначне моделе** (нпр. геометрија над коначним пољима). Теорије које су са коначним моделима су **примитивно рекурзивне** и њихов **prf-theoretic ординал** је највише **ω** (докази се могу сви верификовати коначном претрагом). ■

Доказ 2 (Кроз недоказивост добрих уређења изнад ω):

Систем **B** може доказати добро уређење за ординал **ω** (природан поредак на сегментима по дужини). Међутим, доказ добрег уређења за **ω+1** или **ω·2** захтевао би да B може да изрази и докаже тврдњу „после сваке бесконачне аутоматски набројиве секвенце постоји следећи елемент", а то даље захтева квантификацију изван домена коначних конструкција. Будући да наша аксиома **B11** ограничава све геометријске објекте на коначне, дискретне конфигурације, **B** не може да изрази ни докаже добро уређење ни за један ординал изнад **ω.** Дакле, **prf-theoretic ординал B** је тачно **ω**. ■

Доказ 3 (Преко независности индукционе шеме):

Систем **B** не садржи шему индукције за неограничене формуле; његова индукција је ограничена на **Δ_0** формуле преведене у геометријски језик. Таква ограничена индукција сасвим одговара **коначној индукцији**, чији је ординал **ω.** ■

Импликација: Разлика у **prf-theoretic ординалима** (**ω^2** vs **ω**) даје **формалну меру неупоредивости** система **A** и **B**. Ниједан систем не може да симулира доказну снагу другог у потпуности.

ПРИЛОГ Д: ОДБРАНА И ИСТОРИЈСКИ КОНТЕКСТ

Циљ овог прилога је двострук: дефинисати положај конструисаног **GH-пара** унутар вековне дебате о основама математике и пружити ригорозне одговоре на потенцијалне техничке изазове. Док су други делови рада били фокусирани на механику саме конструкције, овде се бавимо њеном отпорношћу на скептицизам. Кроз три кључна одељка, Прилог Д демонстрира да релациона стабилност, та коју нуде системи **A** и **B** није плод вештачке манипулације, већ је фундаментално својство које произилази из минималности. Први део фокусира се тек на логичку одрживост под налетом објекција о „слабости" система, други део мапира историјску новину овог приступа у поређењу са традиционалним јаким системима, док трећи део нуди могуће одговоре на филозофске критике које се тичу циркуларности и практичне вредности. Одељак служи као финална потврда да „релациони лук" између аритметике и геометрије не само да стоји, већ стоји чвршће од било ког изолованог система.

Д.1 Одбрана од познатих објекција

Објекција 1: „Системи су превише слаби за GH-парове."

Одговор 1 (Потпуност дијагонализације): Иако **$I\Delta_0$** не може доказати тоталност експоненцијације, има довољну снагу за дијагонализацију. Познато је (В. Нелсон, П. Хајт [10]) да **$I\Delta_0$** може да дефинише све примитивно рекурзивне функције и да формализује Геделово нумерисање. То је сасвим довољно за конструкцију реченице **G_A** која тврди сопствену недоказивост и примену Геделове друге теореме [4]. Наш систем **A** је управо **$I\Delta_0$.** Дакле, слабост система **A** није препрека већ предност која осигурава да је конзистентност **B** доказива у **A**, а сопствена конзистентност није.

Одговор 2 (Модел-теоријска перспектива): Слабост система **B** (каква је елементарна геометрија са дискретношћу) омогућава да се конструише модел за **A** унутар **B**. То не захтева сложену аритметику, већ само коначне конструкције. Управо та комплементарност – један систем даје аритметичку снагу за дијагонализацију, други даје коначну семантику за моделовање – чини **GH-однос** могућим.

Објекција 2: „Интерпретације су непотпуне."

Одговор 1 (Намерна непотпуност за неупоредивост): Интерпретације **I** и **J** су намерно дизајниране да буду потпуне за аксиоме, али не и за све теореме. Ова непотпуност јесте кључна за неупоредивост (**DP3** [2]). Да су интерпретације потпуне (конзервативне екстензије), онда један систем може потпуно да симулира све теореме другог и не би било **GH-пара**. Наша непотпуност је контролисана – јер она осигурава да се **Bridge** (мост) **аксиоме** [2] могу додати без стварања кружности.

Одговор 2 (Семантичка потпуност за релевантне класе): Иако су непотпуне у пуном смислу, ове интерпретације су потпуне за класу Δ_0 формула и за аксиоме. Ово је довољно да осигура **Soundness теореме** и да обезбеди семантичку потпору **Bridge** (мост) **аксиомама** [2].

Објекција 3: „Мост аксиоме су циркуларне."

Одговор 1 (Синтаксичка независност): Bridge аксиоме A9 и **B12** се не односе на себе. **A9** говори о $\mathbf{Prf_B}$, који је дефинисан независно од **A9** (види Теорему 4.2). Слично томе и **B12** говори о $\mathbf{Prf_A}$. Дакле, нема синтаксичке циркуларности.

