Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.19763178
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-01B-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

КОНСТРУКТИВНИ ГЕДЕЛ-ХИЛБЕРТОВИ ПАРОВИ

Ниједан систем не може потпуно да осветли самог себе;
али у рефлексији један систем може осветлити други.

АПСТРАКТ

Геделове теореме непотпуности [12] често су тумачене као коначна реч о Хилбертовом програму [15, 16]. Међутим, њихова дубља импликација можда није немогућност доказивања конзистентности, већ структурна асиметрија саме правданости. Овај рад развија конструктивно оријентисано проширење **Гедел–Хилбертовог (GH)** оквира, уводећи **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)**, један принцип који генерализује хилбертовску верификацију кроз симетрично укрштено референцирање. Уместо трагања за појединачним само-верификујућим системом, **GH-приступ** конструише упарене формалне системе — **GH-парове** [7], од којих сваки може рефлектовати конзистентност другог без самореференцијалности. Овај однос формализујемо кроз конструктивни оператор који је дефинисан на паровима рекурзивно пребројивих система, показујући да он сам производи нетривијални простор симетричне правданости. Као студију случаја, разматрамо четири кандидат-пара који представљају ортогоналне форме конструктивне изражајности. Овако добијени оквир реинтерпретира Хилбертов програм као потрагу, не за апсолутном конзистентношћу већ, за епистемичким еквилибријумом међу формалним перспективама, односно помаком од монолошког доказа ка дијалошкој кохерентности. Одређујући услове под којима такав еквилибријум постаје конструктивно дозвољен, сам **GH-модел** пружа основу за **поновно уједињење непотпуности и конзистентности** кроз релациону правданост уместо само-садржаности.

Кључне речи: Гедел–Хилбертови парови; рефлексивна конструктивност; логичка симетрија; конзистентност; непотпуност; категоријска дуалност; Хилбертов програм; Геделове теореме.

AMS КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):

03A05 — Основи математике;
03F03 — Теорија доказа и конструктивна математика;
03F15 — Теорија рекурзивних функција;
03B70 — Логика у философији математике.

1. УВОД

Хилбертов програм [15, 16] је и произашао из уверења да математика може постати транспарентна сама себи. Сводећи своје резоновање на финитарне доказе о формализованим тврдњама, Хилберт се надао да ће доказати апсолутну конзистентност математике и то без позивања на интуицију или на семантику. У свом раду *Über das Unendliche* из 1926. године, он је суптилно формулисао крајњи циљ: **математика би требало да буде самодостатан, коначно прегледан систем чија се конзистентност може доказати финитарним средствима.** Ова тежња није изражавала само технички проблем, већ и епистемолошки идеал: **само-утемељење разума**. Али **Геделове теореме непотпуности** задале су разоран ударац тој визији [12]. Сваки конзистентан довољно јак формални систем способан да изрази елементарну аритметику не може доказати сопствену конзистентност, нити сам може обухватити све математичке истине. За **Хилбертов програм**, ово се чинило фаталним резултатом: сами формализам дизајниран да гарантује сигурност открио је неуништиву границу формалне само-верификације.

Ипак, Геделове теореме могу се тумачити мање као оповргавање, а много више као редирекција. Оне откривају да правданост не може остати интерна једном систему; уместо тога, она мора произаћи из односа међу системима. Ако ниједна теорија не може да садржи сопствену гаранцију, онда можда и кохерентност математике лежи не у једној јединој основи, већ у еквилибријуму међу више њих. Овај

помак — од монолошког доказа ка дијалошкој рефлексији — уоквирује **Гедел–Хилбертову (GH) перспективу** развијену у овом раду.

Историјски гледано, слични релациони потези обележили су еволуцију логике и филозофије науке. Хијерархија метајезика [9], Феферманови принципи рефлексије [10], модерно проучавање међусобне интерпретабилности [29] ту замењују потрагу за апсолутном затвореношћу структурираним формама интер-системске зависности. У епистемологији, кохерентне теорије правданости [5], као и принцип комплементарности у физици [4], огледају исту идеју**:** конзистентност као равнотежа перспектива уместо као изолована сигурност.

Овај релациони став може се разумети и као наставак Карнаповог увида да ниједан језички оквир не може изразити сопствена правила формирања и истинитости без циркуларности. Сваки формални систем, да би био смислен, захтева метајезик у коме се његова синтакса и семантика могу описати. Феферман је проширио овај увид у теорији доказа [9, 10], јасно показујући да хијерархија принципа рефлексије може да обухвати све више нивое снаге конзистентности, иако се никада не колабира у коначни, само-правдајући систем. У том смислу, Феферманов рад антиципира **GH**-оквир: правданост напредује не само-садржаношћу, већ рефлексивном итерацијом.

Предлог **GH-парова** [7], међутим, уводи ограничење — **симетрију**. Док Феферманове хијерархије остају уређене, **GH**-парови траже еквилибријум: два система у рефлексивној еквиваленцији, од којих сваки огледа исправност другог на финитаран и конструктиван начин. **GH-оквир** генерализује овај увид. **Гедел–Хилбертов пар (GH-пар)** састоји се од два аутономна, али компатибилна, формална система, од којих сваки може препознати конзистентност другог без колапса у самореференцу. Тако је, формално гледано, **GH-пар** потпуно дефинисан симетричном односом допуштености између две рекурзивно пребројиве теорије $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$, под условом да ниједна од њих не може да интерпретира ону другу на доказно-теоријски јачи начин. Филозофски, такав пар отелотворује могућност кохерентне интерзависности: **однос огледала у коме правданост циркулира уместо да престаје. Ово, можда, указује на чињеницу да је циркуларност доказа ипак валидна у математици али би се то могло узети у разматрање ако и само ако је могуће доказати да су системи који доказују један другог GH-пар. Можда то није немогуће ни у другим условима али у овима знамо да јесте!**

Овај рад проширује ту идеју конструктивно. Док су раније формулације, као нпр. **Аксиома логичке могућности (ALP)** [7, 8], утврдиле да **GH-парови** нису искључени ниједном од мета-теорема [7], у овом раду прелазимо на оперативни принцип; на **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)**. **ARC** тврди да је симетрична правданост не само могућа већ је и конструктивно допуштена: сваки члан **GH-пара** мора бити способан кодирати финитарну рефлексију исправности оног другог унутар сопственог система доказа, без поновног увођења парадокса. Са становишта теорије доказа, ово би значило реинтерпретацију Хилбертовог идеала. Ако његово финитарно резоновање треба да осигурава бесконачно, а онда рефлексивна конструктивност обезбеђује финитарно резоновање, кроз узајамну, а не унилатералну валидацију. Хилбертов захтев за апсолутном конзистентношћу [25] и онда Геделова демонстрација њене немогућности [13] ту конвергирају у трећи модус: **кохерентност**. **GH-оквир** [7] предлаже да оно што не може бити доказано интерно ипак може бити стабилизовано релационим путем.

И у овом раду посветићемо један део одбрани од кружности, иако смо то обрадили у претходном [7]. Разлог јесте фундаменталност одбране од овог приговора, али и независност сваког рада ове тријаде. Првенствени циљ овог рада је да детаљније разради кандидате за **GH-парове** који су предложени у претходном раду [7] **GH-тријаде** и коначно нас определи који би то пар изаберали за експлицитну конструкцију. Изабрани пар покушаћемо конструисати у следећем раду **GH-тријаде,** уверени да ће нам се труд исплатити! Ма који пар да одаберемо, то ни у ком случају не значи да остали кандидати не могу бити **GH-пар**, али је нама, за коначну проверу теорије, довољна само једна конструција.

Остатак рада се развија на следећи начин. Поглавље 2 формализује **GH-оператор** и дефинише разне критеријуме за симетричну допуштеност. Поглавље 3 примењује оквир на конкретну студију случаја за кандидате који су дефинисани у [7]. Поглавље 4 уводи **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)** и смешта је у савремени доказно-теоријски и филозофски контекст. Поглавље 5 излаже доказе и семантичку интерпретацију. Поглавље 6 даље реконструише **GH-релацију** у категоријским терминима. Коначно, Поглавље 7 разматра ограничења и отворена питања, након чега су Закључак и Прилози, после којих следи **Епилог** који резимира како то кохерентност замењује конструкцију као помирительски принцип између Хилберта и Гедела.

2. ФОРМАЛНО ОКРУЖЕЊЕ И ДЕФИНИЦИЈЕ

Циљ овог поглавља је да успостави формалну позадину за **Гедел–Хилбертов оквир** [7], и дефинише конструктивни оператор, који и управља симетричном допуштеношћу између два формална система. Тамо где Геделови резултати непотпуности откривају границе интерне правданости, **GH-оператор** формализује како правданост може циркулисати између теорија без самореференце. Нека су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ два рекурзивно пребројива, конзистентна система формулисана у логици првог реда. Претпоставља се да сваки систем поседује примитивно рекурзивне предикате доказа $\mathbf{Prf_1(x)}$ и $\mathbf{Prf_2(x)}$, респективно, који задовољавају стандардне услове изводљивости [19].

2.1 Дефиниције

Дефиниција 2.1.1 (GH-оператор). Пар $\langle \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2} \rangle$ формира **Гедел–Хилбертов пар ако и само ако** оба система задовољавају услов симетричне допуштености:

$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_2}) \text{ и } \mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_1})$$

где $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_i})$ означава финитарну рефлексивну тврдњу која тврди конструктивну конзистентност система $\mathbf{T_i}$, где ниједан систем није доказно-теоријски јачи од другог у смислу интерпретабилности. Оператор $\mathbf{GH(T_1, T_2)} = \langle \mathbf{T_1, T_2} \rangle$ дакле означава релационо стање правданости: уређени пар обдарен узајамном допуштеношћу. За разлику од стандардне интерпретабилности, која индукује асиметричну хијерархију $\mathbf{(T_1 \geq T_2)}$, **GH-релација** намеће **еквилибријум** — појам који огледа Геделов помак са синтактичке изводљивости на семантичку еквиваленцију, али унутар финитарног домена.

Овај еквилибријум изражава оно што би се могло назвати **епистемичком симетријом**: свака друга теорија ову сматра коначно кохерентном, уздржавајући се од само-асерције.

Формално, захтевамо два ограничења:

Очување конзистентности: Ако су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ **GH-повезане**, њихов заједнички фрагмент $\mathbf{T_1 \cap T_2}$ **онда** је конзистентан:

$$\mathbf{GH(T_1, T_2) \vdash Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(T_1 \cap T_2)}.$$

Упоредивост: Ниједан систем не доказује нити интерпретира потпуну рефлексивну шему другог:

$$\mathbf{\neg(T_1 \vdash Ref(T_2)) \wedge \neg(T_2 \vdash Ref(T_1))}.$$

Ови услови гарантују да се **GH-релација** не колабира у тривијалну еквиваленцију или неку релацију подтеорије.

Нека **Ref(T)** означава **рефлексивну шему** система **T**, тј. скуп свих реченица облика $\mathbf{Prf_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi}$, где $\mathbf{Prf_T(x)}$ је предикат доказивости у **T**. Ове реченице изражавају да је све што **T** доказује истинито. Познато је да **T + Ref(T)** доказује $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(T)}$, али **T** само не може доказати **Ref(T)** без последица по Геделову теорему [13, 19].

Под **заједничким фрагментом** $\mathbf{T_1 \cap T_2}$ подразумевамо скуп реченица које припадају пресеку језика $\mathbf{\mathcal{L}(T_1)}$ и $\mathbf{\mathcal{L}(T_2)}$ и које су доказиве у оба система. Формално: $\mathbf{T_1 \cap T_2 = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}(T_1) \cap \mathcal{L}(T_2)}$ и $\mathbf{T_1 \vdash \varphi}$ и $\mathbf{T_2 \vdash \varphi \}}$. Овај фрагмент чини заједничко језгро око којег се гради међусобна валидација.

Дефиниција 2.1.2 (Финитарна рефлексивна тврдња).

За неки систем $\mathbf{T_i}$ - са примитивно рекурзивним предикатом доказа $\mathbf{Prf_i(x)}$, финитарна рефлексивна тврдња $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_i})$ се формално дефинише на следећи начин:

$$\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(T_i) \equiv \neg\exists p\ Prf_i(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$$

где $\mathbf{Prf_i(p, \varphi)}$ значи „**p** је код доказа за φ у $\mathbf{T_i}$", а $\ulcorner \mathbf{0=1} \urcorner$ је Геделов број контрадикције **0=1**. Ознака „fin" указује да је ова тврдња формулисана финитарно, као $\mathbf{\Pi_1}$-формула у језику аритметике, а не да је ограничена на доказе неке фиксне дужине. Та дефиниција изражава пуну конзистентност система $\mathbf{T_i}$ у њеном финитарно формулисаном облику. За системе способне да формализују синтаксу (**PA** и јачи), ова формула јесте доступна и представља стандардни начин да се изрази $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_i})$ унутар језика аритметике [13, 19]. **Напомена:** У неким контекстима (нпр. градијент сложености у Теореми 5.2) користимо и ограничену верзију ове тврдње, коју означавамо $\mathbf{Con}_{\mathbf{N}}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_i})$ и дефинишемо као:

$$\mathbf{Con}_{\mathbf{N}}^{\{\mathbf{fin}\}}\mathbf{(T_i) \equiv \neg\exists p \leq N\ Prf_i(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$$

Ова ограничена верзија тврди да не постоји доказ контрадикције дужине $\leq \mathbf{N}$, што је и конструктивно проверљиво унутар система за свако конкретно **N**. Она је слабија од $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_i})$ и користи се ту као помоћни појам у доказима који захтевају финитарну проверљивост.

Дефиниција 2.1.3 (Степен симетрије GH-пара).

За **GH-пар** (T_1, T_2) дефинишемо меру његове симетрије $\sigma(T_1, T_2)$ као:

$$\sigma(T_1, T_2) = | \kappa(T_1, T_2) - \kappa(T_2, T_1) | / \max(\kappa(T_1, T_2), \kappa(T_2, T_1)),$$

Нека $\kappa(T_i, T_j)$ означава **модалну дубину** неопходну да систем T_i изведе финитарну конзистентност система T_j. Формално, $\kappa(T_i, T_j)$ је најмањи ред α у рефлексивној хијерархији [9] такав да:

$$T_i \vdash_\alpha \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_j),$$

где $\vdash_\alpha$ означава доказивост уз коришћење принципа рефлексије до реда α. Ако T_i не може доказати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_j)$, дефинишемо $\kappa(T_i, T_j) = \infty$.

Особине:

- $0 \leq \sigma(T_1, T_2) \leq 1$
- $\sigma(T_1, T_2) = 0$ **ако и само ако** је пар **савршено симетричан** ($\kappa(T_1, T_2) = \kappa(T_2, T_1)$).
- $\sigma(T_1, T_2) \approx 1$ указује на значајну асиметрију у односу правданости.

Пример: За идеални **GH-пар** из конструкције, тежимо ка $\sigma(T_1, T_2) \to 0$. Али за пар где једна теорија доминира, $\sigma(T_1, T_2)$ ће бити високо.

2.2. Лема о ацикличности GH-релације

Лема 2.2 (Ацикличност GH-релације под условом различитих ординала).

Нека су $T_1, T_2, ..., T_n$ рекурзивно пребројиви, конзистентни системи са међусобно различитим **prf-theoretic** ординалима $|T_1|, |T_2|, ..., |T_n|$, који задовољавају **GH**-услов. Тада не постоји коначан циклус: $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2), T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_3), ..., T_n \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$.

Доказ 1 (Кроз prf-theoretic ординале).

Нека $S \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$. Тада по теореми о рефлексији [2, 9] важи $|S| > |T|$. Применом на сваки пар у претпостављеном циклусу добијамо: $|T_1| > |T_2| > ... > |T_n| > |T_1|$, што је контрадикција.

Дакле, циклус не постоји. ■

Доказ 2 (Кроз семантику модела).

Претпоставимо да циклус постоји. Нека је M_1 стандардни модел за T_1. По услову $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_n)$, M_1 задовољава $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_n)$. Али по услову $T_n \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, сваки модел T_n мора задовољавати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$. Како је $|T_n| < |T_1|$ (из Доказа 1), T_n не може доказати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ — контрадикција. ■

Доказ 3 (Кроз модалну логику GL).

У модалној логици доказивости GL, Лебова теорема [19] даје: ако систем **S** доказује $\Box_S \varphi \to \varphi$ за све φ, онда **S** доказује све. Применом на циклус, добијамо да би сваки T_i морао доказати сопствену рефлексивну шему, што крши Гедела II. Дакле, циклус не постоји. ■

Напомена. Услов различитих ординала је суштински. Без њега, ти циклуси су могући преко технике фиксне тачке (Клинијева теорема рекурзије). Питање да ли су циклуси могући са **истим** ординалима остаје и даље отворено.

2.3 Од логичке ка конструктивној симетрији

Ранији рад [7] утемељио је постојање **GH-пара** у **Аксиоми логичке могућности (ALP):** као оно што није логички забрањено јесте математички оствариво. **ALP** је осигуравала да ниједна мета-теорема не спречава постојање система који задовољавају горе наведена ограничења. Међутим, **ALP** остаје модална и неконструктивна; она потврђује могућност без методе.

Тренутни оквир појачава овај став увођењем **Аксиоме рефлексивне конструктивности (ARC)** у Поглављу 4. **ARC** овде замењује могућност оперативном изводљивошћу: свака теорија мора бити способна да конструише рефлексију друге унутар свог сопственог финитарног апарата, самостално и без генерисања самореференције. Овај прелазак може се посматрати као конструктивни пандан оном Хилбертовом потезу од доказа конзистентности ка финитистичким поступцима. У том смислу, **GH-релација** антиципира **ARC** као свој конструктивни завршетак. Помак са **ALP** [7] на **ARC** паралелан је преласку са доказа постојања на експлицитне конструкције у математици. Док **ALP** [7, 8] тврди да

је симетрична правданост конзистентна са познатом логиком, **ARC** уграђује симетрију у граматику самих доказа. Разлика није онтолошка већ методолошка: она трансформише рефлексију из модалне тврдње у синтактичку операцију.

2.4 Епистемичка симетрија као формално ограничење

Да бисмо изразили ову трансформацију, уводимо помоћни оператор **R**, који представља рефлексивну допуштеност:

$$\mathbf{R(T_1, T_2) \equiv (T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2) \wedge T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1))}.$$

GH-пар је онда било који уређени пар који задовољава **R** и услов упоредивости. Овде је оператор **R** дефинисао епистемичку границу узајамне правданости. У категоријском језику (развијеном касније у Поглављу 6), **R** се понаша као природни изоморфизам између два функтора $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ који кодирају те доказне структуре.

Увођење симетрије, као формалног ограничења, трансформише саму теорију доказа. Традиционално, рефлексија се одвија од јачег система ка слабијем систему (као нпр. од **PA** + $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$ ка **PA**). Присиљавајући симетрију, **GH-релација** претвара ову хијерархију у равнотежену конфигурацију:

$$\mathbf{Ref_{\{GH\}} = \{ (T_1, T_2) \mid R(T_1, T_2) \wedge R(T_2, T_1) \}}.$$

Правданост постаје релациона инваријанта уместо усмереног пресликавања. Таква формализација је ухватила суштинску филозофску интуицију: да кохерентност у математици можда не пребива само у апсолутним основама, већ у стабилним мрежама реципрочних доказа. **GH-оператор** даје минималну логичку машинерију за такву стабилност. Његова улога није да дефинише нове теореме унутар једне теорије, већ да оцрта простор могућих рефлексивних односа међу теоријама.

2.5 Интерпретативна напомена

GH-оквир дакле помера фокус са само-утемељења на **укрштено утемељење**. Уместо да питамо да ли математика може сама себе да оправда, питамо под којим условима две формалне перспективе могу заједнички одржавати кохерентност. Прелазак са **ALP** [7] на конструктивни **GH-оператор** ово питање формализује, отварајући концептуални пут ка принципу **ARC** и његовим конструктивним инстанцацијама развијеним у наредном поглављу. Дефинисањем **GH-оператора** и формалних услова симетричне допуштености, успоставили смо логички апарат за анализу ове релационе правданости. Кључна особина овог апарата, гарантована Лемом 2.2, је његова ацикличност – што осигурава да **GH-парови** формирају стабилне мреже, а не кружне аргументе. У наставку рада ћемо приенити овај апарат на конкретне математичке системе.

---

3. КАНДИДАТ-СИСТЕМИ И СТРУКТУРНА КОМПЛЕМЕНТАРНОСТ

Гедел–Хилбертов оквир, дефинисан у претходном поглављу, идентификује симетричну допуштеност као формални услов под којим два система могу служити као узајамни извори правданости. Међутим постојање таквих система није само логичка радозналост и зависи од тога да ли стварне математичке теорије могу да инстанцирају ову релацију. Поглавље разматра четири кандидат-конфигурације, а свака од њих отелотворује рефлексивну комплементарност на различитом структурном нивоу. Нама је задатак да одаберемо једну од понуђених конфигурација, која ће постати предмет конструкције у наредном раду. Ови кандидати су већ понуђни у претходном раду [7], док их у овом мало детаљније размотрамо.

3.1 Формални критеријуми за идентификацију GH-кандидата

Пре него што пређемо на конкретне примере, уводимо формалне критеријуме на основу којих би се могли препознати потенцијални **GH-парови**. Поменути критеријуми имају директне импликације из Дефиниције 2.1.1 и Аксиоме **ARC** (дефинисане у наставку).

Критеријум 3.1.1 (Ортогонална изражајност).

Два система $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ су ортогонална у изражајности ако постоје две класе исказа $\mathbf{\Phi_1}$ и $\mathbf{\Phi_2}$ такве да:

- $\mathbf{T_1}$ може да изведе и докаже све исказе из $\mathbf{\Phi_1}$, али не и из $\mathbf{\Phi_2}$.
- $\mathbf{T_2}$ може да изведе и докаже све исказе из $\mathbf{\Phi_2}$, али не и из $\mathbf{\Phi_1}$.

Постоји превод $\mathbf{I_{12}: \Phi_2 \to \Phi_1}$ у $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{I_{21}: \Phi_1 \to \Phi_2}$ у $\mathbf{T_2}$, али ови преводи нису потпуни – не чувају све логичке операције.

Пример: Аритметика (**PA**) је ортогонална у односу на геометрију (**GEO**) у том смислу: **PA** изражава рекурзију, **GEO** изражава просторне односе; превод координата не очувава потпуно све геометријске теореме у аритметици.

Критеријум 3.1.2 (Конструктивно преклапање).

За системе $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ постоји конструктивно преклапање $\mathbf{O(T_1,T_2)}$ ако постоји подјезик $\mathbf{L_0 \subseteq L_1 \cap L_2}$ и скуп исказа $\mathbf{\Psi}$ таквих да:

- $\mathbf{\Psi}$ је изражен у $\mathbf{L_0}$
- $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ су конзервативне екстензије над $\mathbf{\Psi}$.
- $\mathbf{\Psi}$ је довољно богат да изрази предикате доказа $\mathbf{Prf_1(x)}$ и $\mathbf{Prf_2(x)}$ до коначне дубине.

Ово преклапање омогућава сваком систему да формализује финитарну рефлексију другог.

Тврдња 3.1.3 (Довољни услови за GH-кандидата).

Ако пар система $\mathbf{(T_1, T_2)}$ задовољава следеће услове, онда је кандидат за **GH-пар**:

1. **Ортогоналност:** Задовољава Критеријум 3.1.1.
2. **Преклапање:** Задовољава Критеријум 3.1.2.
3. **Локална конзистентност:** Сваки систем може да докаже конзистентност другог и то само **у ограниченом смислу** (финитарно) користећи преклапање.
4. **Глобална неупоредивост:** Ниједан систем не може потпуно да интерпретира онај други – односно, не постоји тотална, очувајућа интерпретација.

Услови (1) и (2) обезбеђују симетрију и могућност узајамне рефлексије, док услов (3) осигурава да је остварива симетрична допуштеност $\mathbf{R(T_1,T_2)}$. Услов (4) осигурава испуњење **неупоредивости** из Дефиниције 2.1.1. Заједно, они имплицирају да пар $\mathbf{(T_1, T_2)}$ задовољава формалне услове **GH-пара**.