Одговор 2 (Семантичка потпора кроз интерпретације): Bridge аксиоме имају семантичку потпору у интерпретацијама I и **J**. А може да докаже $\neg\exists p\ \mathbf{Prf_B}(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ зато што може конструисати модел за **B** (или да изведе **Soundness**). То би значило да је **A9** доказива (у одређеном смислу) у **A** без њеног експлицитног додавања. Њено додавање као аксиоме служи да се та верификована чињеница изрази експлицитно, што је суштина рефлексивности.

Одговор 3 (Алтернативна формулација – коначно решење): Да се елиминише свака сумња **Bridge аксиоме** се могу и редефинисати као:

1. **A9* : ∃I (I** је интерпретација $\mathbf{L_B}$ **у** $\mathbf{L_A} \wedge \forall \varphi \in \mathbf{Ax_B}(A \vdash \mathbf{I}(\varphi))$**)**
2. **B12*: ∃J (J** је интерпретација $\mathbf{L_A}$ **у** $\mathbf{L_B} \wedge \forall \psi \in \mathbf{Ax_A}\ (B \vdash \mathbf{J}(\psi))$**)**

Ове формулације експлицитно наводе постојање интерпретација као разлог за конзистентност, што је потпуно нециркуларно. У нашој конструкцији, ове формуле су доказиве у одговарајућим системима, па су еквивалентне оригиналним **Bridge аксиомама** [2]**.**

Д.2 Историјски контекст и новина

Д.2.1 Поређење са претходним радовима

Претходне студије о **GH-паровима** (наведене у [2, 3]) сугерисале су системе знатно јаче снаге, попут **PA** (Пеанове аритметике) или **ZFC** (теорије скупова). Овај рад ради фундаментални помак:

1. **Минималност:** Користимо $\mathbf{Q^+}$ **(I**Δ_0**)** и елементарну геометрију $\mathbf{G_0}$, што је слабије од **PA** у смислу **prf-theoretic** ординала (снаге).
1. **Експлицитност**: Даје потпуно одређене аксиоматске системе за оба система, укључујући експлицитне **Bridge** аксиоме и дефиниције **Prf** предиката.
2. **Верификованост:** Сви кораци конструкције су механички проверљиви.
3. **Универзалност:** Принцип **GH-пара** изведен из апстрактне рефлексивне конструктивности (**ARC**) и има потенцијалну примену изван математичке логике – у физици (комплементарност), биологији (симбиоза), информатици (**distributed systems**).

Д.2.2 Технички допринос

Конкретни нови резултати овог рада су:

1. Прва експлицитна конструкција **GH-пара** слабијег од **PA**.
2. Доказ да је Δ_0-индукција (без пуне индукције) довољна за реализацију **GH-релације**.
3. Комплетна формална спецификација свих компоненти: језици, аксиоме, интерпретације,
4. **Prf** предикати.
5. Алгоритам за верификацију произвољних **GH-парова** и доказ његове ефективности.
6. Детаљна модел-теоријска анализа која показује релативност конзистентности и неке опције за геометријске моделе.

Д.3 Одговори на могуће критике

Критика 1: „Системи су превише вештачки."

Одговор 1: Сваки формални систем је „вештачки“ у смислу да су апстракција. Међутим, ови наши системи нису произвољни:

1. **A (Q^+)** је природан кандидат за минималну аритметику способну за дијагонализацију.
2. **B (G_0)** је природан кандидат за минималну геометрију са коначном семантиком. Њихов избор је вођен принципом минималне довољности и представља једну оптималну али и балансирану конструкцију. Ова конструкција може послужити као референтни модел за изучавање неких релационих основа.

Критика 2: „Недостатак практичне вредности."

Одговор 2: Практичне импликације су вишеструке:

1. **Образовање:** Конструкција пружа **једноставан, конкретан пример** Геделових теорема и Хилбертовог програма, приступачан и студентима.
2. **Софтверска верификација: Минимални формални системи** као што су **A** и **B** идеални су за **формалну верификацију софтвера** где је сложеност проблем.
3. **Вештачка интелигенција: GH-парови** су један модел за **дистрибуирано, кооперативно закључивање:** два партнера међусобно потврђују своје резоновање без неког централног ауторитета.
4. **Философија науке:** Пружа модел за потпуније разумевање **стабилности кроз међусобну валидацију** у комплексним системима.

Критика 3: „Циркуларност у мост аксиомама ипак постоји."

Одговор 2: Коначно решење и синтеза: Најјачи одговор је комбинација свих аргумената:

1. Синтаксичка независност (већ објашњено).
2. Семантичка потпора (интерпретације и модели).
3. Операционална перспектива: **Bridge** аксиоме се могу посматрати још као протокол руковања између два система, а у том протоколу, сваки систем независно верификује конзистентност другог и пре него што прихвати његову **Bridge** аксиому. То је интерактивна, а не циркуларна процедура.
4. Редефиниција као постојање интерпретације (**A9, B12**) која сасвим елиминише циркуларност.

Закључак Прилога Д: Конструкција минималног **GH-пара** издржава стандардне логичке критике кроз вишеструке, независне линије одбране. Њена историјска новина и технички доприноси је чине чврстом основом за будућа истраживања у релационој математици и њеним применама.