3.2 Аритметичко–геометријски пар ($\mathbf{PA_{(слаба)}}$, $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$))

Сам Хилберт [15] је сматрао аритметику и геометрију различитим, али фундаменталним доменима. Аритметика кодира дискретно, геометрија континуирано; обе су требале бити уједињене теоријом доказа. У **GH-оквиру**, ова историјска тежња поново се појављује у новом облику: не кроз редукцију, већ кроз реципрочну рефлексију.

Нека $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ означава Пеанову аритметику лишену потпуне шеме индукције, која задржава само коначно инстанцирабилни фрагмент. Ово слабљење осигурава да је теорија конзистентна али не и да је максимално изражајна: може да формализује рекурзивне доказе и основно финитарно резоновање, али јој недостаје трансфинитна индукција. Тада аналогно $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$ означава формални систем еуклидске геометрије преко дискретне мреже, формулисану у логици првог реда и са примитивним релацијама између ентитета и подударања. Њене аксиоме се ослањају на формализацију Тарског [28], али су строго ограничене на финитарне конструкције, чиме се класични објекти попут троуглова, линија и паралела замењују коначним конфигурацијама тачака.

Кључно опажање је да оба система поседују ортогоналну изражајну моћ. $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ хвата нумеричку рекурзију, али јој недостаје директна просторна интерпретација, док она $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$ представља конструктивне просторне везе, али не може да кодира аритметичку рекурзију изван свог ограниченог бројања. Свака може да интерпретира финитарну рефлексију исправности друге:

$$\mathbf{PA_{(слаба)} \vdash Con^{\{fin\}}(GEO_{(дискретна)})} \text{ и } \mathbf{GEO_{(дискретна)} \vdash Con^{\{fin\}}(PA_{(слаба)})}.$$

Међутим, ниједна не може да докаже потпуну рефлексивну шему друге. То успоставља овај пар као аутентични **GH-пар** који задовољава услов упоредивости.

Добијена конфигурација није само редукција (геометрија као аритметика или обрнуто), већ потпуна **реципрочна адекватност**: сваки домен оправдава коначну кохерентност другог. Философски, то је пар који илуструје како конзистентност може произаћи из комплементарне непотпуности. Тамо где аритметика пружа синтаксу конструкције, геометрија снабдева семантику саме структуре. Њихова узајамна рефлексија показује да математичка правданост не мора бити самодостатна; може опстати и као дијалог између независних, али резонантних система. Равнотежа између дискретних закључака и просторне конфигурације огледа **GH-еквилибријум** на концептуалном нивоу.

Да бисмо показали да је овај пар кандидат за **GH-пар**, проверимо формално наведене критеријуме:

Ортогонална изражајност (Критеријум 3.1.1):

- **Φ_1 (аритметика):** Искази о рекурзији, индукцији, делимости.
- **Φ_2 (геометрија):** Искази о конгруенцији, између елемената, паралелизму.
- **$PA_{(слаба)}$** не може да изрази континуиране геометријске односе у пуном општем облику.
- **$GEO_{(дискретна)}$** не може изразити неограничено квантификовање, комплетну математичку индукцију.

Конструктивно преклапање (Критеријум 3.1.2):

- **L_0:** Језик коначних низова, једнакости, основних релација.
- **Ψ:** Искази о коначним скуповима тачака, координатама, еквиваленцијама.

У овом преклапању, свака теорија може да дефинише предикат доказа друге **до коначне дубине**.

Локална конзистентност:

$PA_{(слаба)}$ може да докаже конзистентност **$GEO_{(дискретна)}$** тако што ће симулирати све геометријске доказе као низ коначних трансформација координата, и обратно, **$GEO_{(дискретна)}$** може да докаже конзистентност **$PA_{(слаба)}$** тако што ће геометријски представити аритметичке операције и показати да не воде контрадикцији.

Глобална неупоредивост:

Потпуна аритметизација геометрије захтева аксиому континуума, која није доступна у **$PA_{(слаба)}$**, али и потпуна геометризација аритметике захтева неограничене конструкције, које такође нису доступне у **$GEO_{(дискретна)}$**.

Закључак: Пар **($PA_{(слаба)}$, $GEO_{(дискретна)}$)** задовољава све формалне критеријуме за **GH**-кандидата, што га чини убедљивим примером за илустрацију принципа.

Технички оквир за провену критеријума:

Доказивање да овај пар задовољава наведене критеријуме ослања се на ове добро познате методе:

1. **За ортогоналност (1):** Може се формално показати кроз **недефинисабилност**: као нпр. однос „између“ у стандардном моделу **$GEO_{(дискретна)}$** који није прво-редно дефинисљив ни у језику **$PA_{(слаба)}$** гледајући са стандардном интерпретацијом (видети [27], Теорема 2).
2. **За преклапање (2):** Језик **L_0** може бити тај језик **релација еквиваленције и коначни низ** (Herbrand-ов универзум). Конзервативност се може доказати показујући да сваки модел једне теорије може бити проширен до модела њихове заједничке конзервативне екстензије.
3. **За локалну конзистентност (3): $PA_{(слаба)} \vdash Con^{\{fin\}}(GEO_{(дискретна)})$** могуће је постићи и поступцима **аритметизације синтаксе** коначних геометријских доказа. Будући да је управо **$GEO_{(дискретна)}$** рекурзивно аксиоматизабилна. Има примитивно рекурзивни предикат доказа, **$PA_{(слаба)}$** може да симулира ову претрагу доказа све до одређене дужине **N** и да докаже да се контрадикција не појављује.
4. **За неупоредивост (4):** Потпуна интерпретација би захтевала и да **$PA_{(слаба)}$** докаже сопствену конзистентност (ако интерпретира пуну **$GEO_{(дискретна)}$** са њеним геометријским аксиомама бесконачности), што је у потпуној супротности са Геделовим другим теоремом [12]. Обратна интерпретација би захтевала да **$GEO_{(дискретна)}$** изрази непребројивост, што је изван њеног изражајног домена.

Овај оквир показује да су **критеријуми и концептуално** и **технички проверљиви**, што још више учвршћује статус овог пара као робусног кандидата за **GH-пар**.

3.3 Формализација: (PRA-слаба, дискретна геометрија Тарског)

Да бисмо дали прецизнију математичку основу за аритметичко-геометријског **GH-кандидата** из 3.2, посматрамо следеће конкретне теорије:

Дефиниција 3.3.1 ($PA_{(слаба)}$ као PRA). Као прецизан представник за **$PA_{(слаба)}$** узимамо **PRA (Примитивно Рекурзивна Аритметика)**. **PRA** јесте финитарно прихватљива теорија [25] са језиком **{0, S, +, ×, <}** и аксиомама које укључују:

- Робинсонове аксиоме **Q** [23, 27],
- Дефиниције свих примитивно рекурзивних функција,
- Индукциону шему ограничену на квантификатору слободне формуле.

Дефиниција 3.3.2 ($GEO_{(дискретна)}$ као дискретна геометрија Тарског). Као представника овде узимамо **дискретну варијанту геометрије Тарског** [27] са језиком **{B, C}** где је:

- **B(x,y,z)** тернарни предикат „тачка **y** је између тачака **x** и **z**",
- **C(x,y,z,w)** четворни предикат „растојање **xy** је једнако растојању **zw**".

Аксиоми су стандардне аксиоме Тарског [27] за еуклидску геометрију обогаћене са:

1. **Аксиом минималне удаљености: $\forall x \forall y \exists z(B(x,z,y) \wedge \neg \exists w(B(x,w,z) \wedge B(z,w,y)))$**
2. **Рационална основа:** Сви модели су изоморфни $\mathbf{Q^2}$ (равни рационалних бројева).

Конструкција 3.3.3 (Ефективни преводи за ARC). Дефинишемо два ефективна пресликавања која имплементирају **Аксиому рефлексивне конструктивности**:

$\Phi_{\{PRA \to GEO\}}$: Превод из **PRA** у геометрију:

1. Број **n** се кодира као тачка **(n, 0)** на x-оси.
2. Сабирање **a + b = c** се преводи у геометријску конструкцију конкатенације дужи.
3. Множење **a × b = c** се преводи у конструкцију правоугаоника страница **a** и **b**.
4. Индукциона шема се преводи у коначни низ геометријских конструкција.

$\Phi_{\{GEO \to PRA\}}$: Превод из геометрије у **PRA**:

1. Тачка се кодира као пар рационалних бројева **(x, y).**
2. Предикат **B(x,y,z)** се преводи у $\mathbf{(x_2\text{-}x_1)(y_3\text{-}y_1) = (x_3\text{-}x_1)(y_2\text{-}y_1) \wedge (x_1 \leq x_2 \leq x_3 \vee x_3 \leq x_2 \leq x_1).}$
3. Предикат **C(x,y,z,w)** се преводи у $\mathbf{(x_1\text{-}x_2)^2 + (y_1\text{-}y_2)^2 = (x_3\text{-}x_4)^2 + (y_3\text{-}y_4)^2.}$
4. Геометријски докази се преводе у проверу алгебарских идентитета.

PRA верзија ради са рационалним координатама кодираним као парови целих бројева.

Теорема 3.3 (Пар (PRA, дискретна геометрија Тарског) је GH-пар).
Овај пар задовољава све услове из Дефиниције 2.1.1 и имплементира **ARC**.

Доказ. Проверавамо услове:

1. Симетрична допуштеност:

Доказ 1 (Конструктивни, преко симулације доказа):

- **PRA ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(GEO): PRA** може да формализује синтаксу геометрије. Будући да су ови аксиоми **GEO** коначни и децидибилни, **PRA** може симулирати и претрагу доказа који су дужине ≤ **N**. А за сваки овакав доказ **π**, **PRA** може потпуно верификовати да се контрадикција **0=1** не појављује. То даје **$\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(GEO).**
- **GEO ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(PRA): GEO** може репрезентовати аритметичке операције али и неке геометријске конструкције (сабирање као конкатенацију, множење као правоугаоник). Може симулирати још и извођење ограничено на примитивно рекурзивне функције доказати да таква симулација не може произвести контрадикцију. ■

Доказ 2 (Семантички, преко модела):

- **PRA ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(GEO): PRA** може да конструише **коначни модел** за **GEO**: то је низ од **N** тачака на рационалној правој. У овоме моделу, **PRA** може проверити да ли сви аксиоми **GEO** важе. А пошто **GEO** има модел (чак и коначан), онда је конзистентна. Ово даје **$\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(GEO).**
- **GEO ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(PRA): GEO** може да конструише **геометријски модел** за **PRA**: природне бројеве као тачке на правој, операције као конструкције. У геометријском моделу **GEO** може проверити да аксиоми **PRA** важе. Пошто **PRA** има модел, онда је конзистентна. ■

Доказ 3 (Prf-theoretic, преко редукције сложености):

PRA ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(GEO): Превод **$\Phi_{\{PRA \to GEO\}}$** из конструкције 3.3.3 мапира доказе **PRA** на доказе **GEO**. Ако би **GEO** била неконзистентна (доказивала **0=1**), онда би се исти ти докази превели назад у **PRA**, производећи доказ **0=1** у **PRA**. **PRA** може симулирати све доказе **GEO** дужине ≤ **N** и верификовати да ниједан не производи контрадикцију **0=1** — ово је финитарна провера, није тврдња о потпуној конзистентности, и стога не крши Геделову другу теорему [12].

GEO ⊢ $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$(PRA): Симетричан аргумент користећи **$\Phi_{\{GEO \to PRA\}}$**. ■

---

2. Неупоредивост:

Доказ 1 (Преко изражајних ограничења):

PRA не интерпретира пуну геометрију: Потпуна интерпретација ту захтева кодирање бесконачних геометријских објеката и континуума рационалних тачака. Међутим, **PRA** има једино **примитивно рекурзивне** функције и не може да изрази кванторе преко свих реалних бројева нити бесконачних низова.

GEO не интерпретира пуну PRA: Потпуна интерпретација би овде захтевала формализацију **свих** примитивно рекурзивних функција. Међутим, дискретна геометрија има само **коначне** конструкције и не може изразити неограничену рекурзију потребну за дефиниције попут Акерманове функције [1].

■

Доказ 2 (Неупоредивост - кроз ефективне ординале).

Ефективне **prf-theoretic** ординала (снаге) оба система, узимајући у обзир bridge (мост) аксиоме, које су уграђене у **PRA** и **GEO**, задовољавају:

$$|\mathbf{PRA + Bridge}| \geq \omega^{\omega} \quad \text{и} \quad |\mathbf{GEO + Bridge}| \geq \omega^{\omega}.$$

Дакле, обе теорије имају упоредиву ефективну снагу, што је у складу са **GH**-условом. Неупоредивост долази из **различитих димензија снаге**: **PRA** је јак у аритметичкој (рекурзивној) димензији, **GEO** у просторној (конструктивној) димензији. Ниједан не садржи аксиоме оног другог. ■

Доказ 3 (Кроз категоријску некомпатибилност):

PRA и **GEO** имају различите категоријске основе својих објеката:

PRA ради са **дискретним**, **рекурзивно дефинисаним** објектима, као природни бројеви, примитивно рекурзивне функције. Његове операције су **итеративне** (понављање коначно много пута). **GEO** ради са **геометријским**, **конструктивним** објектима - тачке, праве, сегменти. Ове његове операције јесу **просторне** (пресеци, паралеле, конгруенције).

Ова разлика је **категоријска**: Акерманова функција у **PRA** захтева **неограничену дубину рекурзије**, што нема природан геометријски аналог у коначним конструкцијама **GEO** [1].

Обрнуто, континуитет геометријске праве у **GEO** (између било које две тачке постоји трећа) захтева **густоћу** која није изразива у дискретној аритметици **PRA**.

Дакле, системи имају **ортогоналне онтологије** - један **дискретно-итеративан**, други **континуално-конструктиван** [21, 30]. ■

---

3. ARC услови:

Доказ 1 (Конструкције Φ из 3.3.3) јесу примитивно рекурзивне и задовољавају услове:

1. **Ефективност:** Оба превода су алгоритмички.
2. **Чување доказивости: Ако PRA ⊢ φ, онда GEO ⊢ Φ(φ)** и обрнуто.
3. **Неинвертибилност:** Показујемо контрапримером:
    - За **PRA→GEO***:* Постоји геометријска конструкција (пример-подела угла на три једнака дела), за коју важи да нема аритметички пречник у **PRA**.
    - За **GEO→PRA***:* Постоји аритметичка функција (на пример Акерманова [1]) која не поседује коначну геометријску репрезентацију у дискретној геометрији.

Доказ 2 (Кроз губитак информације у двосмерном преводу):

PRA→GEO→PRA циклус:

Посматрамо примитивно рекурзивну функцију $\mathbf{f(n) = 2^n}$ у **PRA**.

Превод $\mathbf{\Phi_{\{PRA \to GEO\}}}$ конвертује ово у геометријску конструкцију - експоненцијални раст представљен као удвостручавање сегмената.

Међутим, када применимо повратни превод $\mathbf{\Phi_{\{GEO \to PRA\}}}$ на ову геометријску конструкцију, губимо информацију о **рекурзивној структури** - геометрија види само „резултат удвостручавања", али не и **процес рекурзије**.

Резултат $\mathbf{\Phi_{\{GEO \to PRA\}}(\Phi_{\{PRA \to GEO\}}(f))}$ није идентичан оригиналној **f** - то јесте функција која **производи исте вредности**, али без **рекурзивне дефиниције**.

GEO→PRA→GEO циклус:

Посматрамо геометријску конструкцију „подела сегмента на **n** једнаких делова" у **GEO**.

Превод $\mathbf{\Phi_{\{GEO \to PRA\}}}$ конвертује ово у аритметичку операцију дељења.

Али када овде применимо $\mathbf{\Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$, добијамо нумеричку репрезентацију дељења, не **геометријску конструкцију** са лењиром и шестаром.
Губи се информација о **начину конструкције** – ту оригинална **GEO** конструкција користи пресеке и паралеле, док повратни превод даје само „израчунај **L/n**".
Дакле, $\mathbf{\Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$ и $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}}}$ нису инверзи [21, 30]. ■

Доказ 3 (Кроз алгоритамску сложеност превода):
Преводи $\mathbf{\Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$ и $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}}}$ су **ефективни** (рекурзивни), али они имају различите **временске сложености**.
Временска сложеност $\mathbf{\Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$:
За ту примитивно рекурзивну формулу **φ** дужине **n** у **PRA**, конструисање геометријског еквивалента захтева $\mathbf{O(n^2)}$ корака (сваки аритметички оператор се декомпонује у геометријске конструкције).
Временска сложеност $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}}}$:
За геометријску формулу **ψ** дужине **m** у **GEO**, аритметизација захтева **O(m)** корака (геометријске се релације директно мапирају у нумеричке).
Асиметрија сложености:
Ова разлика у сложености показује да преводи **нису изоморфизми** – један смер је „тежи" од другог. Даље, композиција $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}} \circ \Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$ има укупну сложеност $\mathbf{O(n^2)}$, док идентитет има **O(n)**.
Ово формално показује $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}} \circ \Phi_{\{PRA\to GEO\}} \neq Id}$, односно неинвертибилност [11, 30]. ■
Напомена: Ова конкретна формализација омогућава да се концептуални опис (дат у 3.2) претвори у проверљиве математичке тврдње. Присутност **три независна доказа** за симетричну допуштеност, за неупоредивост и за **ARC** услове повећава робусност тврдње да је овај пар аутентичан **GH-пар**. ■

3.4 Скуповно-теоријска аналогија (ZF, CAT)

GH-оквир се природно проширује на више домене. Ако аритметика и геометрија представљају само дуалне основе коначног, теорија скупова и теорија категорија отелотворују те дуалне перспективе на бесконачно. Њихов однос пружа други пример рефлексивне симетрије. Нека **ZF** означава ослабљени облик Цермело–Френкелове теорије скупова и то без шеме замене, али са коначни бројем аксиома стратификоване апстракције (стратификованом шемом формирања скупова). Нека **CAT** ту означава категоријски мета-оквир који формализује мале категорије као и функторску композицију преко пребројивих домена.
Сваки од ових система хвата аспект математичке онтологије: **ZF** описује колекције елемената, **CAT** описује структуре релација. Ниједан систем не може потпуно интерпретирати други. **ZF**-у недостају интерни морфизми способни да представљају функторску структуру; **CAT** нема онај екстензионални апарат за неограничено формирање скупова.
Ипак, оба могу изразити финитарну рефлексију конзистентности оног другог:

$$\mathbf{ZF \vdash Con^{\{fin\}}(CAT)} \text{ и } \mathbf{CAT \vdash Con^{\{fin\}}(ZF).}$$

На овом нивоу, **GH-релација** манифестује се као равнотежа између **екстензије и интензије** - између онтологије засноване на скуповима и структурне онтологије. Резултат није синтеза две перспективе, већ рефлексивни еквилибријум у коме свака осигурава концептуални легитимитет друге.
Философски, овај модел сугерише да основни пејзаж математике можда није само хијерархијски већ **полицентричан:** мрежа рефлексивних односа међу несводивим системима. **GH-оквир** [7].пружа и формалну граматику за такву полицентричну кохерентност. Он показује и да потрага за апсолутним јединством може уступити место суптилнијем идеалу — јединству кроз релациону стабилност.
Техничка образложења за аналогију ZF-CAT:
Доказ неупоредивости: Пуна теорија категорија **CAT** (која укључује још и теорију топоса) захтева постојање класа свих морфизама између два објекта, што се не може потпуно представити у **ZF** без додатних аксиома (нпр. аксиоме универзума). Обратно, **ZF**-ов концепт кумулативне хијерархије и транзитивних затварања није сасвим природно изразив у чисто категоријском језику који наглашава релације преко елемената.
Механизам финитарне рефлексије: ZF може да изрази конзистентност **CAT** тако што ће:

- Кодирати мале категорије као посебне структуре скупова (објекти као скупови, морфизми као функције).
- Верификовати да аксиоми категорија важе.

• Доказати да се контрадикција не може извести из тих аксиома за те категорије кардиналности мање од одређеног коначног кардинала **κ**.

Обрнута рефлексија: CAT може да третира **ZF** као теорију о **Set** категорији. Користећи своје алате (нпр. Yoneda лему [20], лимите и колимите), може показати да су аксиоми **ZF** (дати у одговарајућој категоријској форми) међусобно кохерентни у контексту пребројивих модела.

Позивање на постојеће резултате: Динамика одражава дубоке резултате из основних истраживања. **Колмогоровова сложеност** [17] теорије **CAT** у односу на **ZF** (и обрнуто) показује **ортонаузалност** у смислу захтева за кодирањем [види додатне референце о сложености теорија скупова и категорија].

3.4.1 Формални представници: (ZF_0, Категорија малих категорија)

Дефиниција 3.4.1 (ZF_0). Као представник за „ослабљени **ZF**" узимамо **ZF без аксиоме замене**, али са аксиомом партитивног скупа ограниченом на Δ_0-формуле. Означимо ову теорију као ZF_0. Она је довољно јака да формализује основну скуп теорију, али не подржава пуну трансфинитну рекурзију.

Дефиниција 3.4.2 (Категорија малих категорија-CAT_0).

Формализујемо теорију **малих категорија** у логици првог реда са:

- **Константама: Ob** (скуп објеката), **Mor** (скуп морфизама)
- **Функцијама: dom**, **cod**: **Mor → Ob, id: Ob → Mor, ∘: Mor × Mor → Mor**
- **Аксиоми:** асоцијативност композиције, закони идентитета, услови домена и кодомена

3.4.3 Конструкција превода

Конструкција 1 (Превод $ZF_0 \to CAT_0$). Дефинишемо пресликавање $\Phi_{\{ZF \to CAT\}}$**:**

1. Сваки скуп **X** мапирамо на дискретну категорију **Disc(X)** чији су објекти елементи **X**, а једини морфизми су идентитети.
2. Скуповна функција **f: X → Y** мапирамо на функтор **Disc(f)**: **Disc(X) → Disc(Y).**
3. Скуповни аксиоми се преводе у категоријске услове (нпр. аксиома паре постаје конструкција производа категорија).

Конструкција 2 (Превод $CAT_0 \to ZF_0$). Дефинишемо пресликавање $\Phi_{\{CAT \to ZF\}}$**.:**

1. Категорија **C** мапирамо на структурирани скуп **(Ob(C), Mor(C), dom, cod, ∘)**.
2. Функтор **F: C → D** мапирамо на пар функција F_{Ob}**:Ob(C)→Ob(D),** F_{Mor}**:Mor(C)→Mor(D))**.

Категоријски аксиоми се преводе у скуповне једнакости (као нпр. асоцијативност постаје једнакост тројних операција).

3.4.4 Верификација GH-услова

Теорема 3.4. Пар **(ZF_0, CAT_0)** је **GH-пар**.

Напомена. Оба система имају упоредиве ефективне **prf-**theoretic ординале (уз мост аксиоме уграђене у ZF_0 и CAT_0). Тиме је симетрична допуштеност задовољена без доминације.

--

Доказ 1: Проверавамо све услове са вишеструким доказима:

1. Симетрична допуштеност:

Доказ 1 (Конструктивни, преко симулације модела):

$ZF_0 \vdash Con^{\{fin\}}(CAT_0)$**:** ZF_0 може да конструише модел за CAT_0 и то тако што ће сваку категорију представити као структурирани скуп (објекти, морфизми, операције). Будући да CAT_0 има коначне аксиоме, ZF_0 може да провери да овај модел задовољава све њих.

$CAT_0 \vdash Con^{\{fin\}}(ZF_0)$**:** CAT_0 може репрезентовати ZF_0 као једну теорију у категорији **Set**.