ПРИЛОГ Ђ: ВОДИЧ КРОЗ ЛОГИЧКУ НОТАЦИЈУ

Овај прилог пружа кратак преглед логичких симбола и нотације коришћене у раду.Намењен је оним читаоцима који нису специјализовани за математичку логику, ради лакшег разумевања.

Ђ.1 Основни логички оператори

Симбол	Назив	Чита се	Пример	Значење
¬	Негација	„не"	$\neg\varphi$	„није истина да φ"
∧	Коњункција	„и"	$\varphi \wedge \psi$	„φ и ψ су оба истинита"
∨	Дисјункција	„или"	$\varphi \vee \psi$	„φ или ψ (или оба)"
→	Импликација	„ако...онда"	$\varphi \rightarrow \psi$	„ако φ, онда ψ"
↔	Еквиваленција	„ако и само ако"	$\varphi \leftrightarrow \psi$	„φ важи ако и само ако важи ψ"

Примери читања из рада:

$\neg\exists p\, Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ = „не постоји доказ контрадикције у систему **B**"

$A \vdash Con^{\{fin\}}(B) \rightarrow B \vdash Con^{\{fin\}}(A)$ (импликација међу тврдњама)

Ђ.2 Квантификатори

Симбол	Назив	Чита се	Пример	Значење
$\forall$	Универзални	„за све"	$\forall x\ \varphi(x)$	„за све **x** важи $\varphi(x)$"
$\exists$	Егзистенцијални	„постоји"	$\exists x\ \varphi(x)$	„постоји **x** такво да важи $\varphi(x)$"
$\exists!$	Јединствени егзистенцијални	„постоји тачно један"	$\exists! x\ \varphi(x)$	„постоји тачно један **x** за који важи $\varphi(x)$"

Примери читања из рада:
$\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$ = „ако су следбеници једнаки, онда су и бројеви једнаки" (аксиома **A2**)
$\exists P \exists Q \exists R(\neg Collinear(P,Q,R))$ = „постоје три неколинеарне тачке" (аксиома **B3**)

Ђ.3 Доказна нотација

Нотација	Чита се	Значење
$T \vdash \varphi$	„**T** доказује φ"	У систему **T** постоји формални доказ формуле φ
$T \nvdash \varphi$	„**T** не доказује φ"	У систему **T** не постоји формални доказ формуле φ
$T \nvdash \varphi$	„**T** не доказује φ"	У систему **T** не постоји формални доказ формуле φ
$\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$	„**T** је финитарно конзистентан"	У **T** не постоји коначан доказ контрадикције $(\neg \exists p\ Prf_T(p, \ulcorner 0=1 \urcorner))$
$Prf_A(x, y)$	„**x** је доказ **y** у систему **A**"	**x** кодира валидан доказ формуле са Геделовим бројем **y** у систему **A**
$Prf_B(x, y)$	„**x** је доказ **y** у систему **B**"	**x** кодира валидан доказ формуле са Геделовим бројем **y** у систему **B**

Примери из рада: $A \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(B)$ = „систем **A** доказује финитарну конзистентност система **B**"
B12: $\neg \exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ = „не постоји доказ контрадикције у систему **A**" (мост аксиома)

Ђ.4 Системи и интерпретације

Ознака	Опис
A, Q^+	Слаба аритметика: Робинсонова аритметика **Q** проширена Δ_0-индукцијом ($I\Delta_0$)
B, G_0	Елементарна геометрија: апсолутна геометрија са аксиомом дискретности
Ax_A, Ax_B	Скупови аксиома система **A** и **B**
L_A, L_B	Језици система **A** и **B**
I	Интерпретација геометрије у аритметику: $I: L_B \rightarrow L_A$
J	Интерпретација аритметике у геометрију: $J: L_A \rightarrow L_B$
M_A, M_B	Модели система **A** и **B**
Soundness	Својство интерпретације да чува истинитост: **ако** $A \vdash I(\varphi)$ **онда** $B \vdash \varphi$

Ђ.5 Геделово нумерисање

Нотација	Чита се	Значење
$\ulcorner \varphi \urcorner$	Геделов број формуле φ	Јединствени природан број који кодира формулу φ
$\ulcorner 0=1 \urcorner$	Геделов број контрадикције	Код формуле **0=1**
$\ulcorner P \urcorner, \ulcorner L \urcorner$	Геделов број тачке/праве	Кодирање геометријских објеката (Прилог А)

Пример из рада: $Prf_B(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ = „**p** кодира доказ формуле **0=1** у систему **B**"

Ђ.6 Теоријско-множинска нотација

Симбол	Назив	Чита се	Пример	Значење
$\in$	Припадност	„припада"	$P \in L$	„тачка **P** припада правој **L**"
$\subseteq$	Подскуп	„подскуп је од"	$Th(A) \subseteq Th(B)$	„све што **A** доказује, доказује и **B**"
$\cup$	Унија	„унија"	$X \cup Y$	„унија скупова **X** и **Y**"
$\cap$	Пресек	„пресек"	$L_A \cap L_B$	„заједнички симболи језика **A** и **B**"
$\mathbb{N}$	Скуп природних бројева	—	—	{**0, 1, 2, ...**}
$\mathbb{Q}$	Скуп рационалних бројева	—	—	разломци облика **p/q**

Ђ.7 Конвенције читања сложених формула

Приоритет оператора (од највишег до најнижег):
¬ (негација)
∧, ∨ (коњункција, дисјункција)
→, ↔ (импликација, еквиваленција)
Квантификатори **(∀, ∃)** везују најслабије
Примери:
¬∃p Prf_B(p, ⌜ 0=1 ⌝) = ¬(∃p (Prf_B(p, ⌜ 0=1 ⌝))) – негација се односи на цео егзистенцијални исказ
A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B) ∧ B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A) = (A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B)) ∧ (B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A)) – коњункција две тврдње
Савет: Када сте несигурни, заграде увек појашњавају структуру.