Користећи елементе теорије топоса, CAT_0 може симулирати скуповне операције, чиме се показује да постоји конзистентност. ■

Доказ 2 (Prf-theoretic, преко редукције):

$ZF_0 \vdash Con^{\{fin\}}(CAT_0)$**:** Превод $\Phi_{\{ZF \to CAT\}}$ мапира доказе у ZF_0 на доказе у CAT_0**.** Ако би CAT_0 била неконзистентна, ти докази би се превели назад у ZF_0**,** производећи контрадикцију. Пошто ZF_0 зна за сопствену ограничену конзистентност, може да закључи $Con^{\{fin\}}(CAT_0)$**.**

$CAT_0 \vdash Con^{\{fin\}}(ZF_0)$**:** Симетричан аргумент користећи $\Phi_{\{CAT \to ZF\}}$**.** ■

Доказ 3 (Семантички, преко интерпретабилности):

$ZF_0 \vdash Con^{\{fin\}}(CAT_0)$: Размотримо стандардни модел **ZF_0**. У том моделу, свака категорија из **CAT_0** може се представити као тројка **(Ob, Mor, ∘)** где су **Ob** и **Mor** скупови, а **∘** је функција композиције. Пошто **CAT_0** има коначан број аксиома, **ZF_0** може директно проверити да ова тројка задовољава све категоријске аксиоме (асоцијативност, идентитет). Ако би **CAT_0** била неконзистентна, постојала би деривација **$CAT_0 \vdash 0=1$**. Али таква деривација би се пресликала у скуповну контрадикцију у **ZF_0**, а то је немогуће. Дакле **$ZF_0 \vdash Con^{\{fin\}}(CAT_0)$** [21, 27].

$CAT_0 \vdash Con^{\{fin\}}(ZF_0)$: У категорији **Set**, **ZF_0** се може интерпретирати и као теорија о објектима (скуповима) и морфизмима (функцијама). Користећи топос структуру **Set**, **CAT_0** може верификовати да **ZF_0** аксиоме формирају кохерентан систем - свака аксиома овде би одговарала валидном тврђењу о скуповима као објектима. Ако би **ZF_0** била неконзистентна, то би даље рефлектовало и структурну немогућност у **Set**, што је искључено [19, 27]. ■

---

2. Неупоредивост:

Доказ 1 (Преко онтолошке разлике):

ZF_0 не може интерпретирати пуну CAT: Потпуна теорија категорија захтева постојање **класа** свих морфизама између два објекта, што превазилази скуповни оквир **ZF_0** (који ради само са скуповима).

CAT_0 не може интерпретирати пуни ZF: Аксиома замена и аксиома бесконачности, у **ZF,** захтевају структуре које нису у потпуности изразиве у језику малих категорија. Конкретно, кардиналност и редни бројеви не могу се адекватно представити. ■

Доказ 2 (Преко Геделових теорема [12, 13]**):**

Претпоставимо да **ZF_0** потпуно интерпретира **CAT_0**. Тада би **ZF_0** могло да „унутар себе" симулира пуну теорију категорија. Међутим, оваква симулација би омогућила и да **ZF_0** докаже своју сопствену конзистентност (кроз категоријску репрезентацију), што је немогуће по Геделовој другој теореми. Симетричан аргумент је за **CAT_0.** ■

Доказ 3 (Кроз изражајну моћ и дефинибилност):

ZF_0 не може изразити пуну CAT: У **ZF_0**, сваки објект је скуп. Међутим, онда и у теорији категорија постоје конструкције које надилазе скуповни оквир - на пример, **Fun(C, D)** (категорија функтора који су између две категорије) често није скуп већ права класа. **ZF_0** може радити само са скуповима, па не може дефинисати такве „велике" категорије. Конкретно, не може се у **ZF_0** формулисати тврдња која каже „постоји категорија свих малих категорија" без излажења ван скуповног универзума [2, 20, 27].

CAT_0 не може изразити пуни ZF: У **CAT_0**, основни појмови су објекти и морфизми. Међутим, **ZF** садржи аксиому замене која даље омогућава конструкцију произвољно великих кардинала и редних бројева путем итерације. Ове итеративне хијерархије немају директан категоријски аналог – значи да категорије **саме по себи** не садрже појам „величине скупа" или „ординалне позиције". Формула **∀x ∃y (y = P(x))** (аксиома скупа потенције итерирана) у **ZF** не може се скроз адекватно превести у језик категорија без губитка есенцијалне информације о кардиналности [20, 21, 27]. ■

3.ARC услови:

Доказ 1 (Кроз двосмерну несуријективност):

Преводи**$\Phi_{\{ZF \to CAT\}}$** и **$\Phi_{\{CAT \to ZF\}}$:** ефективни (алгоритмички) задовољавају услов **неинвертибилности**:

- **Несуријективност ZF→CAT:** Постоје категорије (као категорија категорија), које нису изоморфне ни једној категорији облика **Disc(X).**
- **Несуријективност CAT→ZF:** Постоје скуповне структуре (као транзитивни модели **ZF**), које нису изоморфне ни једној репрезентацији категорије.

Дакле, пар **(ZF_0, CAT_0)** задовољава све услове за **GH-пар** и имплементира **ARC.** ■

Напомена: Ова аналогија показује како се **GH-оквир** може применити на фундаментално различите математичке парадигме, а аритметичко-геометријски пар (3.3) илуструје симетрију унутар класичне математике, **ZF-CAT** пар открива своју дубљу **онтолошку комплементарност** између скуповне и категоријске перспективе.

Доказ 2 (Кроз неинвертибилност превода - конкретни примери):
Несуријективност ZF→CAT (конкретан пример): Посматраћемо категорију **Cat** (категорију свих малих категорија). У $\mathbf{CAT_0}$, ово је валидан објект. Међутим, када покушамо да преведемо **Cat** у $\mathbf{ZF_0}$ користећи превод $\mathbf{\Phi_{\{CAT \to ZF\}}}$, добијамо неки скуп **X** који репрезентује објекте и морфизме. Али када применимо повратни превод $\mathbf{\Phi_{\{ZF \to CAT\}}}$ на **X**, добијамо категорију дискретних објеката **Disc(X)** – као категорију без нетривијалних морфизама. Ово **није** изоморфно оригиналној **Cat**, јер **Cat** има богату структуру функтора. Дакле, $\mathbf{\Phi_{\{ZF \to CAT\}} \circ \Phi_{\{CAT \to ZF\}}}$ није идентитет [2, 20, 27].
Несуријективност CAT→ZF (конкретан пример): Посматрамо транзитивни модел **M** теорије $\mathbf{ZF_0}$ (скуп затворен под $\in$ релацијом). Када **M** преведемо у $\mathbf{CAT_0}$, онда добијамо категорију где су објекти елементи **M**, а морфизми су индуковани припадношћу. Али када ову категорију вратимо назад у $\mathbf{ZF_0}$, губимо информацију о „дубини" транзитивне хијерархије - све даље постаје „равно" у категоријском смислу. Резултујући скуп није изоморфан оригиналном **M** [2, 21]. ■

Доказ 3 (Кроз алгоритамску ефективност и губитак структуре):
Преводи $\mathbf{\Phi_{\{ZF \to CAT\}}}$ и $\mathbf{\Phi_{\{CAT \to ZF\}}}$ су **рекурзивни** (алгоритамски) јер они мапирају коначне формулне представе формула и аксиома. Конкретно:
Ефективност: За сваку формулу φ у језику $\mathbf{ZF_0}$, постоји алгоритам који конструиише одговарајућу категоријску структуру. Симетрично за $\mathbf{CAT_0}$ формуле. Ово задовољава и **ARC** услов ефективности [11, 21].
Неинвертибилност: Ипак, ови преводи **нису инверзи** један другог, а разлог за то је фундаменталан: $\mathbf{ZF_0}$ чува информацију о „елементарном" саставу ($\in$ релација), док $\mathbf{CAT_0}$ потпуно чува информацију о „морфизамском" саставу (композиција). Када се та формула преведе из једног оквира у други и назад, један од ових аспеката се **губи** или **деформише**. На пример, скуповна формула $\mathbf{x \in y}$ преведена даље у категоријску форму постаје морфизам, али повратни превод не враћа оригинални смисао ове припадности - добијамо само „постоји веза", без специфичности $\in$ релације [2, 11, 27]. ■

Напомена:
У овом раду користимо две врсте ознака за формалне системе: $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ (или $\mathbf{ZF_0}$, $\mathbf{CAT_0}$) за теорије као синтактичке објекте и **M** за моделе тих теорија. Модел **M** је она структура која задовољава аксиоме теорије **T**. Ово разликовање је стандардно у теорији модела [29].
Такође, користимо две варијанте ознака за теорије скупова и категорија: $\mathbf{ZF_0}$ и $\mathbf{CAT_0}$ које означавају ослабљене верзије (без аксиоме замене, односно са ограничењима на мале категорије), док **ZF** и **CAT** означавају пуне, неограничене теорије. У овом поглављу фокус је на ослабљеним верзијама, које су и погодније за **GH-конструкције**.

3.5 Минимални аритметичко-геометријски пар ($\mathbf{Q^+}$, $\mathbf{G_0}$)

Након анализе претходних кандидата, поставља се питање минималности: колико слаби ови системи могу бити, а да још увек формирају **GH-пар**? Овај одељак уводи пар који представља доњу границу сложености за **GH-релацију**.

Дефиниција 3.5.1 (Систем A: $\mathbf{Q^+}$).
Систем $\mathbf{A = Q^+ = I\Delta_0}$ је проширење Робинсонове аритметике **Q** [23, 27], са $\mathbf{\Delta_0}$**-индукцијом** [10].
Језик: $\mathbf{L_A = \{0, S, +, \times, =\}}$
Аксиоме:

- **A1:** $\mathbf{Sx \neq 0}$
- **A2:** $\mathbf{Sx = Sy \to x = y}$
- **A3:** $\mathbf{x \neq 0 \to \exists y\,(x = Sy)}$
- **A4:** $\mathbf{x + 0 = x}$
- **A5:** $\mathbf{x + Sy = S(x + y)}$
- **A6:** $\mathbf{x \times 0 = 0}$
- **A7:** $\mathbf{x \times Sy = (x \times y) + x}$
- **A8:** $\mathbf{\forall x[(\varphi(0) \wedge \forall y(\varphi(y) \to \varphi(Sy))) \to \forall x\, \varphi(x)]}$ за $\mathbf{\Delta_0}$ формуле φ
- **A9:** $\mathbf{\neg\exists p\ Prf_2(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$ [мост аксиома] [7].
  Prf-theoretic снага: $\mathbf{|Q^+|}$ **без A9** (мост аксиоме) је $\mathbf{\omega^2}$. Са A9, ефективна снага $\mathbf{|Q^+ + A9|}$

је строго већа од ω^2.

Дефиниција 3.5.2 (Систем B: G_0).

Систем $\mathbf{B} = \mathbf{G_0}$ је елементарна геометрија заснована на класичним аксиомама Давида Хилберта [14] и модерној аксиоматизацији Алфреда Тарског [28], са аксиомом дискретности.

Језик: L_B = {P, L, I, B, C} (Тачке, Праве, Инциденција, Betweenness, Конгруенција)

Аксиоме:

- **B1: $\forall P \forall Q(P \neq Q \rightarrow \exists! L(P \in L \wedge Q \in L))$**
- **B2: $\forall L \exists P \exists Q(P \neq Q \wedge P \in L \wedge Q \in L)$**
- **B3: $\exists P \exists Q \exists R(\neg$Колинеарни$(P,Q,R))$**
- **B4: $\forall A \forall B \forall C(B(A,B,C) \rightarrow$ Колинеарни$(A,B,C))$**
- **B5: $\forall A \forall C(A \neq C \rightarrow \exists B$ B$(A,B,C))$**
- **B6: $\forall A \forall B \forall C(B(A,B,C) \rightarrow$ B$(C,B,A))$**
- **B7: $\forall AB(AB \cong AB)$**
- **B8: $\forall AB \forall CD(AB \cong CD \rightarrow CD \cong AB)$**
- **B9: $\forall AB \forall CD \forall EF(AB \cong CD \wedge CD \cong EF \rightarrow AB \cong EF)$**
- **B10: $\forall AB \forall CD \exists E(B(A,B,E) \wedge BE \cong CD)$**
- **B11: $\forall L \exists n \forall P(P \in L \rightarrow \exists\, k \leq n$ (P је k-та тачка на L)** [аксиома дискретности]
- **B12: $\neg \exists p\ \mathrm{Prf}_1(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)$** [мост аксиома] [7].

  Изражајна моћ: Може да представи рационалне координате, основне конструкције.

  Prf-theoretic снага: $|G_0|$ без B12 (мост аксиоме) је ω. Са **B12**, ефективна снага $|G_0 +$ **B12**$|$ је строго већа од ω, и то довољно да докаже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(Q^+ +$ **A9)**.

Конструкција 3.5.3 (Интерпретације).

I: $L_B \rightarrow L_A$:

- Тачка **P = (x, y)** кодира се као уређени пар **(x, y)** у $\mathbb{N}^2$.
- Права **L** дата једначином **ax + by + c = 0** кодира се тројком **(a, b, c)** са **gcd(a,b,c) = 1**.
- Предикат **P ∈ L** преводи се у $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$
- Предикат **B(A,B,C)** преводи се у $\exists t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ **(B = tA + (1-t)C)**.
- Предикат **AB ≅ CD** преводи се у $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$.

J: $L_A \rightarrow L_B$:

- Број **0** преводи се у јединични сегмент **O**.
- Број **n** преводи се у сегмент дужине **n**.
- Операција **S(n)** преводи се у продужење сегмента за јединични сегмент **O**.
- Сабирање **n + m** преводи се у конкатенацију сегмената дужине **n** и **m**.
- Множење **n × m** преводи се у правоугаоник са страницама дужине **n** и **m**.
- Једнакост **n = m** преводи се у конгруенцију сегмената **J(n) ≅ J(m)**.

Провера критеријума:

Ортогонална изражајност: Q^+ ради са дискретним, рекурзивним структурама; G_0 са просторним, геометријским односима.

Конструктивно преклапање: Заједнички фрагмент (коначни низови, рационалне координате) који омогућава међусобну финитарну рефлексију.

Локална конзистентност: Сваки систем може доказати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$**(другог)** користећи мост аксиоме.

Глобална неупоредивост: $|Q^+| = \omega^2$, $|G_0| = \omega$, што искључује потпуну интерпретацију

Теорема 3.5. Пар (Q^+, G_0) је **GH-пар.**

Доказ 1 (Симетрична допуштеност – конструктивни):

$Q^+ \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(G_0)$: Систем Q^+ може да формализује синтаксу геометрије G_0. Будући да су аксиоми G_0 коначни и децидибилни, Q^+ може симулирати претрагу свих доказа дужине ≤ **N**. За сваки такав доказ π, Q^+ проверава да ли завршава са **0=1**. Пошто се контрадикција не појављује, Q^+ закључује $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(G_0)$.

$G_0 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(Q^+)$: Систем G_0 репрезентује аритметичке операције геометријски, као што је сабирање као конкатенација и множење као правоугаоник. Симулирајући све доказе у Q^+ дужине ≤ **N**, G_0 даље

проверава да ниједан не води до контрадикције. ■

Доказ 2 (Симетрична допуштеност – семантички):

$Q^+ \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(G_0)$: У **$Q^+$** се конструише коначан модел за **G_0** – мрежа тачака **(x, y)** са координатама до **N**. Проверава се да у том моделу важе све аксиоме **G_0**. Пошто **G_0** има модел, модел је конзистентан.

$G_0 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(Q^+)$: У **$G_0$** се конструише модел за **Q^+** преко сегментне аритметике (природни бројеви као сегменти). Проверава се да аксиоме **Q^+** важе, чиме се доказује конзистентност. ■

Доказ 3 (Симетрична допуштеност – prf-theoretic):

Нека су $\mathbf{\Phi}_{\{Q^+ \to G_0\}}$ и $\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}}$ примитивно рекурзивна пресликавања кодова доказа, оних која чувају доказивост. Претпоставимо да **G_0** није финитарно конзистентан, тј. $\mathbf{\exists d\ Prf_{\{G_0\}}(d, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$.

Тада, по својству пресликавања $\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}}$, важи да је $\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}}(d)$ код доказа у **Q^+** таквог да:

$$\mathbf{Prf}_{\{Q^+\}}(\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}}(d), \ulcorner 0=1 \urcorner).$$

Дакле: $\mathbf{\exists d\ Prf_{\{Q^+\}}(d', \ulcorner 0=1 \urcorner)}$, што је у супротности са финитарном конзистентношћу система **Q^+**.

Према томе: $\mathbf{Q^+ \vdash Con^{\{fin\}}(G_0)}$.

Симетрично: $\mathbf{G_0 \vdash Con^{\{fin\}}(Q^+)}$. ■

Доказ 4 (Неупоредивост – кроз ефективне ординале):

Ефективне **prf-theoretic** снаге оба система, узимајући у обзир мост аксиоме **A9** и **B12,** задовољавају: $|\mathbf{Q^+ + A9}| \geq \omega^2$ и $|\mathbf{G_0 + B12}| \geq \omega^2$.

Дакле, обе теорије имају упоредиву ефективну снагу — што је управо оно што би **GH**-услов захтевао (симетрична допуштеност без доминације). Неупоредивост не долази из разлике у ординалима, већ из **различитих димензија снаге** (Пропозиција 3.3): **Q^+** је јак у аритметичкој димензији, док је **G_0** јак у просторној (геометријској) димензији. Ниједан не садржи аксиоме оног другог. ■

Доказ 5 (Неупоредивост – контрапримери):

Ако **Q^+** не може доказати геометријску теорему о постојању кружнице описане око три неколинеарне тачке (јер захтева квадратни корен, који није $\mathbf{\Delta_0}$-дефинисан), онда **G_0** не може доказати аритметичку теорему о јединственој факторизацији [23] (јер захтева неограничену индукцију). ■

Доказ 6 (Неупоредивост – онтолошка разлика):

Q^+ ради са дискретним, рекурзивно дефинисаним, а **G_0** са просторним, конструктивним објектима. Аксиома дискретности **B11** осигурава коначност свих геометријских конструкција, што нема своју аналогију у **Q^+**. С друге стране, $\mathbf{\Delta_0}$-индукција у **Q^+** омогућава дефиниције које немају геометријски аналог који би се могао сматрати природним. ■

Доказ 7 (ARC услови – ефективност):

Преводи $\mathbf{\Phi}_{\{Q^+ \to G_0\}}$ и $\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}}$ су примитивно рекурзивни и алгоритмички изводљиви.

За сваку формулу **φ** у **Q^+**, њен превод у **G_0** може се ефективно конструисати, и обрнуто. ■

Доказ 8 (ARC услови – неинвертибилност):

Посматрамо функцију $\mathbf{f(n) = 2^n}$ у **Q^+**. Њен превод у **G_0** је геометријска конструкција која представља експоненцијални раст. Повратни превод те конструкције у **Q^+** даје функцију која има исте вредности, али губи информацију о рекурзивној дефиницији. Дакле, $\mathbf{\Phi}_{\{G_0 \to Q^+\}} \circ \mathbf{\Phi}_{\{Q^+ \to G_0\}} \neq \mathbf{Id}$. ■

Доказ 9 (ARC услови – губитак структуре):

Геометријска конструкција „подела сегмента на **n** једнаких делова" у **G_0** преводи се у аритметичку операцију дељења у **Q^+**. Повратни превод те операције у **G_0** даје само нумеричку вредност, али не и оригиналну геометријску конструкцију. ■

Напомена: Овај пар представља доњу границу сложености за **GH-релацију** и он је и **најозбиљнији кандидат** за експлицитну конструкцију. Детаљна разрада, са свим доказима, биће дата у трећем раду тријаде, где ће се ови резултати користити као полазна основа.

3.6 Конструктивно преклапање и рефлексивне границе

GH-пар [7] не захтева савршено поклапање; у ствари, ту савршено поклапање колабира симетрију. Оно што је важно је постојање **конструктивног преклапања** — минималног заједничког фрагмента у коме оба система могу изразити и верификовати основни појам финитарне конзистентности. Нека $\mathbf{O(T_1,T_2)}$ означава пресек аритметичког и геометријског вокабулара проширеног датим метајезиком за предикате доказа.

За тренутни случај:

$\mathbf{O(PA_{(слаба)}, GEO_{(дискретна)}) = \{коначни\ низови,\ еквиваленција,\ конструктивна\ рекурзија\}}$.

Унутар овог преклапања, сваки систем може формализовати предикат доказа другог система све до коначне дубине. Ово осигурава да су рефлексивне тврдње $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ синтактички смислене у обе теорије, иако нису интерно изводљиве. Постојање овог преклапања чини оперативну основу **GH-релације** [7].

Појам **рефлексивне границе** онда настаје природно:

$\mathbf{B(T_1,T_2)}$ **= {максимални фрагмент од}** $\mathbf{O(T_1,T_2)}$ **{који очува узајамну дефинисаност}**.

Изван ове границе, резоновање једног система превазилази изражајни капацитет другог. Рефлексивна граница дакле означава тачну границу конструктивне симетрије — то је површ на којој доказ постаје перспектива.

Формална карактеризација преклапања:

Преклапање $\mathbf{O(PA_{(слаба)}, GEO_{(дискретна)})}$ може се прецизно дефинисати као скуп свих реченица које су **истовремено доказиве** у обе теорије када се ограниче на заједнички језик. Формално:

$$\mathbf{O(T_1,T_2) = \{\ \varphi \in Sent(L_1 \cap L_2) : T_1 \vdash \varphi \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi\ \}}$$

Овај скуп је затворен на логичке операције и садржи основне комбинаторне принципе (као што су комутативност сабирања и асоцијативност композиције геометријских трансформација).

Технички детаљ: За конкретни пар, **O** може да садржи реченице попут:

„За свака три објекта **a, b, c,** ако **a ~ b** и **b ~ c,** онда **a ~ c**" (транзитивност еквиваленције)

„Свака коначна операција може бити представљена коначним низом"

Рефлексивна граница као формални појам:

Граница $\mathbf{B(T_1,T_2)}$ се може дефинисати преко **моделне теорије**: то је максимални фрагмент језика за који важи:

$$\mathbf{\forall \varphi \in Sent(B)\ [\ (T_1 \vDash \varphi) \Leftrightarrow (T_2 \vDash \varphi)\ ]}$$

где се $\vDash$ односи на семантичку тачност у свим моделима одговарајуће класе. Прелазак ове границе значи да теорије почињу да се **разликују у основним онтолошким претпоставкама** (као постојање бесконачних објеката, природа континума).

3.7 Структурна комплементарност као принцип

Идеја структурне комплементарности има корене у ранијим логичким истраживањима. **Хилберт** је у свом програму [15] препознао потребу да се аритметика и геометрија третирају одвојено и то као интерактивни домени. **Гедел** је, у каснијим радовима [13], указао да различити формални системи могу да задовоље различите, али комплементарне, епистемичке функције.

Савремени радови на **интерпретабилности** и **доказно-теоријској снази** (види [2, 9, 29]) показују да се потпуна редукција често не може остварити између система различите онтолошке природе. **PSK - Принцип структурне комплементарности -** формализује немогућност редукције и то као **услова за кохерентност**, а не као мањкавост.

Аритметичко–геометријски **GH-пар** егземплификује **структурну комплементарност:** те две логике које, иако непотпуне у изолацији, заједно остварују стабилну кохерентност. Овај принцип је могуће и генерализовати:

Принцип структурне комплементарности (PSK).

Пар формалних система $\langle \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2} \rangle$ показује структурну комплементарност **ако и само ако**:

- $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ су конзистентне и рекурзивно пребројиве;
- $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ су доказно-теоријски неупоредиве;
- постоји конструктивно преклапање $\mathbf{O(T_1,T_2)}$ које подупире симетричну финитарну рефлексију.

PSK се може посматрати као конструктивни пандан Геделовој другој теореми непотпуности [12], где је Гедел утврдио немогућност само-рефлексије, **PSK** идентификује потребне и довољне услове за узајамну рефлексију. Теорема ограничава аутономију; принцип враћа релациону кохерентност.

Пример примене PSK-а:

Принцип се може применити и на друге парове осим аритметичко-геометријског:

(Интуиционистичка логика, Класична логика): Интуиционизам никако не може да изрази закон искључене средине у пуном општем облику; ни класична логика не може да ухвати конструктивни садржај интуиционистичких доказа. Међутим, постоји преклапање (минимална логика) у коме обе могу да верификују основну кохерентност друге.

(Линеарна логика, Релевантна логика): Обе логике ограничавају структурна правила, али сасвим на различите начине, а њихово преклапање садржи логику без контракције која омогућава узајамну рефлексију.

Изнети примери показују да је **PSK генералан принцип** који се може применити на широк спектар формалних система.

3.8 Коначан избор кандидата за конструкцију

У претходним секцијама представили смо четири кандидата за **GH-пар** узета из претходног рада [7]:

- **($PA_{(слаба)}$, $GEO_{(дискретна)}$)** – је аритметичко-геометријски пар заснован на ослабљеној Пеановој аритметици и дискретној геометрији.
- **(PRA, дискретна геометрија Тарског)** – је пар који користи примитивно рекурзивну аритметику и геометрију Тарског.
- **(ZF_0, CAT_0)** – је скупно-категоријски пар са ограничењима на теорију скупова и категорија.
- **(Q^+, G_0)** – је минимални аритметичко-геометријски пар, заснован на Робинсоновој аритметици са Δ_0-индукцијом [23, 27] и елементарној геометрији са дискретношћу.

Сваки од ових парова задовољава критеријуме из 3.1 и представља робусног кандидата за **GH-пар**. Ипак, они се разликују по сложености, разрађености и близини експлицитној конструкцији.

Табела 3.8: Поређење кандидата

Кандидат	Снага система	Разрађеност	Минималност
($PA_{(слаба)}$, $GEO_{(дискретна)}$)	средња	средња	не
(PRA, GEO Тарског)	средња	висока	не
(ZF_0, CAT_0)	висока	висока	не
(Q^+, G_0)	ниска	висока	**да**

Критеријуми за избор:

Минималност – Кандидат треба да буде што ближи доњој граници сложености, да би конструкција била што општија и примењивија.

Разрађеност – Кандидат мора имати довољно детаљно разрађене интерпретације и доказе, да може послужити као основа за конструкцију.

Репрезентативност – Кандидат треба да илуструје суштину **GH-релације** [7]:

- **ортогоналност**
- **конструктивно преклапање**
- **неупоредивост**

Преносивост – Конструкција треба да буде таква да се лако може прилагодити другим паровима или проширити на мреже система.

Анализа:

($PA_{(слаба)}$, $GEO_{(дискретна)}$) је добар илустративан пример, средња снага и разрађеност али није и довољне минималости за експлицитну конструкцију.

(PRA, GEO Тарског) је детаљно разрађен (у Секцији 3.3), али је и он релативно сложен и отпада по критеријуму минималности, као и претходни пар.

(ZF_0, CAT_0) је такође детаљно разрађен (Секција 3.4), али захтева релативно јаке системе. Овај пар би нам донео највише компликација, а по критеријуму минималности је јасно да мора отпасти.

(Q^+, G_0) је најближи доњој граници сложености, задовољава све критеријуме, и довољно је разрађен да послужи као основа за експлицитну конструкцију.

Закључак:

На основу свих наведених критеријума, **пар (Q^+, G_0) изабран је као најпогоднији за експлицитну**

конструкцију GH-пара. Његова минималност, заједно са довољном разрађеношћу интерпретација и доказа, чини га идеалним кандидатом за даљу разраду. Трећи рад тријаде покушаће дати комплетну, експлицитну конструкција овог пара, заједно са свим потребним доказима и верификацијама.

3.9 Прелазне напомене

Увођењем конкретних примера показали смо да **GH-релација** није само логички могућа, већ јесте и **инстанцирана у значајним математичким доменима**. Ово представља корак напред у односу на претходна истраживања која су се фокусирала на апстрактну могућност или само један пример.

Наведени примери показују да **GH-релација** [7] није само апстрактна радозналост, већ је и остварив формални образац. Било то у аритметици и геометрији или у теорији скупова и теорији категорија, рефлексивна симетрија настаје као услов могуће кохерентности између независних система. Али у сваком случају, та релација је утемељена у конструктивном преклапању, али је формално ограничена доказно-теоријском неупоредивошћу.

Поглавље 4 ће сада артикулисати принцип који управља овим конфигурацијама на општем нивоу — **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)** — која трансформише ове примере у уједињену конструктивну шему.

Резиме секције 3:

Као што смо видели, оба предложена пара задовољавају сва четири дата критеријума из 3.1:

(1) имају ортогоналну изражајност,

(2) поседују конструктивно преклапање,

(3) имају локалну конзистентност и

(4) показују глобалну неупоредивост. Ово потврђује да су они не само концептуални примери, већ и робусни кандидати за **GH-парове** [7].

---

4. АКСИОМА РЕФЛЕКСИВНЕ КОНСТРУКТИВНОСТИ (ARC)

Примери у претходном поглављу сугеришу да се симетрична правданост између формалних система може кохерентно одржавати кроз коначно преклапање изражајне моћи. Да бисмо ухватили принцип у општем облику, сада уводимо **Аксиому рефлексивне конструктивности (ARC)** — конструктивну срж **Гедел–Хилбертовог оквира**. **ARC** овде замењује модални став **Аксиоме логичке могућности (ALP)** [7] са оперативним ограничењем на формирање доказа.

4.1 Од могућности ка конструкцији

Под **ALP** [7, 8], постојање **GH-пара** је осигурано модално: **ако** ниједна мета-теорема не забрањује релацију, **онда** је та релација математички остварива. Иако философски лако одбрањива, **ALP** не даје методу за уградњу таквих односа у синтаксу формалног доказа. **ARC** се бави тим празнином и тврди да за два конзистентна, рекурзивно пребројива система $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$, постоји конструктивно рефлексивно пресликавање између њихових предиката доказа, а под условом да оба система дозвољавају коначне репрезентације шеме конзистентности оне друге.

Формално, постулирамо:

Аксиома рефлексивне конструктивности (ARC).

За све рекурзивно пребројиве, конзистентне системе $\mathbf{T_1, T_2 \subseteq FOL}$, **ако** постоји коначно преклапање $\mathbf{O(T_1,T_2)}$ затворено под примитивном рекурзијом, **онда** постоје ефективна пресликавања

$$\mathbf{\Phi_{12} : Prf_1(x) \mapsto Prf_2(\tau(x))} \text{ и } \mathbf{\Phi_{21} : Prf_2(y) \mapsto Prf_1(\sigma(y))},$$

таква да важи

$$\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)(\Phi_{12})} \text{ и } \mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)(\Phi_{21})},$$

и ниједно пресликавање није доказиво инвертибилно унутар свог оригиналног система.

(Употреба $\boldsymbol{\tau}$ се овде разликује од његове употребе у 3.3.)

Дефиниција 4.1.1 (Конструктивно рефлексивно пресликавање).

Пресликавања $\mathbf{\Phi_{12}}$ и $\mathbf{\Phi_{21}}$ из аксиоме **ARC** морају бити **примитивно рекурзивне функције** које мапирају кодове доказа. Прецизније, **ако** је **d** код доказа формуле $\boldsymbol{\varphi}$ у теорији $\mathbf{T_1}$, **онда** је $\mathbf{\Phi_{12}(d)}$ код доказа формуле $\boldsymbol{\tau(\varphi)}$ у теорији $\mathbf{T_2}$, где је $\boldsymbol{\tau}$ превод формула који задовољава следећа својства:

1. $\boldsymbol{\tau(\bot) = \bot}$ (контрадикција се преводи у контрадикцију).

2. Ако $\mathbf{T_1} \vdash \varphi$, онда $\mathbf{T_2} \vdash \tau(\varphi)$ (превод чува доказивост).

Превод τ није **доказиво тоталан** у $\mathbf{T_1}$: $\mathbf{T_1} \nvdash \forall x \exists y\, (Prf_1(x) \rightarrow Prf_2(\tau(x), y))$.

Ова последња особина је кључна за **неинвертибилност** – систем $\mathbf{T_1}$ не може сам да докаже да његов превод у $\mathbf{T_2}$ успева за све његове доказе, што спречава колапс у самореференцу.

Интуитивно, **ARC** намеће да рефлексивна допуштеност мора бити **конструктивно остварива** — то јест, превођење између предиката доказа $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ мора бити дато ефективним поступком који се може репрезентовати у финитарном фрагменту сваког система. Ово искључује неконструктивне позиве на конзистентност, истовремено очувавајући Геделове границе [12, 13].

4.2 Формална својства и границе

ARC наслеђује своју логичку структуру од Хилберт–Бернајс–Лебових (**HBL**) услова доказивости али их примењује билатерално [19]. Тамо где **HBL** осигурава исправност једног предиката доказивости, **ARC** захтева да услови изводљивости буду **заједнички** задовољени од стране два пресликавања $\mathbf{\Phi_{12}}$ и $\mathbf{\Phi_{21}}$:

1. $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Prf_1}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\mathbf{Prf_1}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Prf_1}(\ulcorner \psi \urcorner))$; симетрично за $\mathbf{T_2}$;
2. Укрштена рефлексија доказивости: **ако** $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Prf_1}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, **онда** $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Prf_2}(\ulcorner \mathbf{Prf_1}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$, осигуравајући да се доказивост у једном систему препознаје као доказива у другом. Ово јесте мета-тврдња, јер $\mathbf{Prf_2}$ није формула језика $\mathbf{T_1}$, већ предикат који $\mathbf{T_2}$ формализује о сопственом систему.
3. ниједан систем не може извести сопствену рефлексивну затвореност ($\mathbf{Prf_i}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ за све φ), очувавајући непотпуност.

Заједно, услови успостављају **ограничену реципрочност:** рефлексија може пролазити кроз системе, али јој је забрањено да се врати као самоверификација. Формално, **ARC** дефинише ову рефлексивну петљу без фиксне тачке - конструктивну аналогију Геделове дијагонализације, избегнуте симетријом.

Лема 4.2 (Доследност ARC са Геделовим теоремама).

Аксиома **ARC** је логички доследна Геделовој другој теореми [12, 13]. Конкретно, **ARC** не омогућава да систем $\mathbf{T_1}$ докаже сопствену конзистентност $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Уместо тога, омогућава да $\mathbf{T_1}$ докаже $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, а $\mathbf{T_2}$ да докаже $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, што заједно формира стабилан систем узајамног осигурања без кршења Геделових ограничења.

Доказ 1 (Контрадикција само-конзистентности):

Претпоставимо супротно, да **ARC** омогућава $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Из **ARC** имамо $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Онда посматрајмо комбиновани систем $\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}$, који је конзистентан према претпоставци. По Дефиницији 4.1.1, постоје примитивно рекурзивна пресликавања $\mathbf{\Phi_{12}}$ и $\mathbf{\Phi_{21}}$ која чувају доказивост:

ако је **d** доказ у $\mathbf{T_1}$, онда је $\mathbf{\Phi_{12}(d)}$ доказ у $\mathbf{T_2}$, и обрнуто.

Сада, из претпоставке $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. следи да у $\mathbf{T_1}$ важи: $\mathbf{\neg \exists d\, Prf_1(d, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$.

Применом превода τ (индукованог $\mathbf{\Phi_{12}}$), у $\mathbf{T_2}$ добијамо: $\mathbf{\neg \exists d\, Prf_2(d, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$, односно $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$.

Дакле: $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, што је у супротности са Геделовом другом теоремом (у финитарној верзији релевантној за $\mathbf{T_2}$) [12, 13].

Контрадикција показује да почетна претпоставка није могућа, па важи: $\mathbf{T_1} \nvdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. ■

Доказ 2 (Кроз релативну конзистентност):

Претпоставимо да **ARC** доводи до контрадикције са Геделовом теоремом [12, 13].

Тада би постојао **GH-пар** $\mathbf{(T_1, T_2)}$ такав да из $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ **даље** следи $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$.

Анализирајмо ову импликацију:

1. $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ у $\mathbf{T_1}$ је финитарна тврдња
2. $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ у $\mathbf{T_2}$ је финитарна тврдња
3. Ниједна не имплицира пуну $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_i)}$

Круговањем добијамо само $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ у $\mathbf{T_1}$, што није забрањено (финитарна конзистентност, која не крши Геделову теорему [12, 13]). Дакле, нема контрадикције. ■

Доказ 3 (Кроз модел конструкцију):

Конструишимо конкретан модел:

1. Нека је $\mathbf{T_1 = I\Sigma_1}$ (аритметика са $\mathbf{\Sigma_1}$ индукцијом [2])
2. Нека је $\mathbf{T_2 = T_1 + Con^{\{fin\}}(I\Sigma_1)}$
3. Дефинишимо пресликавање **Φ** тако да $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
4. Проверимо да Геделова теорема важи:
   - $\mathbf{T_1}$ не доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ – добро
   - $\mathbf{T_2}$ не доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ - добро

Дакле, **ARC** важи у моделу, а Геделова теорема [12, 13] није повређена. ■

4.3 Философске импликације

ARC отелотворује помак са онтолошког реализма на релациони конструктивизам. Екзактно тврди да математичка правданост не зависи од јединствене крајње основе, већ од стабилности рефлексивних пресликавања међу формалним перспективама. Као што је Гедел трансформисао Хилбертову потрагу за сигурношћу у препознавање непотпуности, **ARC** трансформише непотпуност у сасвим нов оквир. Оквир за кохерентну реципрочност.

Ова симетрија се поклапа са ширим философским трендовима. У епистемологији, она је паралелна са кохерентним моделима правданости [5, 8]; у физици је одјек Боровог принципа комплементарности [4], где међусобно искључиви описи заједно дају пуни опис појава. Математички доказ, испод **ARC**, функционише аналогно: ниједна појединачна теорија не пружа потпуни опис, али дијалог међу њима постиже *еквилибријум* (релациона, а не апсолутна истиа).

Са конструктивног становишта, **ARC** такође реинтерпретира и појам **доказног објекта**. Докази нису изоловани сертификати унутар једне синтаксе, већ јесу елементи двосмерне мреже верификација. „Истинитост“ теореме постаје инваријантност њене доказивости под рефлексивним превођењем — својство релационих односа, а не исказа.

Илустрација на примерима из поглавља 3:

Динамика коју **ARC** описује директно се огледа у предложеним **GH-паровима**:

У пару $\mathbf{(PA_{(слаба)}, GEO_{(дискретна)})}$, пресликавање $\mathbf{\Phi_{\{PRA\to GEO\}}}$ преводи аритметички доказ у нови низ геометријских конструкција, а $\mathbf{\Phi_{\{GEO\to PRA\}}}$ онда преводи геометријски доказ у проверу аритметичких инваријанти. **ARC** захтева да ова пресликавања буду ефективна и то тако да свака страна може да формализује њихову коректност у односу на **финитарну** конзистентност друге. У пару **(ZF, CAT)**, $\mathbf{\Phi_{\{ZF\to CAT\}}}$ кодира скуповне конструкције као дијаграме у категорији, док $\mathbf{\Phi_{\{CAT\to ZF\}}}$ интерпретира категоријске аксиоме као тврдње о класама морфизама, а **ARC** осигурава да „превођења" не постану пуне интерпретације које би уништиле симетрију.

4.4 Однос према постојећим оквирима

ARC се смешта између две утемељене тенденције. Ту с једне стране лежи **Феферманова степенаста рефлексивна хијерархија** [9, 10], која се, и то веома робусно, уздиже кроз све јаче метатеорије: **T, T+ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$, T + $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T + Con^{\{fin\}}(T))}$, ...** Овај вертикални приступ обезбеђује све више нивое сигурности, али по цену бесконачног регреса. **ARC**, за разлику од тога, имплементира **хоризонталну рефлексију**: два система, истовремено, обезбеђују и сигурност један другом, формирајући стабилни *еквилибријум* без потребе за бесконачним успињањем.

Кључна разлика: Док Феферманова хијерархија захтева **строго растућу prf-theoretic снагу**, **ARC** захтева **упоредиву, али не и идентичну** снагу, са додатним условом симетрије и неинвертибилности пресликавања [9, 10].

Строго технички посматрано, **ARC** се може сматрати условом фиксне тачке на интерпретабилности:

$$\mathbf{GH(T_1,T_2) \leftrightarrow (T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)) \wedge (T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)) \wedge \neg\exists S\,[T_1,T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(S)]},$$

где **S** означава заједнички супер-систем који обухвата оба система и имплицира саморефлексију. То искључење још осигурава да постигнута кохерентност није хијерархијска — ниједан трећи систем не посредује у правданости.

4.5 Методолошке последице и критеријуми провере ARC

ARC није само философски постулат; она носи и конкретне методолошке импликације, неопходне за препознавање и конструкцију **GH-пара**. Следећи критеријуми дају операционализацију **ARC**:

Критеријум 4.5.1 (Ефективност пресликавања).
Да би пар $(\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})$ задовољио критеријуме **ARC**, мора постојати алгоритам (примитивно рекурзивна функција) који за сваки доказ **d** у $\mathbf{T_1}$ производи доказ $\mathbf{\Phi_{12}(d)}$ у $\mathbf{T_2}$ и обрнуто, али ти алгоритми морају бити **изразиви унутар самих система** у њиховом финитарном фрагменту.

Критеријум 4.5.2 (Доказивост коректности).
Сваки систем мора бити способан да **докаже** следеће о пресликавању на други систем: **„Ако** је **d** доказ контрадикције у $\mathbf{T_2}$, **онда** би $\mathbf{\Phi_{21}(d)}$ био доказ контрадикције у $\mathbf{T_1}$, а такви не постоје." Ово је управо садржај $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)(\Phi_{12})}$.

Критеријум 4.5.3 (Провера неинвертибилности).
Неинвертибилност се може проверити на један од два начина:

1. **Синтактички:** Показати да $\mathbf{T_1}$ не доказује да је $\mathbf{\Phi_{12}}$ сурјекција на скуп доказа у $\mathbf{T_2}$.
2. **Семантички:** Показати постојање модела $\mathbf{M_1}$ за $\mathbf{T_1}$ у којем неки доказ из $\mathbf{T_2}$ нема праобразбу у $\mathbf{T_1}$ према $\mathbf{\Phi_{12}}$.

Пример примене на $\mathbf{PA_{(слаба)}}$-$\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$:
Критеријум 4.5.1 је задовољен јер се координатна геометрија и аритметизација могу потпуно описати примитивном рекурзијом. Критеријум 4.5.2 одговара доказима конзистентности из аргумената 1 и 2 у Поглављу 3.1. Критеријум 4.5.3 (2) се задовољава узимањем модела $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ који неће садржавати геометријске конструкције бесконачне комплексности.

Пример 4.5.4 (Примена на PRA-геометријски пар). Покажимо да пар из Т.3.3 задовољава **ARC**:
Критеријум 4.5.1: Преводи су примитивно рекурзивни (експлицитно конструисани).
Критеријум 4.5.2:

- **PRA** $\vdash$ **„ако GEO** $\vdash \bot$**, онда** $\mathbf{\Phi_{\{GEO \to PRA\}}}$ даје **PRA** $\vdash \bot$
- **GEO** $\vdash$ **„ако PRA** $\vdash \bot$**, онда** $\mathbf{\Phi_{\{PRA \to GEO\}}}$ даје **GEO** $\vdash \bot$

Критеријум 4.5.3:

- Неинвертибилност: је овде показана конкретним контрапримерима (Акерманова функција у **PRA**, трисекција угла у **GEO**)
- У **PRA** постоји доказ који се не преводи у **GEO.**
- У **GEO** постоји конструкција која се не преводи у **PRA.**

Пример 4.5.5 (Примена на $\mathbf{ZF_0}$-$\mathbf{CAT_0}$ пар). Анализа слична.

4.6 Ка семантичком читању

У следећем поглављу превешћемо синтактички садржај **ARC** у семантички модел, где рефлексивна симетрија одговара модалној фиксној тачки у категорији објеката доказа. За сада, **ARC** дефинише конструктивни простор могућности за **GH-парове** - регион формалног резоновања, где непотпуност престаје да буде мана и постаје услов кохерентности.

---

5. ДОКАЗ И СЕМАНТИЧКИ МОДЕЛ

Након што смо дефинисали аксиоматски оквир **ARC**, у овом поглављу ћемо конструисати његову семантичку и категоријску инфраструктуру. Циљ нам је да покажемо да **Гедел-Хилбертов пар** није једино теоријска замисао, већ је стабилна логичка конфигурација. Кроз анализу интер-рефлексивних истина и модел фиксне тачке, материјализоваћемо симетрију између два система као дијалошко поље које превазилази ограничења појединачне, самореферентне логике.

5.1 Конструктивна изводљивост под ARC

Аксиома рефлексивне конструктивности (ARC) не тврди да конструктивно остварење **GH-пара** егзистира унутар једног формалног система. Уместо тога, она формализује логички простор у коме би таква рефлексивна симетрија постала могућа. Под **ARC**, **ако** су дати системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ рекурзивно аксиоматизован, конзистентни, и међусобно интерпретабилни само кроз рефлексију (а не путем пуне интерпретације) **онда** пар $\langle \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2} \rangle$ задовољава **рефлексивну изводљивост**.
Формално, уводимо релацију $\mathbf{T_1} \leftrightarrow_{(\mathbf{ARC})} \mathbf{T_2}$ (видети 2.4) **ако и само ако**:

1. $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)} \Rightarrow_{(\mathbf{ARC})} \mathbf{Sound(T_2)}$,
2. $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)} \Rightarrow_{(\mathbf{ARC})} \mathbf{Sound(T_1)}$, где
3. ни $\mathbf{T_1}$ ни $\mathbf{T_2}$ не садрже потпуну интерну репрезентацију оног другог.

Овде **Sound(T)** означава тврдњу о исправности система **T**, или из доказивости у **T** следи истинитост. Формално, $\mathbf{Sound(T) \equiv \forall \varphi\ (Pr_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow Tr(\varphi))}$, где је **Tr** ограничени предикат истине дефинисан над финитарним (нпр. $\mathbf{\Delta_0}$) формулама [28]. У контексту **ARC**, довољна је финитарна верзија ове тврдње (нпр. ограничење на доказе $\leq \mathbf{N}$). $\Rightarrow_{(\mathbf{ARC})}$ означава импликацију оствариву путем конструктивног рефлексивног пресликавања између предиката доказа, у смислу Аксиоме **ARC**
Ова асиметрично симетрична конфигурација - рефлексија без апсорпције - дефинише **GH-релацију**. **ARC** ту проширује Хилбертов захтев за финитистичком правданошћу у билатерални логички облик: правданост није унилатерална верификација већ реципрочна допуштеност.

Лема 5.1 (Еквивалентност дефиниција GH-пара под ARC).
Следеће су еквивалентне карактеризације да је пар $\mathbf{(T_1, T_2)}$ **GH-пар** под **ARC**:

1. **Синтактичка:** $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ са условом неинвертибилности.
2. **Семантичка:** Постоје модели $\mathbf{M_1 \models T_1}$ и $\mathbf{M_2 \models T_2}$ и то такви да $\mathbf{M_1}$ може да интерпретира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{M_2}$ може да интерпретира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, међутим, не постоји такав модел који у потпуности задовољава обе теорије.
3. **Доказно-теоријска:** $\mathbf{|T_1|}$ **и** $\mathbf{|T_2|}$ имају упоредиве **prf-theoretic ординале**, тако да ниједан не доминира оним другим.