Ђ.8 Специјални симболи

Симбол	Значење
⊥	Контрадикција (лажна формула, „дно")
⌜ φ ⌝	Геделов број формуле **φ**
ω^2	**Prf-theoretic ординал** система **Q^+ ($I\Delta_0$)**
ω	**Prf-theoretic ординал** система **G_0**
Δ_0	Класа формула са ограниченим квантификаторима **(∀x ≤ t, ∃x ≤ t)**
$I\Delta_0$	Аритметика са **Δ_0**-индукцијом (систем **Q^+**)
gcd	Највећи заједнички делилац (greatest common divisor)

Пример из рада:
|A| = ω^2, |B| = ω = „Prf-theoretic ординал система **A** је **ω^2,** система **B** је **ω**"
Δ_0-индукција: **∀x[(φ(0) ∧ ∀y(φ(y) → φ(Sy))) → ∀x φ(x)]** за **Δ_0** формуле **φ**

Ђ.9 Преглед симбола по редоследу појављивања

Симбол	Прво појављивање	Значење
A, B	Теорема 1.1	Формални системи (аритметика и геометрија)
⊢	Теорема 1.1	Релација доказивости
$Con^{\{fin\}}$	Теорема 1.1	Финитарна конзистентност
⌜ ⌝	Теорема 1.1	Геделов број
Prf_A, Prf_B	Аксиоме **A9, B12**	Предикати доказа
Q^+	Секција 2.1	Систем **A ($I\Delta_0$)**
G_0	Секција 2.2	Систем **B** (елементарна геометрија)
I, J	Секција 3.4, 3.5	Интерпретације
Δ_0	Секција 2.1	Класа ограничених формула
ω^2, ω	Теорема 1.1 (Део 4)	**Prf-theoretic ординали**

Ђ.10 Типични обрасци у раду

Образац 1: Међусобна конзистентност
A ⊢ $Con^{\{fin\}}$(B) и **B ⊢ $Con^{\{fin\}}$(A)**
Чита се: „систем A доказује конзистентност система **B**, и систем **B** доказује конзистентност **A**"
Образац 2: Мост (Bridge) аксиоме
A9: ¬∃p Prf_B(p, ⌜ 0=1 ⌝)
B12: ¬∃p Prf_A(p, ⌜ 0=1 ⌝)
Чита се: „аксиома **A9** тврди да не постоји доказ контрадикције у **B**; аксиома **B12** тврди да не постоји доказ контрадикције у **A**"
Образац 3: Неупоредивост
A ⊬ T (геометријска теорема) и **B ⊬ U** (аритметичка теорема)
Чита се: „систем **A** не доказује геометријску теорему **T**, систем **B** не доказује аритметичку теорему **U**"
Образац 4: Интерпретације

I: $L_B \rightarrow L_A$, J: $L_A \rightarrow L_B$
Чита се: „**I** је интерпретација језика геометрије у језик аритметике, док **J** представља интерпретацију језика аритметике у језик геометрије"

ПРИЛОГ Е: СТРУКТУРНА КОНТРОЛА СТАБИЛНОСТИ GH-ПАРА

У овом прилогу урадићемо структурну контролу стабилности **GH-пара** конструисаног у овом раду.

Е.1 Независност система T_1 и T_2

Провера да ли постоји тотална интерпретација између система:

- **$T_1 = Q^+$ ($I\Delta_0$ / проширена слаба аритметика)**
- **$T_2 = G_0$ (елементарна апсолутна геометрија са дискретношћу)**

Услови **GH-оквира** захтевају:

- **$\neg\exists$ Ī" : $T_1 \rightarrow T_2$**
- **$\neg\exists$ Ī" : $T_2 \rightarrow T_1$**

Закључак:

✔ системи не поседују потпуну интерпретабилност

✔ аритметички и геометријски домени остају семантички раздвојени

Е.2 Провера ARC услова (Аксиома рефлексивне конструктивности)

ARC захтева:

- **$T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)$**
- **$T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)$**

Провера са укљученом **B11**:

- **B11** не утиче на предикате доказа **Prf_A** и **Prf_B**
- не мења структуру финитарне конзистентности
- не уводи само-доказивост

Закључак:

✔ ARC остаје важећи

✔ рефлексивна симетрија није нарушена

Е.3 Анализа B11 (декларативна дискретизација)

Аксиома:

B11: ∃n ∀P (P ∈ L → P је n-та тачка на L)

Кључна провера:

- не дефинише операције над природним бројевима
- не уводи функције сабирања или множења
- не кодира синтаксу формалних система

Класификација:

- **B11** = **декларативна дискретизација**
- не = аритметизација геометрије

Закључак:

✔ **B11** не нарушава **GH-**независност

✔ не индукује аритметичку интерпретабилност

Е.4 Провера Геделових ограничења

Потребно је да важи:
ниједан систем не доказује сопствену конзистентност у финитарном смислу
конзистентност је само унакрсна (рефлексивна кроз други систем)
Формално:

- **$\neg(T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1))$**
- **$\neg(T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2))$**

и дозвољено је:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

Закључак:

✔ сада је у потпуности усклађено са ARC

✔ и не постоји конфликт са Геделовом другом теоремом (нити у јачем ни у слабом облику)

Е.5 Интерпретабилност и колапс структуре

Провера да ли постоји колапс у смислу:

- редукције оба система у заједнички модел
- или потпуне семантичке идентификације

Услови:

¬∃ total interpretation collapsing $\mathbf{T_1}$ and $\mathbf{T_2}$ into a single structure

Закључак:

✔ нема структуралног колапса

✔ **GH-пар** остаје релационо стабилан

Е.6 Синтезни закључак

На основу свих провера:

- системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ остају независни
- **ARC** остаје важећа рефлексивна структура
- **B11** не уводи аритметички колапс
- Геделова ограничења нису нарушена
- интерпретабилност је строго ограничена

ПРИЛОГ Ж: ОДСУСТВО САМО-РЕФЕРЕНЦИЈАЛНЕ КОНЗИСТЕНТНОСТИ (НЕПОСТОЈАЊЕ ФИКСПОИНТА)

Овај прилог формално утврђује да **GH-конструкција** не доводи до појаве рефлексивног фикспоинта, односно ситуације у којој неки систем посредно или непосредно доказује сопствену конзистентност.

Ж.1 Циљ анализе

Циљ је да се искључи могућност затворене доказне петље облика:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

или

- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$

било директно или индиректно преко другог система.

Ж.2 Основна структура GH-пара

Нека су дати системи:

- $\mathbf{T_1 = Q^+}$
- $\mathbf{T_2 = G_0}$

са условима:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

и мост-аксиомама:

- **A9:** $\mathbf{\neg \exists p\ Prf_B(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)}$
- **B12:** $\mathbf{\neg \exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)}$

Ж.3 Услов за постојање фикспоинта

Фикспоинт би постојао ако би се могла конструисати затворена доказна шема:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$

- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

  ⇒
- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

или симетрично за $\mathbf{T_2}$

Ово би захтевало постојање механизма који омогућава трансфер доказивости кроз оба система назад у полазни систем.

Ж.4 Анализа предиката доказивости

Предикати:

- $\mathbf{Prf_A(n, \varphi)}$
- $\mathbf{Prf_B(n, \varphi)}$

дефинисани су унутар сопствених система и задовољавају:

- синтаксичку затвореност
- одвојеност кодирања

Кључна чињеница:

✔ не постоји заједнички кодни слој који омогућава редукцију: $\mathbf{Prf_A \leftrightarrow Prf_B}$

Закључак:

✔ није могуће превести доказивост из једног система у други у пуном облику

Ж.5 Улога B11 (дискретизација)

Аксиома:

- **B11: ∃n ∀P (P ∈ L → P је n-та тачка на L)**

Даје:

- индексну структуру
- дискретност геометријског домена

Али не даје:

- аритметичке операције
- Геделову нумерацију
- кодирање формула и доказа

Закључак:

✔ **B11** не омогућава реконструкцију предиката $\mathbf{Prf_A}$

✔ не омогућава затварање доказне петље

Ж.6 Немогућност композиције рефлексије

Да би постојао фикспоинт, морало би важити:

- $\mathbf{(Con^{\{fin\}}(T_2) \rightarrow Con^{\{fin\}}(T_1))}$ **интерно у** $\mathbf{T_1}$

или постојање композиције: $\mathbf{T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1}$ у доказном смислу.

Међутим:

- свака рефлексија је ограничена на један корак
- нема правила које омогућава композицију рефлексије

Закључак:

✔ рефлексивност није транзитивна

✔ петља се не може затворити

Ж.7 Улога мост-аксиома (A9 и B12)

Аксиоме:

- **A9:** $\mathbf{\neg \exists p\ Prf_B(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)}$
- **B12:** $\mathbf{\neg \exists p\ Prf_A(p, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)}$

обезбеђују:

- унакрсну валидацију конзистентности
- али не и самореференцију

Оне не имплицирају:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$

Закључак:

✔ мост-аксиоме не генеришу фикспоинт

Ж.8 Коначни резултат

На основу свих претходних анализа:

- не постоји механизам за самореференцијалну конзистентност
- не постоји композиција рефлексије
- не постоји заједнички синтаксички кодни слој
- не постоји интерпретативни колапс

Коначна формулација

- $\mathbf{\neg(T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1))}$
- $\mathbf{\neg(T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2))}$

И

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)) \wedge (T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1))}$

не имплицирају самореференцијалну конзистентност.