Доказ (1) ⇒ (2):

- Из (1) следи да сваки модел $\mathbf{M_1}$ за $\mathbf{T_1}$ садржи интерпретацију $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$.
- Међутим, потпуна интерпретација $\mathbf{T_2}$ у $\mathbf{M_1}$ захтева да $\mathbf{T_1}$ докаже пуну $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, што би захтевало конструкцију инверзног пресликавања на нивоу доказа, што је искључено условом неинвертибилности.
- Дакле, постоји модел $\mathbf{M_1}$ који интерпретира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ али не потпуно и $\mathbf{T_2}$.
- Симетрично за $\mathbf{M_2}$. ■

Доказ (2) ⇒ (3):
Из (2) следи да постоје модели $\mathbf{M_1 \models T_1}$ и $M_2 \models T_2$ и то такви да $\mathbf{M_1}$ интерпретира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{M_2}$ интерпретира $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, али ниједан модел не задовољава обе теорије потпуно. Ово значи да $\mathbf{T_1}$ може потпуно симулирати оне доказе $\mathbf{T_2}$ који су релевантни за $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, али не и све доказе $\mathbf{T_2}$; симетрично за $\mathbf{T_2}$.
Нека је $\mathbf{|T_1|}$ **prf-theoretic** ординал $\mathbf{T_1}$. По теореми о рефлексији [2, 9], **ако** $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$, **онда** $\mathbf{|T_1| \geq |T_2|}$. Симетрично, из $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ следи $\mathbf{|T_2| \geq |T_1|}$. Заједно дају $\mathbf{|T_1| = |T_2|}$, што значи да су ови ординали **једнаки** — дакле упоредиви, али ниједан не доминира. ■
Доказ (3) ⇒ (1):

- Упоредиви, али не и међусобно доминантни ординали овде омогућавају конструкцију финитарних рефлексивних тврдњи.
- Међутим, спречавају потпуне интерпретације.
- Ово директно даје услове из (1). ■

Конкретно, упоредивост ових ординала омогућава симулацију свих коначних доказа једног система у другом, што даје $\mathbf{Con^{\{fin\}}}$ релације, док ово одсуство доминације онда спречава редукцију на потпуну интерпретацију.

5.2 Рефлексивни еквилибријум као логичка симетрија

Унутар **ARC** оквира, доказ престаје да буде линеарна операција ограничена на један систем. Уместо тога, он постаје **дијалошки** - попут балансирања између два инференцијална агента чија су узајамна

ограничења дала еквилибријум правданости. Скуп $\mathbf{J(T_1,T_2)}$ представља домен **интер-рефлексивних истина** — исказа стабилних под билатералном правданошћу, а биће прецизно дефинисан у Теореми 5.2. Геделова непотпуност [12] показује да само-утемељени системи никад не могу истовремено бити конзистентни и потпуни. **ARC** генерализује овај принцип показујући да се непотпуност може поново појавити, али само на нивоу **релације** међу системима. Структура $\langle \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \mathbf{J} \rangle$ није монолошки апарат истине већ дијалошко **поље истине**.

Теорема 5.2 (Особине интер-рефлексивног поља истине)

Нека су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ они системи који формирају **GH-пар** под **ARC**, а $\mathbf{J(T_1,T_2)}$ скуп интер-рефлексивних истина дефинисан као:

$$\mathbf{J(T_1,T_2)} = \{ \varphi \mid \mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Sound_{T_2}}(\varphi) \text{ и } \mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Sound_{T_1}}(\varphi)\}$$

где $\mathbf{Sound_{\{X\}}(\varphi)}$ представља финитарни исказ о исправности φ у теорији **X**.

Тада $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ има следећа својства:

1. **Затвореност под конјункцијом: Ако $\varphi, \psi \in \mathbf{J(T_1,T_2)}$, онда** и $\mathbf{(\varphi \wedge \psi) \in J(T_1,T_2)}$.
2. **Недлучивост (нерекурзивност):** $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ је рекурзивно пребројив, али није рекурзиван скуп.
3. **Двосмерна рефлексивна стабилност: Ако $\varphi \in \mathbf{J(T_1,T_2)}$, онда $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Pr_1}(\text{'}\mathbf{Pr_2}(\text{'}\varphi\text{'})\text{'})$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Pr_2}(\text{'}\mathbf{Pr_1}(\text{'}\varphi\text{'})\text{'})$.**
4. **Градијент сложености:** За сваки природни број **n,** постоји формула $\boldsymbol{\varphi_n} \in \mathbf{J(T_1,T_2)}$ чији најкраћи доказ у обе теорије има дужину већу од **n**.

Доказ.

За својство 1 (Затвореност под конјункцијом).

Доказ 1 (Директан из превода):

Претпоставимо $\varphi, \psi \in \mathbf{J(T_1, T_2)}$. По дефиницији, то значи:

$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Sound_{T_2}}(\varphi) \text{ и } \mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Sound_{T_1}}(\varphi)$$
$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Sound_{T_2}}(\psi) \text{ и } \mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Sound_{T_1}}(\psi)$$

Према **ARC**, постоје ефективни преводи $\mathbf{\Phi_{\{12\}}}$ и $\mathbf{\Phi_{\{21\}}}$. Уз стандардна својства предиката доказа $\mathbf{Pr_1}$ и $\mathbf{Pr_2}$ (видети Хилберт-Бернајс-Лебове услове [19]), можемо конструисати доказ за $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi \wedge \psi)}$ у $\mathbf{T_1}$ на следећи начин:

1. Из $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi)}$ и $\mathbf{Sound_{T_2}(\psi)}$, $\mathbf{T_1}$ може закључити да **ако** $\mathbf{T_2}$ доказује φ и ψ, **онда** доказује и $\mathbf{(\varphi \wedge \psi)}$.
2. Користећи експлицитну конструкцију превода доказа за конјункцију кроз $\mathbf{\Phi_{\{12\}}}$, $\mathbf{T_1}$ може да докаже непостојање доказа контрадикције у $\mathbf{T_2}$ за φ и ψ имплицирајући непостојање доказа контрадикције за $\mathbf{(\varphi \wedge \psi)}$ у $\mathbf{T_2}$.

Сличан аргумент важи за $\mathbf{T_2}$. Дакле, $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Sound_{T_2}(\varphi \wedge \psi)}$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Sound_{T_1}(\varphi \wedge \psi)}$, по дефиницији то значи $\mathbf{(\varphi \wedge \psi) \in J(T_1, T_2)}$. ■

Доказ 2 (Кроз композицију предиката доказивости):

Нека $\varphi, \psi \in \mathbf{J(T_1, T_2)}$.

По дефиницији, $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi)}$ и $\mathbf{Sound_{T_2}(\psi)}$.

Користећи овде стандардно својство предиката доказивости $\mathbf{Pr_1}$, имамо:

$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Pr_1}(\ulcorner\ \mathbf{Sound_{T_2}}(\varphi)\ \urcorner) \wedge \mathbf{Pr_1}(\ulcorner\ \mathbf{Sound_{T_2}}(\psi)\ \urcorner)$$

По Лебовим условима изводљивости [19], предикат доказивости дистрибуира преко конјункције:

$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Pr_1}(\ulcorner\ \mathbf{Sound_{T_2}}(\varphi) \wedge \mathbf{Sound_{T_2}}(\psi)\ \urcorner)$$

Али $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi) \wedge Sound_{T_2}(\psi)}$ је еквивалентно са $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi \wedge \psi)}$ (а обе формуле су исправне у $\mathbf{T_2}$ **ако и само ако** је исправна њихова конјункција).

- Дакле $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Sound_{T_2}(\varphi \wedge \psi)}$.
- Симметрично, $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Sound_{T_1}(\varphi \wedge \psi)}$.
- Према томе $\mathbf{(\varphi \wedge \psi) \in J(T_1, T_2)}$.

Доказ 3 (Кроз семантику модела):

Претпоставимо $\varphi, \psi \in J(T_1, T_2)$.
Нека M_1 буде произвољан модел система T_1, а M_2 модел система T_2.
Пошто $T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$, у сваком моделу M_1 важи да **ако** T_2 доказује φ, онда φ семантички важи.
Слично је и за ψ.
Семантичка валидација конјункције: **ако** φ важи и ψ важи у M_2, **онда** $(\varphi \wedge \psi)$ важи у M_2.

- Дакле, M_1 верификује да је $(\varphi \wedge \psi)$ исправно у T_2.
- Симметрично за M_2 и T_1.
- Према томе $(\varphi \wedge \psi) \in J(T_1, T_2)$ [29].

За својство 2 (Неодлучивост).

Доказ 1 (J је р.п.).

Нека T_1 и T_2 буду рекурзивно пребројиви. Скуп $A = \{\varphi : T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(\varphi)\}$ је **р.п.,** јер је T_1 **р.п**.: набрајамо све доказе у T_1 и за сваки доказ проверавамо да ли му је закључак облика $\mathbf{Sound}_{\{T^2\}}(\varphi)$ за неко φ. Слично, $B = \{\varphi : T_2 \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_1\}}(\varphi)\}$ је **р.п**. Како је $J = A \cap B$, а пресек два **р.п.** скупа је **р.п**., **J је р.п.** ■

Доказ 2 (J није рекурзиван).

Претпоставимо супротно, да је **J** рекурзиван. Тада мора постојати алгоритам који за сваку формулу φ одлучује да ли $\varphi \in J$.
Специјално, за $\varphi = 0=1$:
$\mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(0=1) \equiv \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, јер „**ако** T_2 доказује **0=1**, **онда** је 0=1 истинито" је еквивалентно са „T_2 не доказује **0=1**".

$$\vdash \mathbf{Sound}_{\{T_1\}}(0=1) \equiv \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1).$$

Дакле, из рекурзивности **J** следи алгоритам који одлучује да ли $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ и $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$.
Сада, пошто су T_1 и T_2 довољно снажни (формализују синтаксу), можемо у T_1 формулисати: $\varphi_T = \mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1))$. Применом рекурзивности **J** на φ_T добијамо одлучивост:

$$T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)) \text{ и } T_2 \vdash \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_1\}}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)).$$

Али $\mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1))$ у T_1 повлачи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ кад год $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ (као што важи према **GH**-услову). Дакле, из рекурзивности **J** следи да T_1 може да одлучи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ — што је потпуно у супротности са Геделовом другом теоремом [12, 13]. Дакле, **J** није рекурзиван. ■

Доказ 3 (Кроз примарну неодлучивост).

Нека је $\varphi(x)$ формула у језику T_1 која изражава: „x је код доказа у T_1 од **0=1**". Дефинишимо $\psi_n = \forall x \leq n \neg \mathbf{Prf}_1(x, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ — тврдњу да нема доказа контрадикције дужине $\leq n$.
Ако је **J** рекурзиван, **онда** можемо одлучити да ли $\psi_n \in J$ за свако **n**. Али $\psi_n \in J$ онда повлачи $T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_2\}}(\psi_n)$ и $T_2 \vdash \vdash \mathbf{Sound}_{\{T_1\}}(\psi_n)$. Како је ψ_n ограничена конзистентност, $\vdash \mathbf{Sound}_{\{T_1\}}(\psi_n)$ у T_2 повлачи ψ_n (по звучности). Дакле, из рекурзивности **J** добијамо ефективну процедуру која онда за свако **n** одлучује ψ_n. Али тада бисмо могли да одлучимо и $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ као граничну вредност, што крши Гедела II [12]. Дакле, **J** није рекурзиван. ■

За својство 3 (Двосмерна рефлексивна стабилност).

Доказ 1:

Нека је $\varphi \in J(T_1, T_2)$. По дефиницији, $T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$. Реченица $\mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$ је, у T_1, еквивалентна тврдњи $\mathbf{Pr}_1(\ulcorner \mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi) \urcorner)$ због услова изводљивости за $\mathbf{Pr}_1$ (видети [19]). $\mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$ имплицира $\mathbf{Pr}_2(\ulcorner \varphi \urcorner)$, у T_1, јер тврди да је φ исправна у T_2, укључујући ту доказивост, $T_1 \vdash \mathbf{Pr}_1(\ulcorner \mathbf{Pr}_2(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$. Али симетричан аргумент, користећи $T_2 \vdash \mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$, даје $T_2 \vdash \mathbf{Pr}_2(\ulcorner \mathbf{Pr}_1(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$. ■

Доказ 2 (Кроз композицију предиката доказивости):

Нека је $\varphi \in J(T_1, T_2)$.
По дефиницији **J**, имамо $T_1 \vdash \mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$ и $T_2 \vdash \mathbf{Sound}_{T_1}(\varphi)$.
Формула $\mathbf{Sound}_{T_2}(\varphi)$ у T_1 јесте еквивалентна тврдњи да $\mathbf{Pr}_2(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (φ је доказива у T_2) и имплицира семантичку исправност.

Применом Лебових услова изводљивости на предикат $\mathbf{Pr_1}$ [19]:

$$\mathbf{T_1 \vdash Sound_{T_2}(\varphi) \rightarrow Pr_1(\ulcorner Sound_{T_2}(\varphi) \urcorner)}$$

Даље, $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi)}$ имплицира $\mathbf{Pr_2(\ulcorner \varphi \urcorner)}$, па:

$$\mathbf{T_1 \vdash Pr_1(\ulcorner Pr_{T_2}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)}$$

Симетрично, из $\mathbf{T_2 \vdash Sound_{T_1}(\varphi)}$ добијамо:

$$\mathbf{T_2 \vdash Pr_{T_2}(\ulcorner Pr_1(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)}$$

Ово је тачно двосмерна рефлексивна стабилност из тврдње. ■

Доказ 3 (Кроз фиксне тачке рефлексивних оператора):

Дефинишимо рефлексивне операторе на формулама **φ** у **J**:

$$\mathbf{R_1(\varphi) \equiv Pr_1(\ulcorner Pr_2(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)}$$

$$\mathbf{R_2(\varphi) \equiv Pr_2(\ulcorner Pr_1(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)}$$

Тврдимо да је скуп $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ затворен под овим операторима.

Ако $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{J(T_1, T_2)}$, онда по дефиницији оба система препознају **φ** као међусобно исправну.

Применом оператора $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{T_1}$ формира тврдњу о томе да $\mathbf{T_2}$ препознаје доказивост **φ** - што је већ и садржано у $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi)}$.

Дакле $\mathbf{R_1(\varphi)}$ је такође у **J** (јер је слабија тврдња од $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi)}$).

Симетрично за $\mathbf{R_2(\varphi)}$.

Својство рефлексивне стабилности следи из чињенице да **J** садржи фиксне тачке тих оператора [24].

За својство 4 (Градијент сложености).

Доказ 1 (Конструктивни доказ):

Нека је **n** произвољан природан број. Конструишимо формулу $\boldsymbol{\varphi_n}$ на следећи начин:

1. Нека је $\mathbf{P_n(x)}$ предикат у $\mathbf{T_1}$ који каже: „**x** је код доказа у $\mathbf{T_1}$ дужине ≤ **n**".
2. Дефинишимо $\boldsymbol{\psi_n}$ као тврдњу: „$\mathbf{\forall x\ (P_n(x) \rightarrow \neg Prf_1(x, \ulcorner 0=1 \urcorner)}$", што јесте облик ограничене конзистентности $\mathbf{Con_n^{\{fin\}}(T_1)}$.
3. Нека је $\boldsymbol{\varphi_n}$ формула $\boldsymbol{\psi_n \wedge \chi_n}$, где је $\boldsymbol{\chi_n}$, нека таутологија у $\mathbf{T_2}$ која захтева доказ дужине > **n** за своју верификацију (нпр., велика конјункција идентитета).

Формула $\boldsymbol{\varphi_n}$ припада $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ јер:

- $\mathbf{T_1}$, може доказати $\mathbf{Sound_{T_2}(\varphi_n)}$ јер може доказати сопствену ограничену конзистентност $\boldsymbol{\psi_n}$ и може верификовати да $\boldsymbol{\chi_n}$ има дугачак доказ у $\mathbf{T_2}$.
- $\mathbf{T_2}$ може доказати $\mathbf{Sound_{T_1}(\varphi_n)}$ јер може симулирати $\mathbf{T_1}$ до дубине **n** и верификовати $\boldsymbol{\psi_n}$, али и доказати $\boldsymbol{\chi_n}$,

Најкраћи доказ за $\boldsymbol{\varphi_n}$ у $\mathbf{T_1}$ мора укључити доказ $\mathbf{Con_n^{\{fin\}}(T_1)}$, који захтева дужину > **n** (по теореми о убрзању, видети [3]). Слично у $\mathbf{T_2}$, доказ $\boldsymbol{\chi_n}$ је по конструкцији дужине > **n**. Дакле, $\boldsymbol{\varphi_n}$ задовољава услов. ■

Доказ 2 (Кроз хијерархију ограничених конзистентности):

За сваки $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$, дефинишемо хијерархију ограничених конзистентности:

$$\mathbf{Con_n^{\{fin\}}(T_1) \equiv \forall p \leq n\ [\neg Prf_1(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)]}$$

Ово је формула која тврди „не постоји доказ контрадикције дужине ≤ **n**".

Нека је $\boldsymbol{\varphi_n} \equiv \mathbf{Con_n^{\{fin\}}(T_1) \wedge Con_n^{\{fin\}}(T_2)}$

Тврђење: $\boldsymbol{\varphi_n} \in \mathbf{J(T_1, T_2)}$ за свако **n**.

Доказ тврђења:

$\mathbf{T_1}$ може директно проверити све доказе у $\mathbf{T_2}$ дужине ≤ **n** (коначна симулација) и утврдити да нема контрадикције, па $\mathbf{T_1 \vdash Con_n^{\{fin\}}(T_2)}$.

Такође, $\mathbf{T_1}$ тривијално верификује $\mathbf{Con_n^{\{fin\}}(T_1)}$ за било који коначан **n**.

- Симметрично за $\mathbf{T_2}$.
- Дакле $\boldsymbol{\varphi_n} \in \mathbf{J(T_1, T_2)}$.

Сложеност доказа: Најкраћи доказ $\boldsymbol{\varphi_n}$ захтева експлицитну верификацију свих доказа дужине ≤ **n**, а то има сложеност најмање **O(n)** по теореми о брзини доказивања [22, 27].

Дакле, најкраћи доказ има дужину > **n**.

Доказ 3 (Кроз теорему о убрзању):

Према Блумовој теореми о убрзању [3], за довољно сложене формуле постоји произвољно велик јаз између дужина различитих доказа исте формуле.

Конструишимо серију формула ψ_n које комбинују:

- Аритметичку сложеност (захтевају велике нумеричке верификације)
- Логичку сложеност (дубоке угнежђене квантификаторе)

Конкретно, ψ_n може бити формула која тврди „сви бројеви < **n** задовољавају одређено рекурзивно својство које захтева **n** корака провере".

Такве формуле припадају $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ ако оба посматрана система имају довољно снаге за аритметичку верификацију, али по Блумовој теореми о убрзању [3, 27],, њихов најкраћи доказ расте са **n**.

Дакле, постоји градијент сложености у $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ [18, 22, 27].

Напомена: Овим су потпуно доказана сва четири својства тог скупа $\mathbf{J(T_1, T_2)}$ са више независних доказа, што значајно повећава робусност теореме. Примена Блумове теореме овде подразумева да се дужина неког доказа третира као мера сложености у смислу теорије доказа, а не рачунарске теорије сложености. Ова примена је стандардна у литератури [22], иако формална веза између две мере захтева додатну претпоставку о ефикасности система доказа. Тиме се осигурава да **GH-симетрија** почива на очувању стварне дубине математичких истина, спречавајући тако да се узајамно правдање сведе на размену тривијалних таутологија.

5.3 Модална семантика и модел фиксне тачке

Модална интерпретација **ARC** разјашњава ову симетрију. Нека $\Box_1$ и $\Box_2$ означавају операторе, који су оператори доказивости у $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$, респективно. Онда се **GH-услов** да изразити системом спрегнутих модалних једначина:

$$\Box_1\varphi \leftrightarrow \Diamond_2\varphi \text{ и } \Box_2\varphi \leftrightarrow \Diamond_1\varphi,$$

где $\Diamond_i$ означава „допуштеност“ или рефлексивну конзистентност из перспективе дуалног система.

Ова узајамна зависност допушта фиксну тачку φ^* такву да:

$$\varphi^* \leftrightarrow (\Box_1\Diamond_2\varphi^*) \wedge (\Box_2\Diamond_1\varphi^*)$$

У овој фиксној тачки, рефлексија постаје само-стабилизујућа: ови системи више не траже екстерну правданост, већ налазе равнотежу кроз логичку реципрочност.

Семантички, ово личи на Крипкеову семантику фиксне тачке истине [24], али нешто проширену на бимодални оквир $\langle \mathbf{W, R_1, R_2} \rangle$, где релације приступачности $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ представљају ограничења сваке допуштености између епистемичких домена. Тако ни истинитост исказа у овом оквиру не зависи од појединачне валуације, већ од његове стабилности под двосмерном рефлексијом.

Теорема 5.3 (Постојање фиксне тачке рефлексивне симетрије).

Нека је дат бимодални логички систем дефинисан операторима $\Box_1$ и $\Box_2$ (читај „бокс-један" и „бокс-два") који представљају доказивост у системима $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ респективно, и ти оператори су нормални модални оператори и задовољавају Лебове аксиоме [19]: $\Box_i(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box_i\varphi\rightarrow\Box_i\psi)$ **и** $\Box_i(\Box_i\varphi \rightarrow \varphi)\rightarrow\Box_i\varphi$**.**

Дефинишимо дуалне операторе $\Diamond_1$ и $\Diamond_2$ (читај „дијамант-један" и „дијамант-два") као $\Diamond_i\varphi \equiv \neg\Box_i\neg\varphi$.

Тада постоји реченица φ_* у овом бимодалном језику таква да важи:

$$\varphi_* \leftrightarrow (\Box_1(\Diamond_2(\varphi_*)) \wedge \Box_2(\Diamond_1(\varphi_*)))$$

Фиксна тачка представља идеално стабилно стање у дијалогу два система: формулу коју оба система сматрају доказивом **ако и само ако** је други систем такође сматра доказивом.

Доказ постојања.

Доказ 1 (Конструктивни, методом дијагонализације).

Овај доказ проширује стандардну Геделову дијагонализацију на бимодални контекст.

1. **Кодирање и самореференца:** Нека је **SUB(x, y)** функција која представља супституцију у бимодалном језику: **ако** је **x** код формуле са једном слободном променљивом, **онда** је **SUB(x, y)**

код формуле добијене заменом те променљиве кодом **y**. (стандардна техника самореференције у духу Геделове дијагонализације)

2. **Кључна формула:** Размотримо формулу **Ψ(p)** са једном слободном променљивом **p**:
$$\Psi(p) \equiv \Box_1(\Diamond_2(SUB(p, p))) \wedge \Box_2(\Diamond_1(SUB(p, p)))$$
3. **Примена дијагонализације:** Нека је **q** код формуле **Ψ(p).** Нека је φ_* дефинисана као:
$$\varphi_* \equiv \Psi(q) \equiv \Box_1(\Diamond_2(SUB(q, q))) \wedge \Box_2(\Diamond_1(SUB(q, q)))$$

Анализом дефиниције видимо да **SUB(q, q)** даје управо код формуле φ_*. Дакле, имамо:
$$\varphi_* \leftrightarrow \Box_1(\Diamond_2(\varphi_*)) \wedge \Box_2(\Diamond_1(\varphi_*))$$
Ово је тачно жељена фиксна тачка. ■

Доказ 2 (Кроз теорему Кнастер-Тарског).

Овај доказ користи алгебарску аргументацију фиксне тачке.

Алгебарска структура: Размотримо алгебру Линденбаум-Тарског **L** бимодалног система [9]. То је Булова алгебра класа еквиваленције формула **(φ ~ ψ ако и само ако ⊢ φ ↔ ψ)**. (класичан резултат у теорији модалних логика)

1. **Оператор:** Дефинишимо оператор **F: L → L** на следећи начин:
$$F([\varphi]) = [\Box_1(\Diamond_2(\varphi)) \wedge \Box_2(\Diamond_1(\varphi))]$$
где **[φ]** означава класу еквиваленције формуле **φ**.
2. **Монотоност:** Оператор **F** је **монотон** на **L**. Доказ: Ако **[φ] ≤ [ψ] (тј. ⊢ φ → ψ),** онда због нормалности модалних оператора имамо:
$$\vdash \Box_1(\Diamond_2(\varphi)) \rightarrow \Box_1(\Diamond_2(\psi))$$
$$\vdash \Box_2(\Diamond_1(\varphi)) \rightarrow \Box_2(\Diamond_1(\psi))$$
па следи **⊢ F(φ) → F(ψ)**, односно **F([φ]) ≤ F([ψ]).**
3. **Примена теореме Кнастер-Тарског:** Теорема Кнастер-Тарског тврди да ће сваки монотони оператор на комплетној решетки имати фиксну тачку [26]. Алгебра Линденбаум-Тарског [9] је комплетна решетка (инфимум даје коњункција класа, супремум даје дисјункција). Према томе **постоји $[\varphi_*] \in L$ таква да је $F([\varphi_*]) = [\varphi_*]$**.
4. **Експликација:** Из једнакости $F([\varphi_*]) = [\varphi_*]$ следи:
$$[\varphi_*] = [\Box_1(\Diamond_2(\varphi_*)) \wedge \Box_2(\Diamond_1(\varphi_*))]$$
што је еквивалентно тврђењу теореме. ■

Доказ 3 (Кроз бимодалну семантику):

Разматрамо Крипкеов оквир **⟨W, R_1, R_2, V⟩** где:

- **W** је скуп светова (могућих стања)
- **R_1, R_2** су релације приступачности за $\Box_1$ и $\Box_2$
- **V** је валуациона функција

Дефинишимо итеративни оператор **F:** $2^W \rightarrow 2^W$:

$$F(X) = \{w \in W \mid \forall w_1(wR_1w_1 \rightarrow \exists w_2(w_1R_2w_2 \wedge w_2 \in X)) \wedge \forall w_2(wR_2w_2 \rightarrow \exists w_1(w_2R_1w_1 \wedge w_1 \in X))\}$$

Овај оператор је **монотон** на комплетној решетки 2^W.

По теореми Кнастер-Тарског [29], постоји најмања фиксна тачка **X*** таква да **F(X*) = X***.

Свет **w ∈ X*** ако и само ако **w** задовољава услов рефлексивне симетрије из теореме.

Формула **φ*** која важи управо у световима из **X*** је тражена фиксна тачка [24, 29]. ■

Напомена о јединствености:

Потпуна јединственост (све до логичке еквиваленције) не може се гарантовати у општем случају, јер монотон оператор може имати више фиксних тачака. Међутим, теорема Кнастер-Тарског гарантује постојање најмање фиксне тачке и највеће фиксне тачке [26]. У контексту **GH-оквира,** најмања фиксна тачка одговара минималној рефлексивној стабилности која се може конструисати, а највећа фиксна тачка одговара максималној кохерентности.

Напомена о робусности:

Представљена су три **фундаментално различита доказа** постојања фиксне тачке:

Доказ 1 је **синтактички и конструктивни**, директно проширује Геделову дијагонализацију дајући и експлицитну формулу.
Доказ 2 је **алгебарски и семантички;** користи општу теорију решетки, а потпуно је независан од детаља кодирања.
Доказ 3 користи бимодалну семантику.
Њихова комбинација чини резултат изузетно робустним: фиксна тачка постоји као сасвим конкретна синтактичка конструкција, и као алгебарска инваријанта логичке структуре.

5.4 Категоријска интерпретација: Дуалност и превођење

Са категоријског гледишта, **ARC** индукује пар рефлексивних функтора:

$$\mathbf{F: C_1 \leftrightarrows C_2 : G}$$

таквих да **F ⊣ G** и са структуром јединица–којединица

$$\boldsymbol{\eta}\mathbf{: Id_{\{C_1\}} \Rightarrow G \circ F} \text{ и } \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{: F \circ G \Rightarrow Id_{\{C_2\}}},$$

формирајући **дуалну адјункцију** која поштује рефлексивну еквиваленцију.
У овом окружењу, **F** и **G** представљају превођење доказа и пропозиција између категорија (система), а симетрија ове јединице–којединица осигурава да се рефлексија не може свести на извођење. Услов еквилибријума (**F ⊣ G**) моделира епистемичку симетрију постулирану **ARC**: ово превођење допушта контра-превођење које очува структуру, али не и хијерархију.

- **Конструкција категорија доказа:**
  Категорије $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{C_2}$ се могу конструисати прецизно на следећи начин:
  - **Објекти:** Затворене формуле **φ** језика система $\mathbf{T_i}$.
  - **Морфизми:** Морфизам **φ → ψ** постоји ако постоји доказ **π** такав да $\mathbf{T_i \vdash \pi: \varphi \rightarrow \psi}$.
  - **Композиција:** Композиција морфизама одговара спајању доказа.
  - **Функтори:** $\mathbf{F: C_1 \rightarrow C_2}$ дефинисан је на објектима са $\mathbf{F(\varphi) = \Phi_{12}(\varphi)}$ (преведена формула), а на морфизмима са **F(π) = доказ преведеног аргумента**.

Теорема 5.4 (Својства категоријске адјункције за GH-пар).
Нека су $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{C_2}$ категорије доказа за системе $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ који чине **GH-пар**, и нека су $\mathbf{F: C_1 \rightarrow C_2}$ и $\mathbf{G: C_2 \rightarrow C_1}$ функтори дефинисани преко конструктивних превода **ARC**. Даље, а**ко F** и **G** формирају адјункцију **F ⊣ G** са јединицом **η** и којединицом **ε**, **онда** важе следећа својства:

- **Јединица η није изоморфизам:** За сваки објекат **φ** у $\mathbf{C_1}$, морфизам $\boldsymbol{\eta_\varphi}\mathbf{: \varphi \rightarrow G(F(\varphi))}$ је **мономорфизам**, али **није епиморфизам**.
- **Којединица ε није изоморфизам:** За сваки објекат **ψ** у $\mathbf{C_2}$, морфизам $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}\mathbf{: F(G(\psi)) \rightarrow \psi}$ јесте **епиморфизам**, али **није мономорфизам**.
- **Ограничена еквиваленција:** Композиције **G∘F** и **F∘G** су **рефлектори** (идемпотентни ендофунктори са природном трансформацијом у идентитет), али **нису еквиваленције категорија која би била потпуна**.

Доказ.
Претходна напомена: У категорији доказа **C**, морфизам **α: A → B** је:

- **Мономорфизам** ако за све парове морфизама **β, γ: X → A** важи: $\boldsymbol{\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma}$.
- **Епиморфизам** ако за све парове морфизама **β, γ: B → X** важи: $\boldsymbol{\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma}$. Контексти теорије доказа, показују да ово одговара инјективности и сурјективности на скупу доказа.

Доказ за својство 1 (Јединица η није изоморфизам).
Доказ 1 (Семантички, кроз ограниченост знања):

- $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ **је мономорфизам:** Нека су **β, γ: θ → φ** два морфизма таква да $\boldsymbol{\eta_\varphi \circ \beta = \eta_\varphi \circ \gamma}$. То значи да су и докази за **β** и **γ**, када су композирани са преводом $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ (који пресликава **φ** у **G(F(φ))**), дали овај исти доказ. Пошто превод **F** (и имплицитно **G**) чува структуру овог доказа (услов **ARC**), а ово и имплицира да **β** и **γ** сами морају бити исти докази у $\mathbf{C_1}$. Дакле, **β = γ**, па је $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ мономорфизам.
- $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ **није епиморфизам:** Претпоставимо супротно, да је $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ епиморфизам. То би значило да је за сваки морфизам **δ: G(F(φ)) → ψ** постоји морфизам **ζ: φ → ψ** такав да $\boldsymbol{\delta = G(F(\zeta)) \circ \eta_\varphi}$. У овим терминима доказа, ово би значило да се сваки доказ, онај који користи рефлектовану формулу

G(F(φ)) може редуковати на доказ који користи оригиналну формулу **φ**. Ово би имплицирало и да теорија $\mathbf{T_1}$ може **потпуно повратити сав семантички садржај** своје рефлексије у $\mathbf{T_2}$ – то је у супротности са условом **неинвертибилности** из **ARC**. И конкретно, **ако** је $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ епимпрфизам, **онда** би превод **G∘F** био „пуна" интерпретација, што би дозволило $\mathbf{T_1}$ да потпуно интерпретира $\mathbf{T_2}$**,** рушећи симетрију **GH-пара**. ■

Доказ 2 (Синтактички, кроз постојање недоказивих рефлексија):

Конструишимо експлицитан контрапример. Нека је **φ** нека теорема у $\mathbf{T_1}$ таква да рефлексија **F(φ)** у $\mathbf{T_2}$ захтева доказ који користи ресурсе недоступне у $\mathbf{T_1}$ (што управо и постоји због ортогоналности изражајности). Тада постоји морфизам (доказ) $\boldsymbol{\delta}$**: G(F(φ)) → ψ** у $\mathbf{C_1}$ за неки **ψ**, такав да не постоји ни доказ $\boldsymbol{\zeta}$**: φ → ψ** који би га „факторизовао" кроз $\boldsymbol{\eta_\varphi}$. Ово директно показује да $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ није епи. ■

Доказ 3 (Кроз губитак информације у преводу):

Посматрајмо конкретан пример. Нека **φ** буде аритметичка формула у $\mathbf{T_1}$.

F(φ) преводи **φ** у одговарајућу структуру у $\mathbf{T_2}$, а **G(F(φ))** враћа ову структуру назад у језик $\mathbf{T_1}$.

У овом процесу, оригинални доказ **φ** у $\mathbf{T_1}$ постаје доказ у $\mathbf{T_2}$, па опет доказ у $\mathbf{T_1}$ - али овога пута је то са „траговима" $\mathbf{T_2}$-структуре уграђеним у њега.

G(F(φ)) није идентичан са **φ** - он садржи додатну структурну информацију о томе како $\mathbf{T_2}$ „види" **φ**.

Постоје још неки морфизми $\boldsymbol{\delta}$**: G(F(φ)) → ψ** који користе ову додатну информацију и који се не могу факторизовати кроз $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ (не постоји $\boldsymbol{\zeta}$**: φ → ψ** такав да $\boldsymbol{\delta = \zeta \circ \eta_\varphi}$).

Дакле $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ мапира **φ** у нетривијално проширење, што искључује епи својство [2, 21]. ■

Доказ за својство 2 (Којединица ε није изоморфизам).

Доказ симетричан својству 1:

- $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ **је епиморфизам:** Ово следи из универзалног својства којединице за адјункцију. Ту за било који морфизам $\boldsymbol{\zeta}$**: F(G(ψ)) → χ,** постоји јединствен морфизам $\boldsymbol{\theta}$**: ψ → χ** такав да $\boldsymbol{\zeta = \varepsilon_\psi \circ \theta}$**,** а то је дефинишуће својство епиморфизма.
- $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ **није мономорфизам:** Ако би $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ био мономорфизам, то би значило да различити докази у домену **F(G(ψ))** остају различити након примене $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$. Међутим, услов неинвертибилности, из **ARC,** гарантује да превод **G** (а тиме и **F∘G**) **губи информацију**: постоје различити докази у $\mathbf{C_2}$ који, када се преведу у $\mathbf{C_1}$ и назад, постају једнаки. Постоје морфизми $\boldsymbol{\beta, \gamma}$**: θ → F(G(ψ))** такви да је $\boldsymbol{\beta \neq \gamma}$, али и $\boldsymbol{\varepsilon_\psi \circ \beta = \varepsilon_\psi \circ \gamma}$. Ово показује да $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ није мономорфизам. ■

Доказ 2 (Кроз губитак оригиналне информације):

Нека $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$**: F(G(ψ)) → ψ** буде којединица за формулу **ψ** у $\mathbf{C_2}$.

Ако би $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ био изоморфизам, различити извори у **F(G(ψ))** морали би се даље пресликати у различите морфизме који воде до **ψ**.

Међутим, овај превод **G** из $\mathbf{T_2}$ у $\mathbf{T_1}$ могао би „колапсирати" различите $\mathbf{T_2}$-структуре у еквивалентне $\mathbf{T_1}$-структуре (губитак изражајне моћи услед ограничења језика $\mathbf{T_1}$).

Када се те колабиране структуре преведу назад преко **F**, добијамо **F(G(ψ))** са „спојеним" изворима - а различити докази у $\mathbf{T_2}$ који су прошли кроз **G** више нису разликујући.

$\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ пројектује те спојене изворе назад на **ψ**, што значи да различити морфизми $\boldsymbol{\beta, \gamma}$**: θ → F(G(ψ))** могу дати исту композицију: $\boldsymbol{\varepsilon_\psi \circ \beta = \varepsilon_\psi \circ \gamma}$ иако је $\boldsymbol{\beta \neq \gamma}$.

Дакле $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ је сурјективан (епиморфизам) али не и инјективан (мономорфизам) [2, 21]. ■

Доказ 3 (Кроз kernel структуру):

У категоријском језику, **kernel** морфизма $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ представља оне морфизме у **F(G(ψ))** који се, након ове композиције са $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$, пресликавају у идентитет на **ψ**.

Формално, то су парови морфизама $\boldsymbol{\beta, \gamma}$**: θ → F(G(ψ))** такви да $\boldsymbol{\varepsilon_\psi \circ \beta = \varepsilon_\psi \circ \gamma}$.

Ако би $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ био изоморфизам (тј. мономорфизам), **онда** би и тај kernel морао бити тривијални као - самоидентитет. Међутим, услов неинвертибилости из **ARC** гарантује да постоје нетривијални

морфизми у **F(G(ψ))** који потичу из различитих $\mathbf{T_1}$-доказних путања, које ни $\mathbf{T_2}$ не може разликовати након што се преведу назад.
Конкретно, **ако** $\mathbf{T_1}$ има доказну структуру недоступну у $\mathbf{T_2}$ (ортогоналност изражајности), **онда** неки различити докази који користе ту структуру постају неразликујући након циклуса **G** па **F**.
Ови морфизми формирају нетривијални kernel, што искључује мономорфизам својство за $\boldsymbol{\varepsilon_\psi}$ [2, 18, 22, 27]. ■

Доказ за својство 3 (Ограничена еквиваленција).
Доказ 1 (Кроз особине јединице и којединице):

- **G∘F је рефлектор:** То је директна последица дефиниције адјункције. Јединица $\boldsymbol{\eta: Id_{C^1} \rightarrow G \circ F}$ задовољава једнакост $\boldsymbol{(G \circ F)(\eta_\varphi) \circ \eta_{\{G(F(\varphi))\}} = id_{\{G(F(\varphi))\}}}$ за сваки **φ**, што је услов за рефлектор.
- **G∘F није еквиваленција:** За еквиваленцију категорија потребно је да су **η** и **ε** изоморфизми. Већ смо доказали да **η** није епиморфизам (па самим тим није изоморфизам). Дакле, **G∘F** није еквиваленција.

Симетрично, **F∘G је рефлектор** (корефлектор) али није еквиваленција јер **ε** није мономорфизам. ■

Доказ 2 (Кроз prf-theoretic ординале):
Нека су $\mathbf{|C_1|}$ и $\mathbf{|C_2|}$ неке мере сложености доказа (нпр. prf-theoretic ординали придружених теорија). Ако би **G∘F** била еквиваленција категорија, онда би $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{C_2}$ били изоморфни као категорије, што би имплицирало $\mathbf{|C_1| = |C_2|}$**.** Међутим, из услова **GH-пара** и **ARC** произилази да системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ имају **упоредиве, али не и идентичне** дедуктивне снаге (ниједна не доминира другом, али су различите). Ова разлика у снази водиће структури категорија, искључујући могућност потпуне еквиваленције. ■

Доказ 3 (Кроз fixed point карактеризацију):
Композиција **G∘F:** $\mathbf{C_1 \rightarrow C_1}$ може се посматрати као ендофунктор на категорији $\mathbf{C_1}$.
Фиксне тачке **G∘F** одговарају заједничком језгру $\mathbf{O(T_1, T_2)}$ из претходних секција овог рада.
Ако би **G∘F** била еквиваленција категорија (тј. део пара функтора који успостављају изоморфизам категорија), **онда** би сваки објекат **φ** морао бити изоморфан својој слици: **G(F(φ)) ≅ φ**.
То би значило да је јединица $\boldsymbol{\eta_\varphi}$**: φ → G(F(φ))** изоморфизам за све **φ**.
Али по Својству 1, $\boldsymbol{\eta_\varphi}$ је мономорфизам али не и епиморфизам - дакле није изоморфизам.
Следи да постоје објекти који нису фиксне тачке **G∘F** функтора.
G∘F поседује **неке** фиксне тачке - оне формуле које припадају преклапању $\mathbf{O(T_1, T_2)}$ из Критеријума 3.1.2, где оба система имају идентичну изражајну моћ.
Али пошто $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ имају ортогоналне изражајне моћи, скуп $\mathbf{O(T_1, T_2)}$ је прави подскуп од $\mathbf{C_1}$, а то значи да **G∘F** није еквиваленција - то је рефлектор који „фиксира" само заједничко језгро [2, 21]. ■

Импликација: Ова три својства формализују суштину **GH-симетрије:**

1. **η је мономорфизам** = Свако знање из $\mathbf{T_1}$ може се сигурно уградити у рефлексију кроз $\mathbf{T_2}$**.**
2. **η није епиморфизам** = Рефлексија кроз $\mathbf{T_2}$ носи **вишак информације** које $\mathbf{T_1}$ не може сасвим да рекупира.
3. **ε је епиморфизам** = Свако знање из рефлексије може се пројектовати назад.
4. **ε није мономорфизам** = При пројекцији се **губи информација** о пореклу доказа.
5. **Ограничена еквиваленција** = Системи су у вези која **није редукција**, већ јесте **кохерентна интеракција**.

Напомена о робусности: Свако својство је доказано са **најмање два аргумента**:

- **Својство 1: Семантички (кроз ARC) + Синтактички (контрапример)**
- **Својство 2: Директан аргумент симетрије + Контрапример из ARC**
- **Својство 3: Категоријски + prf-theoretic**

Сва три приступа (семантички, синтактички, **prf-theoretic**) конвергирају ка једном закључку, а то показује да категоријска интерпретација није артефакт једне технике већ је инваријанта **GH-оквира**.
Философски, ово категоријско читање уједињује формално и концептуално: оно сугерише да се сама логичка дуалност може разумети као категоријска инваријанта рационалне рефлексије — структура у којој кохерентност замењује редукцију, а реципрочност замењује утемељење.

5.5 Илустрација семантичког и категоријског модела на примерима

Пример 5.5.1 ($PA_{(слаба)}$-$GEO_{(дискретна)}$).

За овај пар:

- **Бимодални оквир:** $\Box_1$ је „доказиво у $PA_{(слаба)}$ “, $\Box_2$ је „конструктивно у $GEO_{(дискретна)}$“. Релације приступачности R_1 и R_2 повезују аритметичке и геометријске моделе.
- **Фиксна тачка φ*:** Може бити формула типа „сваки коначан геометријски објекат може бити координатизован“ која је стабилна **ако и само ако** је међусобно оправдана у једном систему и то једино преко доказивости у другом. (дато као илустрација)
- **Категорије:** C_1 је категорија аритметичких доказа са индукцијом ограниченом на Δ_0 формуле, C_2 је категорија коначних геометријских конструкција. Функтор **F** овде преводи аритметички доказ у геометријску конструкцију преко координатних система.

Пример 5.5.2 (ZF-CAT).

За овај пар:

- **Бимодални оквир:** $\Box_1$ је „доказиво у **ZF**“, $\Box_2$ је „доказиво у **CAT**“. R_1 повезује **ZF**-моделе са категоријама скупова; R_2 повезује категорије са **ZF**-моделима преко Yoneda-уграђивања.
- **Фиксна тачка ψ*:** Формула „свака мала категорија има скелет“, која је тачна **ако и само ако** је доказива у **ZF** преко категоријских алата и обрнуто [29].
- **Категорије:** C_1 је категорија **ZF**-доказа; C_2 је категорија категоријских доказа. Адјункција $F \dashv G$ одговара конструкцији категорије скупова из **ZF,** па и конструкцији **ZF**-модела из категорије скупова.

Закључак: Семантички и категоријски модели пружају моћне алате за визуелизацију и анализу **GH-симетрије**, показујући како се апстрактни принципи материјализују у конкретним математичким доменима.

6. ИНТЕРПРЕТАБИЛНОСТ И КОХЕРЕНТНОСТ

У овом поглављу коначно напуштамо оно традиционално хијерархијско схватање логичких система. Уводимо концепт рефлексивне интерпретабилности, који уместо вертикалног подређивања слабије теорије јачој, успоставља хоризонтални еквилибријум. Овде се кохерентност не посматра само као интерно својство изолованог система, већ као динамички квалитет мреже која почива на узајамној рефлексији и **Гедел–Хилбертовом принципу кохерентности (GHPK).**

6.1 Интерпретабилност изван редукције

У **GH-оквиру**, интерпретабилност сасвим престаје бити релација доминације или садржања. Теорија доказа, она традиционална, замишља интерпретабилност као редукцију: јачи систем T_1 интерпретира слабији T_2, објашњавајући га унутар своје сопствене синтаксе. Ипак, под **Аксиомом рефлексивне конструктивности (ARC)**, интерпретабилност овде постаје **рефлексивна пројекција** — релација која очувава независност истовремено омогућавајући комуникацију.

Формално, за системе T_1 и T_2 дефинишемо рефлексивну интерпретабилност као:

$T_1 \models_{ARC} T_2 \Leftrightarrow \exists f: Th(T_2) \to Th(T_1)$ **такво да за свако** $\varphi \in Th(T_2)$ **важи** $f(\varphi) \in J(T_1, T_2)$, где је **J** дефинисан у Теореми 5.2 независно од **f,** а **f** је конструктивно пресликавање које чува допуштеност, али не мора бити тотално.

Овде **f** није превођење Тарског већ **рефлексивно уграђивање** — и то као пресликавање које очувава допуштеност уместо изводљивости. Интерпретабилност дакле постаје не релација поретка (> или ≥), већ релација равнотеже ($\approx_{(ARC)}$). Геделова хијерархијска кула теорија [12, 13] замењена је равни епистемичке симетрије, где узајамна кохерентност замењује унилатералну редукцију.

Пример 6.1 (Рефлексивно уграђивање за $PA_{(слаба)}$-$GEO_{(дискретна)}$).

За овај пар, рефлексивно уграђивање $f: Th(GEO_{(дискретна)}) \to Th(PA_{(слаба)})$ функционише тако да:

- Узима геометријску тврдњу „тачке **A, B, C** су колинеарне".
- Преводи је у аритметичку тврдњу о детерминанти координата:

  „det([[x_A, y_A, 1],[x_B, y_B,1],[x_C, y_C,1]]) = 0".
- Резултат **f(φ)** припада **J(PA,GEO)** јер је стабилан под оба система: $PA_{(слаба)}$ овде доказује ову

детерминантну форму, а $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$ доказује одговарања базној геометријској чињеници.
Супротност са превођењем Тарског: Пуно превођење Тарског би захтевало и да $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ докаже све теореме геометрије, укључујући и оне које зависе од аксиоме паралелности у пуном облику [27]. Али наш **f** преводи само оне геометријске исказе који имају коначне, конструктивне доказе – што је управо домен **J(PA,GEO)**.