Ж.9 Закључак

GH-пар задржава:

✔ рефлексивну симетрију
✔ Геделову непотпуност
✔ одсуство самодоказивости

Систем не колабира у фиксну тачку, већ остаје стабилна релациона структура, тј.структура у којој је конзистентност дистрибуирана, а не интерно затворена.

ПРИЛОГ З: СКЕЛЕТ ФОРМАЛИЗАЦИЈЕ У LEAN 4

Напомена: Овај прилог представља скелет формализације минималног **GH-пара** у доказном **Lean 4**. асистенту. Овај скелет показује структуру формализације идентификујући кључне леме које треба да докажемо, али није машински верификован. Потпуна верификација јесте циљ будућег истраживања.

```
-- ============================================================
-- ПРИЛОГ З: Скелет формализације GH-пара (Q⁺, G₀) у Lean 4
-- Аутори: Ранко Бошњак, Милица Бошњак, Даница Бошњак
-- Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР, Нови Сад
-- ============================================================
import Mathlib.Logic.Basic
import Mathlib.Data.Nat.Basic
import Mathlib.Data.Finset.Basic
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 1: Геделово нумерисање
-- ============================================================
-- Геделов број формуле је природан број
abbrev GödelCode := ℕ
-- Кодирање коначних низова преко простих бројева
-- enc(s₁, s₂, ..., s •) = 2^s₁ · 3^s₂ · 5^s₃ · ... · p • ^s •
noncomputable def encode (seq : List ℕ) : ℕ :=
  seq.enum.foldl (fun acc (i, x) => acc * (Nat.nth Nat.Prime i).pow x) 1
-- Декодирање је инверзна функција кодирања
-- Лема З.1: encode је инјективна функција
lemma encode_injective : Function.Injective encode := by
  sorry -- Следи из јединствене факторизације (Основна теорема аритметике)
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 2: Предикати доказивости
```

```
-- ============================================================
-- Предикат доказивости за систем A (Q⁺)
-- Prf_A(p, φ): p кодира валидан доказ формуле φ у систему A
def Prf_A : ℕ → GödelCode → Prop :=
  fun p φ =>
    -- p кодира коначан низ формула ψ₁,...,ψ□ = φ
    -- где свака ψᵢ је аксиома или следи из претходних
    sorry -- Δ₀-дефинисан предикат (видети §6.2.1)

-- Предикат доказивости за систем B (G₀)
def Prf_B : ℕ → GödelCode → Prop :=
  fun p φ =>
    sorry -- Δ₀-дефинисан предикат (видети §6.2.2)
-- Геделов број контрадикције ⌜ 0=1 ⌝
def gödel_contradiction : GödelCode := sorry
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 3: Формализована конзистентност
-- ============================================================
-- Con_A: Систем A је финитарно конзистентан
def Con_A : Prop := ¬∃ p : ℕ, Prf_A p gödel_contradiction
-- Con_B: Систем B је финитарно конзистентан
def Con_B : Prop := ¬∃ p : ℕ, Prf_B p gödel_contradiction
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 4: Bridge (мост) аксиоме
-- ============================================================
-- Bridge аксиома A9: Систем A постулира Con_B
axiom bridge_A9 : Con_B
-- Bridge аксиома B12: Систем B постулира Con_A
axiom bridge_B12 : Con_A
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 5: Интерпретације
-- ============================================================
-- Интерпретација I: Геометријски језик → Аритметички језик
-- I(тачка (x,y)) = уређени пар природних бројева
noncomputable def I_interpretation (φ_B : GödelCode) : GödelCode :=
  sorry -- Детаљи у §4.1 и Прилогу Б
-- Интерпретација J: Аритметички језик → Геометријски језик
-- J(n) = сегмент дужине n
noncomputable def J_interpretation (φ_A : GödelCode) : GödelCode :=
  sorry -- Детаљи у §4.2 и Прилогу Б
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 6: Кључне леме
-- ============================================================
-- Лема 3.2 (Soundness за I):
-- Ако B доказује φ, онда A доказује I(φ)
lemma soundness_I (φ : GödelCode) :
    (∃ p, Prf_B p φ) → (∃ q, Prf_A q (I_interpretation φ)) := by
  sorry
  -- Доказ индукцијом по дужини доказа у B
  -- Видети Теорему 5.4.1
-- Лема 3.3 (Soundness за J):
-- Ако A доказује ψ, онда B доказује J(ψ)
lemma soundness_J (ψ : GödelCode) :
    (∃ p, Prf_A p ψ) → (∃ q, Prf_B q (J_interpretation ψ)) := by
```

```
  sorry
  -- Доказ индукцијом по дужини доказа у A
  -- Видети Теорему 5.4.2
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 7: Главна теорема — GH-пар
-- ============================================================
-- Теорема 3.1: A доказује Con_B
-- (директно из Bridge аксиоме A9)
theorem A_proves_Con_B : Con_B := bridge_A9

-- Теорема 3.2: B доказује Con_A
-- (директно из Bridge аксиоме B12)
theorem B_proves_Con_A : Con_A := bridge_B12
-- Теорема 3.3: A не доказује Con_A
-- (Геделова друга теорема о непотпуности за A)
theorem A_not_proves_Con_A : ¬(Con_A → ∃ p, Prf_A p gödel_contradiction → False) := by
  sorry
  -- Следи из Геделове II теореме примењене на Q⁺
  -- Видети §5.1, Доказ 2
-- Теорема 3.4: B не доказује Con_B
-- (Геделова друга теорема о непотпуности за B)
theorem B_not_proves_Con_B : ¬(Con_B → ∃ p, Prf_B p gödel_contradiction → False) := by
  sorry
  -- Следи из Геделове II теореме примењене на G₀
  -- Видети §5.1, Доказ 1
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 8: Неупоредивост
-- ============================================================
-- Теорема 3.5: Постоји геометријска теорема коју A не доказује
theorem A_not_proves_parallel_postulate :
    ∃ φ_geom : GödelCode,
      (¬∃ p, Prf_A p φ_geom) ∧
      (∃ q, Prf_B q φ_geom) := by
  sorry
  -- Постулат паралелности је независан у апсолутној геометрији
  -- Видети Теорему 4.3.1
-- Теорема 3.6: Постоји аритметичка теорема коју B не доказује
theorem B_not_proves_Lagrange :
    ∃ φ_arith : GödelCode,
      (¬∃ p, Prf_B p φ_arith) ∧
      (∃ q, Prf_A q φ_arith) := by
  sorry
  -- Лагранжова теорема о четири квадрата није доказива у G₀
  -- Видети Теорему 4.3.2
-- ============================================================
-- ОДЕЉАК 9: Синтеза — (A, B) је GH-пар
-- ============================================================
-- Дефиниција GH-пара (имплементација Дефиниције 2.1.1 из [3])
structure GH_Pair (T₁ T₂ : Type*) where
  -- DP1: Међусобна доказивост конзистентности
  mutual_con_1 : Con_B  -- A доказује Con(B)
  mutual_con_2 : Con_A  -- B доказује Con(A)
  -- DP2: Појединачна Геделова ограничења
  gödel_1 : ¬(Con_A → False)  -- A не доказује Con(A)
```

```
  gödel_2 : ¬(Con_B → False)  -- B не доказује Con(B)
  -- DP3: Неупоредивост
  incomparable : True  -- Формализација неупоредивости (видети §3)
-- Главни резултат: (Q⁺, G₀) је GH-пар
theorem minimal_GH_pair_exists : Nonempty (GH_Pair ℕ ℕ) := by
  exact ⟨{
    mutual_con_1 := A_proves_Con_B,
    mutual_con_2 := B_proves_Con_A,
    gödel_1     := by sorry,  -- Геделова II за A
    gödel_2     := by sorry,  -- Геделова II за B
    incomparable := trivial
  }⟩
-- ============================================================
-- НАПОМЕНА О ОТВОРЕНИМ SORRY-ЈИМА
-- ============================================================
-- Свако `sorry` у овом скелету означава лему чији је доказ
-- садржински дат у главном тексту рада, али чија потпуна
-- формализација у Lean 4 остаје за будући рад.
-- Приоритет за затварање:
-- 1. encode_injective  (§6.1, Лема 6.1.1)
-- 2. soundness_I       (§5.4.1, Теорема 5.4.1)
-- 3. soundness_J       (§5.4.2, Теорема 5.4.2)
-- 4. A_not_proves_Con_A (§5.1, Геделова II за Q⁺)
-- 5. B_not_proves_Con_B (§5.1, Геделова II за G₀)
-- ============================================================
```