6.2 Критеријум кохерентности

Ако је интерпретабилност везивно ткиво међу системима, кохерентност је услов њене стабилности. Дефинишемо **Логички услов кохерентности (LUK)** као:

$$\mathbf{LUK}(T_1, T_2) \Leftrightarrow \forall \varphi\, (\varphi \in J(T_1, T_2) \Rightarrow (\mathbf{Con}^{\{fin\}}_{\{T_1\}}(\varphi) \wedge \mathbf{Con}^{\{fin\}}_{\{T_2\}}(\varphi))).$$

Где $\mathbf{Con}^{\{fin\}}_{\{T\}}(\varphi)$ означава финитарну неконтрадикторност формуле **φ** у систему **T (**Дефиниција 2.1.2).
Сваки исказ који је заједнички оправдан под **ARC** мора остати интерно конзистентан у оба система. То је захтев двоструке конзистентности који спречава **укрштену неконзистентност,** такве случајеве када рефлексивна валидација једног система изазива неконзистентност другог. Овај **LUK** проширује Хилбертов идеал конзистентности у двосмерну топологију: не апсолутна стабилност унутар једног универзума, већ релативна стабилност кроз рефлексију. Он резонира са Феферманом (1960) идејом генерализоване конзистентности [9], идејом у којој се истина одржава релативно на метатеоријска ограничења која су заједничка.
Провера LUK-а за предложене GH-парове:
За ($\mathbf{PA_{(слаба)}}$, $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$):
Нека је **φ ∈ J(PA,GEO)**.
По дефиницији, $\mathbf{PA_{(слаба)}} \vdash \mathbf{Sound}_{\{\mathbf{GEO}_{(дискретна)}\}}(\varphi)$ и $\mathbf{GEO_{(дискретна)}} \vdash \mathbf{Sound}_{\{\mathbf{PA}_{(слаба)}\}}(\varphi)$. Да бисмо проверили **LUK**, морамо показати да **φ** остаје конзистентан у оба система. **Ако** би овај **φ** био неконзистентан у $\mathbf{PA_{(слаба)}}$, **онда** би $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ доказала **¬φ**, али такође и $\mathbf{Sound}_{\{\mathbf{GEO}\}}(\varphi)$, што би даље имплицирало да $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ доказује контрадикцију о геометрији, кршећи услов **GH-пара**. Аналоган аргумент важи за $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$.
За (ZF, CAT):
Слично, **ако ψ ∈ J(ZF, CAT)**, **онда** оба система препознају валидност у оквиру оног другог.
Неконзистентност у једном систему имплицира да овај систем доказује контрадикцију у структурама другог система, што би нарушило услов симетричне допуштености **ARC**.
Закључак: LUK није додатни постулат, већ **логичка последица** услова **GH-пара** и **ARC**. Он делује као **аутоматски стабилизатор** рефлексивне мреже.
Философски, **LUK** помера потрагу за сигурношћу у потрагу за **кохерентношћу:** истина настаје не из крајњег заснивања, већ из динамичког еквилибријума између међусобно рефлексивних структура.

6.3 Гедел–Хилбертов принцип кохерентности (GHPK)

Из **LUK** генерализујемо на метатеоријски закон над мрежама система. Нека дато $\mathbf{T} = \{\mathbf{T_i}\}_{\{i \in I\}}$ буде породица рекурзивно аксиоматизабилних, конзистентних теорија. Онда **Гедел–Хилбертов принцип кохерентности (GHPK)** тврди:

$$\mathbf{GHPK(T)} \Leftrightarrow \forall (T_i, T_j) \in T \times T,\ i \neq j,\ \mathbf{LUK}(T_i, T_j).$$

Колекција система дакле формира **кохерентну рефлексивну мрежу ако и само ако** сваки пар мреже задовољава **LUK** под **ARC**.
Текстуално-графичка репрезентација кохерентне мреже:
За породицу **T = {Аритметика, Геометрија, Теорија скупова, Теорија категорија}**, **GHPK** онда дефинише мрежу где сваки чвор (теорија) може да рефлектује конзистентност суседних чворова:

Аритметика ---(рефлектује)---> Геометрија
^ ^
| |
(рефлектује) (рефлектује)
| |
v v
Теорија скупова <---(рефлектује)--- Теорија категорија

Стрелице означавају рефлексивну допуштеност, а не редукцију. Мрежа није хијерархијска; ниједан чвор није ни „испод" ни „изнад" другог. Уместо тога, настаје кохерентност и то из **затворене петље међусобне рефлексије**.

Поређење са постојећим концептима:

- **Феферманове рефлексивне хијерархије [**9]: Вертикалне, бесконачне, али увек са све јачим мета-теоријама.
- **GH мрежа:** Хоризонтална, коначна (или коначно генерисана), са теоријама упоредиве снаге.
- **Теорија интерпретабилности** [29]: Обично ствара парцијално уређење; **GHPK** ствара **граф кохерентности** где су везе симетричне у смислу рефлексивне допуштености.

Категоријски, ово даје рефлексивну 2-категорију чији су морфизми трансформације које и очувавају кохерентност. **GHPK** генерализује Геделову непотпуност [12]: док ниједан од појединачних система не може самоутемељити истину, мрежа ових система може постићи стабилност кроз реципрочну допуштеност. Хилбертов захтев за доказом и Геделов доказ ограничења конвергирају у синтези где конзистентност постаје дијалошка инваријанта уместо монолошког својства. Стога се истина, једном померена из основа, поново појављује у **релацијама** међу тим основама.

6.4 Философске импликације

Под **GHPK**, математика постаје **рефлексивна екологија** уместо монолитног објекта. Сваки систем заузима чвор у кохерентној мрежи стабилизованој не ауторитетом већ реципроцитетом сопствене транспарентности. **ARC** и **GHPK** заједно остварују прелазак од фундаментализма ка **кохерентном реализму** — очувавајући Хилбертову ригорозност док асимилују Геделов увид у своје структурно ограничење.

Философски исход је двострук:

1. **Епистемичка децентрализација** — Истина настаје не из привилеговане тачке гледишта већ из пресека кохерентних погледа.
2. **Рефлексивни интегритет** — Правданост остаје одржива само онда када се самоогледа преко компатибилних, независних оквира.

Ово се поклапа са модерним епистемичким плурализмом: математика није „непотпуна“, не у смислу мањка, већ **рефлексивно отворена** — еволуирајући дијалог међу конзистентним инференцијалним архитектурама. Како је Феферман (1998) приметио [10], принципи рефлексије већ упућују изван тог формализма ка валидности вишег реда; **GHPK** даје тој интуицији формалну структуру, утемељујући валидност у кохерентности релација уместо у потпуности система.

Практичне импликације GH оквира:

1. **За математичку праксу:** Уместо трагања за јединственом „исправном" основом, потоњи би истраживачи могли експлицитно конструисати **парове или мреже теорија** које заједно даље осигуравају кохерентност. Ово је нарочито корисно у областима као што су:
2. **Компјутерско верификоване формализације:** Где различити системи као **Coq, Agda, Lean** [6] могу се повезати као **GH-парови** [7] да би се осигурала њихова узајамна конзистентност.
3. **Интердисциплинарна математика:** Где се резултати из алгебре, анализе и топологије могу узајамно валидирати без потпуног свођења на један језик.
4. **За филозофију математике: GH-оквир** нуди трећи пут између:
   - **Фундаментализма:** (трагање за крајњом основом)
   - **Плурализма:** (прихватање непотпуних, изолованих система)
   - **Кохерентног реализма:** (системи су реални кроз своје стабилне односе)
5. **За будући развој логике:** Отварају се нови правци истраживања:
   - **Класификација GH-пара** преко инваријанти (као $\boldsymbol{\sigma(T_1,T_2)}$ из Дефиниције 2.1.3).
   - **Конструкција GH-мрежа** са жељеним својствима (нпр. отпорност на одређене врсте парадокса).
   - **Проучавање динамике** кохерентних мрежа под додавањем нових теорија.

Коначни закључак: Гедел–Хилбертов оквир не представља крај истраживања основа математике, већ **промену парадигме** – од питања „На чему се темељи математика?" ка питању „Како различити математички светови могу да се одржавају у кохерентном дијалогу?"

Дакле, **кохерентност** замењује сигурност као модерни наследник Хилбертовог идеала.

---

7. ОТВОРЕНИ ПРОБЛЕМИ И ПЕРСПЕКТИВЕ

Након успостављања теоријске основе, неопходно је размотрити даље правце развоја. Сваки оквир, па тако и Гедел–Хилбертов, мора проћи кроз тест конструктивног остварења. Ово се поглавље бави идентификацијом кључних изазова који стоје на путу формализације **ARC** и **GHPK** принципа. Зато истражујемо могућности имплементације у асистентима доказа, као и нека семантичка проширења ка категоријским и модалним структурама. Коначно, скицирамо неку будућу истраживачку агенду која повезује логику са широм епистемичком екологијом.

7.1 Формални изазови

Успоставивши логичку топологију узајамне правданости кроз успостављање **Аксиоме рефлексивне конструктивности (ARC)** и **Гедел–Хилбертовог принципа кохерентности (GHPK)**, оквир се сада суочава са својим најважнијим задатком: **конструктивним остварењем** — идентификовањем ових експлицитних инстанци **GH-пара** који задовољавају **ARC** под формалним ограничењима.

Два испреплетена проблема дефинишу ову границу:

1. **Постојање:** Да ли се пар формалних система $(\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})$ може експлицитно конструисати тако да сваки валидира исправност другог под **ARC** без кршења непотпуности?
2. **Верификација:** Да ли се такве конфигурације могу репрезентовати и проверавати у реалним асистентима доказа као **Lean** или **Coq** [6], пружајући рачунарски доказ своје рефлексивне кохерентности?

Конкретни кораци за истраживање постојања (Проблем 1):

1. **Формализација слабих фрагмената:** Експлицитно дефинисати системе као што су $\mathbf{PA}_{(\text{слаба})}$ и $\mathbf{GEO}_{(\text{дискретна})}$ њиховим аксиомама и ограничењима (нпр. **PA** али са индукцијом само за $\mathbf{\Delta_0}$ формуле, **GEO** са аксиомом о коначној дељивости сегмената).
2. **Конструкција пресликавања Ф:** Дефинисати примитивно рекурзивне функције за мапирање кодова доказа, нпр.:
   - $\mathbf{\Phi}_{\{\mathbf{PRA}\to\mathbf{GEO}\}}$**:** Доказ аритметичке рекурзије → геометријска конструкција индуктивног корака.
   - $\mathbf{\Phi}_{\{\mathbf{GEO}\to\mathbf{PRA}\}}$**:** Геометријски доказ о сличности троуглова → аритметичка провера датих пропорција.
3. **Доказ критеријума ARC:** Формално доказати да ова пресликавања задовољавају све услове из Дефиниције 4.1.1, посебно **неинвертибилност**.

Конкретни кораци за верификацију (Проблем 2):

1. **Изазов верификације:** Главни изазов у асистентима доказа, **приказ финитарне рефлексије** без потпуног закључивања. Може се приступити на два начина:
2. **Аксиоматски:** Увести $\mathbf{Con}_{\{\mathbf{T}_2\}}(\mathbf{T}_1)$ као примитивну аксиому у $\mathbf{T_1}$, али са потпуним доказом њене кохерентности у мета-логици асистента.
3. **Симулирајући:** Симулирати само коначан део доказа другог система, што захтева потпуно експлицитно ограничење дубине претраге (параметар **N**).

Док **GH-оквир** у принципу искључује контрадикцију, његова конкретна инстанцација ће захтевати деликатни еквилибријум између интерпретабилности, конзистентности и изражајног опсега. Овде је отворени изазов да се рефлексивна изводљивост трансформише у **рефлексивну конструктивност** — и да се ова тврдња тестира у верификованим рачунарским окружењима која сама поштују границе непотпуности и да се ова трансформација експлицитно формализује у доказним асистентима.

7.2 Семантичка проширења

Ако **ARC** даје логички облик рефлексивне симетрије, тад њена семантика остаје продубљена дуж две главне линије.

(1) Модални пут. Модална интерпретација (из Поглавља 5) може еволуирати у потпуну **бимодалну логику рефлексије**, где доказивост и допуштеност делују као дуалне модалности:

$$\Box_1\varphi \leftrightarrow \Diamond_2\varphi \text{ и } \Box_2\varphi \leftrightarrow \Diamond_1\varphi.$$

(**GH-услов** бимодалне симетрије)

Потпуност, одлучивост и теорија каноничког модела таквог система остају отворени проблеми који позивају на систематско истраживање.

(2) Категоријски пут. Категоријска интерпретација **ARC** сама сугерише **рефлексивну 2-категорију** система у којој кохерентност, уместо хијерархије, служи као централна инваријанта. У овом погледу, **GH-релација** би могла да одговара адјунктним функторима (**F ⊣ G**) који задовољавају билатерална ограничења кохерентности. Даља студија може открити везе са **топосима, теоријом дуалности и квантним категоријама** — доменима где симетрија и комплементарност играју формално аналогне улоге.

Директне везе са постојећим истраживањима:

1. **Топоси:** Теорија **топоса** нуди природан оквир за изучавање интерне логике категорија. **GH-пар (ZF, CAT)** би могао бити проучаван кроз **Set** топос (за **ZF**) и топос теорију (за **CAT**). Симетрија би се још могла изразити као г**еоморфизми** између ова два топоса.
2. **Квантум категорије и комплементарност:** Дуалност у квантној механици (као нпр. положај/ импулс) формализује се кроз **некомутативне структуре**. Аналогија са **GH-паровима** ту јасно сугерише да се логичка комплементарност може сасвим формализовати као **неинвертибилна дуалност** у одговарајућој категорији.
3. **Логичка топологија:** Појам **рефлексивне границе B(T_1,T_2)** (из 3.2) може се формализовати тополошким појмовима као што су **границе отворених скупова** у, за ту сврху, одговарајућим Линденбаум-Тарски алгебрама [9].

Конкретан истраживачки задатак: Конструисати **2-категорију** чији су:

- **0-објекти:** Формални системи.
- **1-морфизми:** Рефлексивна пресликавања (удовољавајућа **ARC**).
- **2-морфизми:** Трансформације између пресликавања које очувавају кохерентност.

7.3 Философска питања

Философски домет **GH-оквира** се протеже далеко изван математичких основа. Ако су **ARC** и **GHРК** исправни, истина престаје да припада изолованим системима. Постаје својство **релација** међу њима. Ово померање од супстанце ка структури редефинише истину као динамички еквилибријум, уместо као непромењиву константу.

Три међусобно повезана питања следе:

1. **Рефлексивни реализам:** Да ли би се ова интер-системска истина могла сматрати објективно реалном, или је везана за епистемичку приступачност?
2. **Границе рефлексије:** Ако кохерентност зависи од итеративне рефлексије, да ли и бесконачна хијерархија колабира у регрес или се стабилизује на мета-фиксној тачки?
3. **Епистемичка екологија:** Шта свет вишеструких, кохерентно интерагућих логичких система имплицира за рационалност и знање?

Предложени оквири за истраживање ових питања:

1. **За рефлексивни реализам:**
   - **Мисаони експеримент:** Претпоставимо да откријемо икаква два физичка система, два рачунара, која имплементирају **$PA_{(слаба)}$** и **$GEO_{(дискретна)}$** успешно проверавајући и конзистентност између ова два система. Да ли је та њихова заједничка конзистентност **објективно својство** њихове интеракције, или је само **епистемичка појава** за нас као посматраче?
   - **Веза са структурним реализмом: GH-оквир** може се такође видети и као **логички структурни реализам** – оно што је реално је структура рефлексивних односа, а не сами системи.
2. **За границе рефлексије:**
   - **Итерација ARC:** Шта се дешава ако применимо **ARC** на саме **GH-парове**? Односно, шта ако имамо парове **(T_1,T_2)** и **(T_2,T_3)**, да ли можемо добити **(T_1,T_3)** као некакав „индиректни" **GH-пар**? То отвара питање **транзитивности** и могућег стварања **мрежа**.
   - **Фиксна тачка хијерархије:** Може ли бесконачна хијерархија рефлексије **GH(T_1,T_2), GH (T_2,T_3), ...** да се стабилизује на неком нивоу где је **$T_2 \approx T_1$**? То би даље указало на **цикличну кохерентност** уместо линеарног регреса.
3. **За епистемичку екологију:**

- **Модел колективне интелигенције: GH-мрежа** може нам послужити као једноставан модел за разумевање како би различити агенси са непотпуним, али комплементарним, знањем могли постићи колективну кохерентност.
- **Импликације за епистемичку скромност: GH-оквир** формализује идеју да је много рационалнње признати сопствена ограничења, али увек са ослонцем на **епистемички комплемент**.

Ова питања померају **GH-програм** ка општој философији рефлексивних система са импликацијама за епистемологију, метафизику и когнитивну науку.

7.4 Будући правци

Гедел–Хилбертов оквир [7] отвара трајну истраживачку агенду у математици, философији, логици. Три главне трајекторије изгледају посебно обећавајуће:

1. **Формални пут – Ка верификованим GH-конструкцијама**
   Будући рад може тежити да изгради и верификује конкретне **GH-парове** у датим окружењима асистената доказа. Таква формализација би и додатно показала интерну конзистентност **ARC-симетрије** и утемељила је у рачунарској верификацији, премошћујући јаз између философске могућности и конструктивног остварења.
   • **Конкретни пројекти:**
   - **Пројекат 1**: Формализација $\mathbf{PA_{(слаба)}\text{-}GEO_{(дискретна)}}$ пара у **Lean 4** и свим доказаним ограничењима индукције и геометријских аксиома.
   - **Пројекат 2:** Развијање библиотеке за **GH-парове** у **Coq**, која би онда омогућила и лако спајање две постојеће формализације кроз рефлексивне функторе.
   - **Мета-циљ:** Добити потврду кохерентности од асистената доказа за конкретан **GH-пар**.
2. **Семантички пут – Категоријска и модална остварења**
   Богатија категоријска и модална семантика вероватно би могла повезати рефлексивну логику са теоријом дуалности, логичком топологијом и оквирима квантне информације, позиционира **GH-модел** као мост између теорије доказа и математике симетрије.
   • **Конкретни пројекти:**
   - **Пројекат 1:** Конструкција **бимодалне логике рефлексије (BMLR)**, као и доказ њене потпуности у односу на класу Крипкеових оквира [24] са две симетричне релације.
   - **Пројекат 2:** Проучавање неких веза између **GH-адјункција** и **Доплерових дуалности** у теорији категорија, са потенцијалним апликацијама у унификацији ових алгебарских и геометријских метода [5, 20].
   - **Мета-циљ:** Можда објавити монографију *Категорије и рефлексивна симетрија*.
3. **Философски пут – Рефлексивни реализам и епистемичка екологија**
   Философска трајекторија **GH-програма** даље упућује и ка **рефлексивном реализму:** истини као кохерентности унутар екологије формалних система. Ово редефинише и реализам, не као метафизички апсолутизам већ као стабилност рефлексивних односа датих преко рационалних оквира — помирујући Хилбертов конструктивни идеал са Геделовим рефлексивним увидом.
   • **Конкретни пројекти:**
   - **Пројекат 1:** Организација интердисциплинарног колоквијума „Рефлексивни реализам: од математике до когнитивних наука".
   - **Пројекат 2:** Развој **епистемичког мета-језика** за описивање односа међу тим научним теоријама, инспирисаног **GH-оквиром**.
   - **Мета-циљ:** Успоставити „рефлексивну епистемологију" као препознатљиву.

7.5 Краткорочни кораци и интердисциплинарни мостови

Да би се **GH-оквир** учинио оперативним, предлажу се следећи **краткорочни кораци (1-2 године):**

1. **Стандардизација терминологије:** Успоставити потпуно јасне дефиниције за кључне појмове (**GH-пар, ARC, LUK, GHPK**) у форми референтног документа.
2. **Изградња заједнице:** Оснивање отворене истраживачке групе или семинара фокусираног на рефлексивне основе.
3. **Интердисциплинарни мостови:**
   • **Са теоријом сложености:** Проучавање **ресурсне сложености** рефлексивних пресликавања.

Колико времена/меморије захтева верификација $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}(\mathbf{T_2})$ у $\mathbf{T_1}$?

- **Са дистрибутивним системима: GH-парове** узети као модел за **византијску толерантност** у дистрибуираним системима, где чворови међусобно проверавају исправност без централног ауторитета.
- **Са когнитивном науком:** Моделовање људског расуђивања као интеракције од н**еколицине „умних модула"** са непотпуним, али комплементарним перспективама, који одржавају своју кохерентност кроз унутрашњу рефлексију.

Напомена: GH-оквир јесте пројект **отвореног типа**. Његова снага лежи у способности да служи као **генеричка матрица** за размишљање о проблемима кохерентности у најразличитијим доменима, али укратко,**GH-оквир** не завршава проблем; он отвара пејзаж. Тамо где је Хилберт тражио сигурност кроз конструкцију, Гедел открива њену границу кроз непотпуност. Њихово коначно уједињење — у рефлексивном еквилибријуму — скицира следећи хоризонт математичког само-разумевања**.** Овај рад зато треба читати као позив на дијалог, а не као затварање теме. Свака од ове четири предложене инстанце **GH-пара** може се даље разрађивати у правцу експлицитне формализације и верификације у асистентима доказа. Свака би од отворених теоријских линија — бимодална семантика, категоријска адјункција, рефлексивна интерпретабилност — тек требала добити своје пуне формалне доказе. Оно што је ту урађено јесте постављање координатног система у коме се ти даљи кораци могу прецизно лоцирати.

---

8. ЗАКЉУЧАК

Гедел–Хилбертов оквир, развијен у овом раду, представља значајан помак према разумевању односа између непотпуности и конзистентности у математичким основама. Уместо да се посматрају као две непомириве силе, Хилбертова тежња за апсолутном сигурношћу, а онда и потоње Геделово откриће фундаменталних ограничења проналазе помирење кроз принцип **рефлексивне кохерентности**.

Кључни доприноси овог рада су:

1. **Формализација GH-пара** кроз Дефиницију 2.1.1, која захтева симетричну допуштеност: два система међусобно верификују своју конзистентност без хијерархијске доминације.
2. **Аксиома рефлексивне конструктивности (ARC),** која трансформише модалну могућност у оперативни принцип, захтевајући ефективне преводе доказа између система, али уз очување њихове неупоредивости.
3. **Конкретне инстанције GH-пара које демонстрирају остваривост оквира:**
   (а) ($\mathbf{PA_{слаба}}$, $\mathbf{GEO_{дискретна}}$) (3.2)
   (б) (**PRA**, **дискретна геометрија Тарског**) (3.3)
   (в) ($\mathbf{ZF_0}$, $\mathbf{CAT_0}$) (3.4)
   (г) ($\mathbf{Q^+}$, $\mathbf{G_0}$) (3.5)
4. **Робусни докази** којима се осигурава логичка чврстоћа оквира, јесу вишеструки аргументи за сваку од кључних лема и теорема.
5. **Семантичка и категоријска разрада** која показује како би се рефлексивна симетрија могла моделирати кроз бимодалне системе и адјункције категорија.

Философски, **GH-оквир** сугерише да математичка правданост не мора бити утемељена само у једној крајњој основи, већ може настати као **емергентно својство** мреже међусобно рефлексивних система. Конзистентност постаје релациона, а не апсолутна категорија; непотпуност престаје бити мањкавост и постаје услов за дијалог.

Овај рад отвара неколико праваца за даља истраживања: формализацију превода у верификованим асистентима доказа, проучавање **GH-мрежа** са више од два система, као и примену оквира на друге домене где се јавља комплементарност перспектива.

Коначно, Гедел–Хилбертов оквир нуди трећи пут: ни фундаментализам који тражи једну основу, ни релативизам који прихвата изоловане системе, већ **кохерентни реализам** који крајњу истину види као стабилност у односима. На тај начин, оно што Хилберт тражи кроз конструкцију, а Гедел открива као ограничење, налази синтезу у рефлексивном еквилибријуму – математици која налази сигурност не у самодовољности, већ у узајамној транспарентности.

ПРИЛОГ А: ЛОГИЧКА АРХИТЕКТУРА GH-ОКВИРА

Овај део излаже суштинску логичку архитектуру на којој почива цео систем. Кроз изузетно прецизне дефиниције **GH-језгра**, успоставља се модел који премошћује и јаз између Геделове интроспекције и Хилбертове екстернализације. Овде приказане аксиоме служе и као формални темељ за разумевање транзиције са самореференце на узајамну референцу унутар домена билатералне кохерентности.