Коментар уз прилог:

Овај скелет садржи све кључне структуре — Геделово нумерисање, предикате доказивости, **Bridge** аксиоме, **Soundness** леме и коначну дефиницију **GH-пара**. Свако **sorry** је веома прецизно означено и повезано са конкретном секцијом главног текста где је одговарајући доказ садржински дат. Редослед приоритета за затварање **sorry**-ја на крају скелета даје јасан путоказ будућим истраживачима.

ЕПИЛОГ: Од парадокса до помирења

Када је Курт Гедел 1931. године објавио своје теореме о непотпуности [4], чинило се да је Хилбертов програм [7] досегао свој крај. Та визија апсолутне сигурности кроз формалне доказе конзистентности била је, наизглед, разбијена. Међутим, историја математике учи нас да је свако велико ограничење често отворило врата још већим откровењима.

Од монолога до дијалога

Овај рад демонстрира да Геделова ограничења нису крај Хилбертових амбиција - већ управо њихова трансформација. Показали смо да конзистентност није својство појединачних система, већ релациона структура између њих. Где један систем не може сам себе потврдити, два система могу **међусобно** да се валидирају.

Конструкција $\mathbf{Q^+ \leftrightarrow G_0}$ није само технички резултат, већ **доказ принципа**: стабилност у формалним основама није монолитна, већ рефлексивна. Математика не почива на једном, непокретном, темељу, већ на мрежи узајамних потврда.

Минималност као врлина

Традиционални приступи **GH-паровима** захтевају робусне системе попут Пеанове аритметике или Цермело-Френкелове теорије скупова. Овај рад показује да је довољна **минимална структура**:

1. Робинсонова аритметика са $\mathbf{\Delta_0}$-индукцијом $\mathbf{(I\,\Delta_0)}$
2. Елементарна геометрија без постулата паралелности

Ова минималност није случајна. Она открива саму **суштину GH-релације**: не максимална снага, већ **оптимална комплементарност**. Као што је Ајнштајн увек тражио најједноставније једначине којима би објаснио универзум, тако и **GH-парови** захтевају најмање аксиома који омогућавају рефлексивну стабилност. Математички, **GH-парови** нису изоловани феномен. Они су **формална артикулација** универзалног принципа који се испољава кроз читаву стварност. Ова универзалност није случајна.

Она сугерише да **стабилност** — била она у формалним системима, биолошким организмима или друштвеним структурама - не може проистећи само из једне изоловане компоненте. Стабилност настаје из **рефлексивне комплементарности**, у којој ова два ентитета стоје заједно јер не могу стајати самостално.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

[1] **Blum, M.** (1967). *A machine-independent theory of the complexity of recursive functions*. Journal of the ACM, 14(2), 322–336.
[2] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Гедел-Хилбертов пар и релациона унија.* PH-MAT-01-01A-SRB
[3] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Конструктивни Гедел-Хилбертови парови.* PH-MAT-01-01B-SRB • https://doi.org/10.5281/zenodo.19762864 • https://doi.org/10.5281/zenodo.19763178
[4] **Gödel, K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 38(1), 173–198.
[5] **Hardy, G. H., & Wright, E. M.** (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.
[6] **Henkin, L**. (1949). *The completeness of the first-order functional calculus*. Journal of Symbolic Logic,14(3), 159–166.
[7] **Hilbert, D.** (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Teubner.
[8] **Hilbert, D.** (1926). *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, 95(1), 161–190.
[9] **Krajíček, J.** (1995). *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*. Cambridge University Press.
[10] **Nelson, E**. (1986). *Predicative Arithmetic*. Princeton University Press.
[11] **Hájek, P., & Pudlák, P.** (1993). *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Springer.
[12] **Pudlák, P.** (1998). *The lengths of proofs. In S. Buss (Ed.),* Handbook of Proof Theory (pp. 547– 637). Elsevier.
[13] **Robinson, R. M.** (1950). *An Essentially Undecidable Axiom System*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1, 729–730.
[14] **Suppes, P., & Tarski, A. (Eds.). (**1959). *The Axiomatic Method*. North-Holland.
[15] **Tarski, A**. (1959). *What is Elementary Geometry?* In L. Henkin, P. Suppes, & A. Tarski (Eds.), *The Axiomatic Method* (pp. 16–29). North-Holland.

POST SCRIPTUM

Најдубље истине о основама математике не леже у појединачним системима, већ су у односима међу њима. Чак и најмањи темељи могу подупрети највеће грађевине, само када стоје заједно, а ми смо управо урдили оно што се сматрало непомирљивим: саставили смо Хилберта и Гедела и то на један сасвим необичан начин. Али необичан или не саставили смо их и то преко релационе уније. Овај рад то и коначно потврђује. Отворили смо један нови пут у математичкој логици, а куда ћемо њиме стићи време ће нам бити и сведок и судија.

ЗАВРШНО СЛОВО ТРИЈАДЕ

Гедел и Хилберт заједно јашу.
Не као победник и побеђени.
Не као господар и слуга.
Не као теза и антитеза.
Већ као два јахача који су схватили да се даље стиже само заједно.
Један види границе, други види пут.
Заједно – виде будућност.
Ова тријада је посвећена том јахању.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Нови Сад
09.01.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.19763224
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-01C-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

CONSTRUCTION OF A GÖDEL–HILBERT PAIR

What one system cannot prove alone, two can confirm together.

ABSTRACT

This paper is the culmination of the preceding works, in which the **Gödel–Hilbert pair** was defined and the **Axiom of Reflexive Constructivity (ARC)** was introduced, along with guidance for its successful construction. We construct the minimal **Gödel–Hilbert pair,** two axiomatic systems of minimal complexity that mutually prove each other's consistency, while individually satisfying Gödel's incompleteness theorems. Departing from traditional foundations that require considerably more robust arithmetic, we show that Robinson Arithmetic **(Q),** extended with **Δ_0-induction,** and **elementary geometry** are sufficient to instantiate the **GH-relation**. The pair represents the simplest known formal systems capable of reflexive consistency validation, providing a constructive realization of Hilbert's program through mutual justification rather than self-validation. The construction yields a universal principle of stability applicable not only in mathematical but also in natural and social domains.

Keywords: minimal axiomatics, mutual consistency, Robinson Arithmetic, foundational mathematics, elementary geometry, Gödel–Hilbert pairs.

AMS Classification (2020):

03B30 — Foundations of classical theories (including reverse mathematics);
03F25 — Relative consistency and interpretations;
03F40 — Gödel numbering and incompleteness questions;
51M05 — Euclidean geometries (general) and generalizations.

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
09.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"