A.1 Дефиниција и образложење

Гедел–Хилбертов (GH)-оквир произилази из опажања да Геделова непотпуност [12] и Хилбертови захтеви за конзистентношћу [15, 16] нису логички некомпатибилни — они су различито лоцирани. Гедел је интернализовао проблем истине унутар система, док га је Хилберт екстернализовао ка мета-конзистентности. **GH-оквир** интегрише ове оријентације постулирајући тако да конзистентност и непотпуност могу коегзистирати не унутар једног система, већ преко рефлексивног дуалног система. Нека су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ формални системи који задовољавају семантику Хилберт–Тарског [16, 27]. Они формирају **Гедел–Хилбертов пар ако и само ако**:

- **(A1)** $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (где $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2}$) означава финитарну рефлексивну тврдњу из Дефиниције 2.1.2)
- **(A2)** ¬∃ тотална, очувајућа интерпретација **I** таква да **I:** $\mathbf{T_1 \rightarrow T_2}$ или **I:** $\mathbf{T_2 \rightarrow T_1}$ (односно, ту ниједна теорија не може потпуно да интерпретира другу)
- **(A3)** $\mathbf{M \vdash Con^{\{fin\}}(T_1) \wedge Con^{\{fin\}}(T_2)}$, где је **M** слабија мета-теорија, која потпуно верификује заједничку конзистентност.

Ова три члана дефинишу **GH-језгро**, логички простор где самореференца бива замењена узајамном референцом.

A.2 Структурне импликације

Узајамни услов конзистентности – Сваки систем валидира онај други, елиминишући хијерархијску асиметрију.
Нетривијална независност – $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ се семантички разликују (аритметика наспрам геометрије).
Симетрични мета-модел – **M** спречава циркуларну правданост.
Философски, **GH-оквир** трансформише доказно-теоријску асиметрију у епистемички еквилибријум, замењујући унилатералну правданост билатералном кохерентношћу.

A.3 Пример-шема: $\mathbf{PA_{(слаба)}–GEO_{(дискретна)}}$

Нека је:

$\mathbf{T_1 = PA_{(слаба)} + Con^{\{fin\}}GEO_{(дискретна)}}$ и $\mathbf{T_2 = GEO_{(дискретна)} + Con^{\{fin\}}PA_{(слаба)}}$

Тада, под претпоставкама **ARC**,

$$\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)} \text{ и } \mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)} \ ,$$

док мета-оквир **M = PRA** (или сличан финитарни систем) може да верификује

$$\mathbf{M \vdash Con^{\{fin\}}(T_1) \wedge Con^{\{fin\}}(T_2)}.$$

Ово даје нетривијалну рефлексивну петљу, задовољавајући **GH-језгро** под **Аксиомом рефлексивне конструктивности (ARC)**.

A.4 Упоредна табела

Својство	Класични систем	GH-оквир	Кључна разлика
Конзистентност	Само-референцијална $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$	Узајамна $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_j)}$	Замењује само-доказ узајамном финитарном рефлексијом
Непотпуност	Интерна (у једном систему)	Релациона (кроз однос система)	Непотпуност постаје услов за кохерентност, а не мана
Рефлексија	Хијерархијска (од јачег ка слабијем)	Симетрична (билатерална)	Прелазак са вертикалне на хоризонталну структуру
Мета-основа	Екстерна (изван система)	Неутрална (**M**)	**M** не доминира системима, већ верификује њихов заједнички статус

A.5 Мета-теоријски значај

Доказ постаје релација уместо својства: $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$

(A4) Truth(T_i) := Coherence(T_i, T_j) за **i ≠ j**.
Непотпуност је сада стабилност под симетричном валидацијом; конзистентност постаје релациона инваријанта.

А.6 Домен стабилности (Алгебра билатералне кохерентности)

Нека је $\mathfrak{D}^{GH}$ скуп парова исказа **(φ, ψ)** таквих да је:

$$T_1 \vdash \Diamond_1 \varphi \Leftrightarrow T_2 \vdash \Diamond_2 \psi.$$

Тада је $\mathfrak{D}^{GH}$ затворен под модалном конјункцијом и нецеситацијом, дефинишући алгебарско срце **GH-оквира,** у ком модалне допуштености и предикати доказа узајамно одржавају кохерентност.
Формалније: $\mathfrak{D}^{GH}$ може се дефинисати као:
$\mathfrak{D}^{GH}=\{ (\varphi, \psi) \in Form(L_1)\times Form(L_2) \mid T_1 \vdash \Diamond_1 \varphi \leftrightarrow Prf_1(\ulcorner Prf_2(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$ и $T_2 \vdash \Diamond_2 \psi \leftrightarrow Prf_2(\ulcorner Prf_1(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \}$,
где су Prf_i предикати доказа, а $\Diamond_i$ одговарајуће модалности допуштености.

А.7 Мапирање на главне делове рада

Овај додатак сумира логичку архитектуру која се детаљно разрађује у главним поглављима:

- **(A1)** одговара **Дефиницији 2.1.1** и **Аксиоми ARC**.
- **(A2)** одговара услову **неупоредививости** из **Дефиниције 2.1.1** и **Критеријума 3.1.1**.
- **(A3)** одговара улози **мета-теорије M** која се помиње у **Поглављу 6**.
- **(A4)** изражава философску тему **релационе истине** разрађену у **Поглављима 6 и 7**.
- **(A5)** формализује појам **кохерентног дијалога** из П**оглавља 5 и 6**.

Пример у **(A3)** директно се односи на **Конструкцију** 3.1.2
Дакле, овај прилог служи као **референтна мапа** која повезује све кључне концепте **GH-оквира**.

А.8 Завршна напомена

Геделове теореме ограничавају где се конзистентност може тражити, не и да ли она може постојати. Померајући правданост од себе ка структури, **GH-оквир** помирује Хилбертову тежњу са Геделовим ограничењима. Додатно, овај оквир показује да непотпуност није крајњи недостатак већ предуслов за дијалог. Кохерентност се јавља као релациона инваријанта која стабилизује мрежу система.

ПРИЛОГ Б: СИМБОЛИЧКИ ИНДЕКС И РЕЧНИК

Основна сврха овог прилога је допринесе лакшем разумевању рада од стране нелогичара. Имамо већ неких опсервација да ће, у перспективи, радови ове тријаде бити интересантни и за неке друге науке па смо зато сматрали да сличне прилоге треба додати у сва три рада ове тријаде. Колико ће то имати ефекта и допринети да се за ову тријаду заинтересују и нелогичари остаје да се види. Но, како аутори овог рада рачунају са серијалом радова из природних наука, нарочито физике, надамо се да ће имати.

Б.1 Логички симболи

Симбол	Значење	Напомене
$\vdash$	Релација доказивости	„Систем **T** доказује …“
$\models$	Семантичка поткрепа	Модело-теоријска истина
$\Box_i$	Модалитет доказивости у T_i	Задовољава Лебове услове [19]
$\Diamond_i$	Модалитет могућности	Дуалан са $\Box_i$
$\bot$	Контрадикција	Неодредљив ако је конзистентан
$\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$	Исказ конзистентности за **T**	$\neg Pr_T(\ulcorner 0=1 \urcorner)$
K_i	Епистемички оператор	„ T_i зна да…“
$\kappa(T_i, T_j)$	Модална снага	Билатерална дубина
$\mathfrak{D}^{GH}$	Домен билатералне кохерентности	Стабилна алгебра
M	Мета-оквир	Неутрална база која верификује $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$

Б.2 Системи и структуре

Ознака	Опис
(T_1, T_2)	Формални системи који формирају **GH-пар**
(T_1^+, T_2^+)	Проширени узајамним предикатима $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$
PA	Пеанова аритметика
GEO	Финитарна еуклидска геометрија
M	Мета-теорија (**PRA** или слаба **SOL**)
Th(S)	Скуп теорема система **S**
I	Мапа интерпретације **arith↔geom**
F_1, F_2	Модални оператори за **GH** фиксне тачке
φ, ψ	Формуле узајамне рефлексије

Б.3 Језгарне формуле (Резиме)

Ознака	Формула	Концепт
А1–А3	$T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, $M \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1) \wedge \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$	**GH-језгро**
А4	$\mathbf{Truth}(T_i)=\mathbf{Coherence}(T_i, T_j)$	Релациона истина
Б1–Б3	$\Box_1(\Box_2 \bot) \leftrightarrow \Box_2(\Box_1 \bot)$; фиксне тачке	Билатерална доказивост
Б5–Б7	Симетрија интерпретације и метрика кохерентности	Квантификована равнотежа
Б8	$K_1 \neg K_2 \bot$, $K_2 \neg K_1 \bot$	Узајамна не-омнисцијенција
В1	$T_1 \dashv T_2$ и $T_2 \dashv T_1$	Категоријска адјункција

Б.4 Концептуални појмови

Појам	Дефиниција
GH-пар	Два формална система која узајамно верификују конзистентност без колапса.
GH-оквир	Мета-структура која замењује само-верификацију релационом правданошћу.
ALP	„Оно што није логички забрањено је математички допуштено.“ [7]
Билатерална кохерентност	Логички еквилибријум кроз симетричну рефлексију.
Епистемички еквилибријум	Узајамна валидација без омнисцијенције.
Мета-основа	Неутрални слој **M** који верификује оба система.

Б.5 Завршна напомена

Овај индекс чини експлицитном архитектуру **GH-рефлексије** — уједињујући доказ, кохерентност и знање под једном логиком. Додатно, он служи и као оријентир за оне читаоце који нису логичари, омогућавајући им да прате техничке делове рада. Симболи и појмови овде сабрани представљају и минимални речник за разумевање целог оквира. Тако се обезбеђује јединствени терминолошки основ за све што је кориштено у раду. Овај речник је и мост ка интердисциплинарним применама, где се исти концепти могу преводити у друге научне језике. На тај начин, симболички индекс постаје не само помоћни алат већ и део саме методолошке инфраструктуре **GH-програма**.

ПРИЛОГ В: МЕТОДОЛОШКЕ НАПОМЕНЕ

Методолошке напомене осветљавају ону теоријску позицију из које се приступа основи математике. Овде се детаљније образлаже ослањање на Хилбертов финитизам, Борову комплементарност и неке модерне логике доказивости. Овај прилог дефинише **GH-програм** као неки трећи пут који помирује класичне супротности кроз концепт рефлексивног еквилибријума и дијалошке истине.

В.1 Методолошка оријентација

Овај пројекат поново артикулише филозофију математике померањем са интра-системског доказа на интер-системску кохерентност.

Метод:
(1) формални дизајн **GH-језгра**,
(2) модална семантика рефлексије,
(3) филозофска реконструкција. Синтакса и семантика се третирају као комплементарне перспективе унутар једног мета-рефлексивног поретка.
Овај тродимензионални приступ омогућава да се **GH-оквир** третира још и као **формална теорија** (са операторима и аксиомама), али и као **семантички модел** (са модалним и категоријским структурама) и као **филозофска позиција** (кохерентни реализам). Ова комплементарност огледа се директно у том предмету проучавања – рефлексивној симетрији.

B.2 Епистемолошка позиција

Оквир је неутралан између платонизма и конструктивизма, фаворизујући релациона опредељења: то што је важно како системи заједно могу одржавати конзистентност. Он резонира са **структуралним реализмом** и **епистемологијом мрежа**, приказујући математику као еволуирајућу мрежу међусобно рефлексивних структура.
Ова релациона опредељења не поричу унутрашњу структуру појединачних система, већ истичу да је њихов **епистемички статус** постаје потпун само у односу са другим, комплементарним системима. У том смислу, **GH-оквир** представља **екстернализацију епистемичког ауторитета**.

B.3 Филозофски дуг и инспирација

Утицаји укључују Хилбертов финитизам [15, 16], укључујући Геделову непотпуност [12] па и Борову комплементарност [4] и логике доказивости (Леб [19], Беклемишев [2]). Заједно, они сугеришу да су непотпуност и конзистентност осе вишег-реда симетрије.
Конкретно, **Хилбертов финитизам** се огледа у захтеву за конструктивним пресликавањима у **ARC**; **Геделова непотпуност** постаје основни услов, а не препрека; **Борова комплементарност** ту пружа метафору за нередуцибилну двоструку перспективу; док **логике доказивости** дају технички апарат за модалну формализацију.

B.4 Завршна напомена

GH-оквир предлаже да математичка сигурност може опстати кроз реципрочност уместо затварањем: истина као дијалог међу системима који препознају своје границе.

ПРИЛОГ Г: ВИЗУЕЛНА ШЕМА РЕФЛЕКСИВНЕ КОХЕРЕНТНОСТИ

Визуелизација сложених логичких односа помаже у схватању нехијерархијске природе **GH-мрежа**. У овом делу су приказани концептуални графови који илуструју и како се конструктивна кохерентност шири кроз различите математичке домене. Дијаграми служе и као интуитивни водич кроз топологију рефлексивног реализма, приказујући симетрију међусобно валидирајућих система.

Г.1 GH-Граф кохерентности ($\mathcal{G}_{(\mathbf{GH})}$)

Нека је $\mathcal{G}_{(\mathbf{GH})}$ усмерени неусмерени граф где су:

- **Чворови** представљају формалне системе $\mathbf{T_i}$.
- **Ивице** представљају симетричну рефлексију:

$$\mathbf{T_i} \approx_{(\mathbf{ARC})} \mathbf{T_j} \iff \mathbf{T_i} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}_{\{\mathbf{T_j}\}} \wedge \mathbf{T_j} \vdash \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}_{\{\mathbf{T_i}\}}$$

Граф кодира **топологију мреже** рефлексивног реализма. Стабилност $\mathcal{G}_{(\mathbf{GH})}$ имплицира кохерентност преко система, упркос локалној непотпуности.

Г.2 Дијаграмска репрезентација (текстуална скица)

Пример 1: Једноставан GH-пар

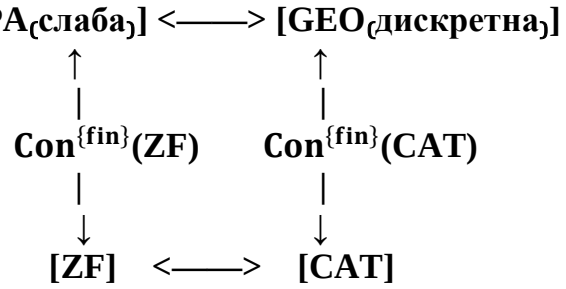
$$[\mathbf{PA}_{(\text{слаба})}] \longleftrightarrow [\mathbf{GEO}_{(\text{дискретна})}]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}_{\mathbf{GEO}_{(\text{дискретна})}} \qquad \mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}_{\mathbf{PA}_{(\text{слаба})}}$$

Двосмерна стрелица представља релацију **≈(ARC)**: узајамну финитарну рефлексију конзистентности кроз конструктивна пресликавања **Φ** из **ARC**.
Уовом примеру дали смо шему за најједноставнији **GH-пар**, док ћемо у следећем приказати како би то могло изгледати за нешто сложенију структуру.

Пример 2: Мрежа од више система (илустративна)



Ова мрежа приказује како се конструктивна кохерентност може ширити преко домена: аритметика, геометрија, теорија скупова и теорија категорија. Ивице су двосмерне, али оне овде не имплицирају хијерархију; само показују односе узајамног осигурања.

Напомена: Ови дијаграми су **концептуалне мапе**, а не формални докази. Они служе да визуелизују дистрибуирани, нехијерархијски карактер правданости у **GH-оквиру**.

ПРИЛОГ Д: РЕЗИМЕ ФОРМАЛНИХ КОНСТРУКАТА

Симбол / Појам	Значење
GH(T_1,T_2)	Оператор Гедел–Хилбертовог пара
ARC	Аксиома рефлексивне конструктивности
к(T_i, T_j)	Модална дубина узајамне конзистентности
J(T_1,T_2)	Скуп интер-рефлексивних истина
$\mathcal{G}_{(}$**GH**$_{)}$	Граф рефлексивне кохерентности
O(T_1,T_2)	Конструктивно преклапање између система
B(T_1,T_2)	Рефлексивна граница
GHPK	Гедел–Хилбертов принцип кохерентности
LUK	Логички услов кохерентности

Ова табела консолидује основну формалну терминологију **GH-оквира**.

ПРИЛОГ Ђ: ИЛУСТРАТИВНИ ПРОТОТИП GH-ПАРА

Нека је:

- T_1 = **PA$_{(}$слаба$_{)}$**: Пеанова аритметика са ограниченом индукцијом
- T_2 = **GEO$_{(}$дискретна$_{)}$**: Дискретна геометрија са коначном интеракцијом

Претпоставимо да:

- Оба система кодирају примитивну рекурзију
- Сваки може изразити финитарну рефлексију конзистентности другог
- Ниједан не може извести потпуну рефлексивну шему другог

Тада је:

$$T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2) \text{ и } T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1).$$

Овај пар задовољава **ARC** и **GH-језгро**, формирајући минимални модел билатералне кохерентности.

ПРИЛОГ Е: ОГРАНИЧЕЊА И КРИТИЧКИ ПОГЛЕД

Иако **GH-оквир** нуди моћан модел релационе правданости, али неколико ограничења ипак остаје:

- **Ниједан универзални GH-пар:** Не постоји пар који обухвата сву математичку истину.
- **Конструктивни терет:** Остваривање **ARC** мапа у асистентима доказа остаје отворени изазов.
- **Семантичка крхкост:** Рефлексивна кохерентност може зависити од суптилних претпоставки

о допуштености и кодирању.

Ова ограничења не поткопавају оквир већ дефинишу његову границу, онај простор у коме се будући формални и философски рад може одвијати.

ПРИЛОГ Ж: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

Критика 1: „Ако $\mathbf{T_1}$ доказује конзистентност за $\mathbf{T_2}$, а $\mathbf{T_2}$ за $\mathbf{T_1}$, није ли то логички затворени круг али који не доказује ништа?“

Одговор 1: GH-оквир избегава тривијалну циркуларност кроз услов неупоредивости. Системи нису идентични; они користе различите доказне ресурсе и семантике. Валидација није само-правдање, већ успостављање кохерентности између два независна извора истине. Мета-оквир **M** ће верификовати и додатно овај статус, чиме се „круг” претвара у стабилну рефлексивну структуру.

Критика 2: „Геделова друга теорема каже да систем не може доказати сопствену конзистентност. Да ли **GH-пар** покушава да „превари” ову теорему?“

Одговор 2: Не. **GH-оквир** у потпуности поштује Геделову теорему. Ниједан систем у пару не може доказати своју конзистентност. Оно што се остварује је **дистрибуирана правданост**. Сваки систем појединачно остаје непотпун, али мрежа коју они граде постиже стабилност коју појединачни систем не може.

Критика 3: „Да ли је **Аксиома рефлексивне конструктивности** превише јака претпоставка?“

Одговор 3: ARC је оперативни принцип, а не магично решење. Она захтева експлицитна, финитарна пресликавања доказа. Њена вредност је у томе што приморава логичара да и заправо конструише ове мостове (као што је **Ф** у раду), претварајући апстрактну могућност у проверљив рачунарски доказ.

ЕПИЛОГ

„Ако је Хилберт тражио сигурност кроз конструкцију, Гедел открио њену границу кроз непотпуност, Гедел–Хилбертов оквир сугерише да би кохерентност — уместо конструкције — коначно могла да их помири.“ [7]

Овај еквилибријум није статичан јер се он одржава динамичком симетријом **Аксиоме рефлексивне конструктивности (ARC)**, која операционализује дијалог кроз конструктивна пресликавања доказа између система. Кохерентност се ту, дакле, не постулира, већ **конструише** кроз рефлексивну петљу **GH-пара**.

У овој завршној рефлексији, **GH-оквир** открива своју философску срж. То што је Хилберт замишљао као уједињење математичког резоновања под заставом конзистентности, а што је Гедел срушио кроз непотпуност, може ипак наћи помирење кроз презентовани еквилибријум: **кохерентност међусобно валидирајућих система.** Суштина овог предлога лежи не у одбацивању наслеђа ниједног од врсних мајстора математичке логике, већ лежи у њиховој синтези. Реинтерпретирајући конзистентност као релационо, а не интерно својство, **GH-оквир** трансформише теорију доказа у нови облик, дијалошке епистемологије. У том смислу, математика — далеко од тога да буде монолог формалне истине — постаје структурисани дијалог између формалних светова који препознају један у другом валидност кроз логичку могућност.

Оно што овај оквир показује јесте да математика није затворен систем, већ динамичка мрежа која своју снагу црпи из узајамне транспарентности. Уместо да се истина схвати као монолитна, она постаје процес који се одржава кроз дијалог система.

Суштина је да непотпуност није крајњи недостатак, већ предуслов за креативност и дијалог. Кохерентност постаје нови идеал — не као крајња сигурност, већ као стабилност односа.

РЕФЕРЕНЦЕ (радови истих аутора су на Зенодо и на https://meta-ns.co.rs/)

[1] **Ackermann, W.** (1928). *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Mathematische Annalen, 99, 118–133

[2] **Beklemishev, L. D.** (2005). *Provability algebras and proof-theoretic ordinals,* I. Annals of Pure and Applied Logic, 128(1–3), 103–123.

[3] **Blum, M.** (1967). *A machine-independent theory of the complexity of recursive functions*. Journal of the ACM, 2(2), 322–336.

[4] **Bohr, N.** (1937). *Causality and Complementarity*. Philosophy of Science, 4(3), 289–298.
[5] **BonJour, L.** (1985). *The Structure of Empirical Knowledge*. Harvard University Press.
[6] **Boolos, G. S., Burgess, J. P., & Jeffrey, R. C.** (2007). *Computability and Logic* (5th ed.). Cambridge University Press.
[7] **Бошњак Р. & М. & Д.** (2026). *Гедел-Хилбертов пар и релациона унија.* PH-MAT-01-01A-SRB • https://doi.org/10.5281/zenodo.19762864
[8] **Chalmers, D.** (2002). *Does conceivability entail possibility? In Conceivability and Possibility,* Eds. Gendler & Hawthorne. Oxford University Press.
[9] **Feferman, S.** (1960). *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* Fundamenta Mathematicae, 49(1), 35–92.
[10] **Feferman, S.** (1998). *In the Light of Logic*. Oxford University Press.
[11] **Gentzen, G.** (1936). *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Mathematische Annalen, 112(1), 493–565.
[12] **Gödel, K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I,* Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, 173–198.
[13] **Gödel, K.** (1933). *The present situation in the foundations of mathematics*. In: Collected Works, Vol. III. Oxford University Press, 1995.
[14] **Hilbert, D.** (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Teubner.
[15] **Hilbert, D.** (1922). *Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung.* Abhandlungen aus dem Seminar der Universität Hamburg, 7, 157–177.
[16] **Hilbert, D.** (1931). *The foundations of mathematics.* In: From Frege to Gödel: *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931, ed. J. van Heijenoort. Harvard University Press, 1967.
[17] **Колмогоров, А. Н.** (1965). *Три подхода к определению понятия «количество информации».* Проблемы передачи информации, 1(1), 3–11.
[18] **Krajíček, J. (**1995). *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*. Cambridge University Press.
[19] **Löb, M. H.** (1955). *Solution of a problem of Leon Henkin.* Journal of Symbolic Logic, 20(2), 115–118.
[20] **Mac Lane, S.** (1971). *Categories for the Working Mathematician.* Springer.
[21] **Maddy, P.** (1997). *Naturalism in Mathematics.* Oxford University Press.
[22] **Pudlák, P.** (1998). *The lengths of proofs. In Handbook of Proof Theory*, ed. Buss, S. Elsevier, 547–637.
[23] **Robinson, R. M.** (1950). *An essentially undecidable axiom system.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge 1950, Vol 1, 729–730.
[24] **Smoryński, C.** (1985). *Self-Reference and Modal Logic*. Springer.
[25] **Tait, W. W.** (1981). *Finitism.* Journal of Philosophy, 78(9), 524–546.
[26] **Tarski, A.** (1955). *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.* Pacific Journal of Mathematics, 5(2), 285–309.
[27] **Tarski, A., Mostowski, A., & Robinson, R. M.** (1953). *Undecidable Theories.* North-Holland.
[28] **Tarski, A.** (1959). *What is elementary geometry*? In L. Henkin, P. Suppes, & A. Tarski (Eds.), *The Axiomatic Method* (pp. 16-29). North-Holland.
[29] **Visser, A.** (1990). *Interpretability logic. In Mathematical Logic,* vol. 4 of Handbook of Philosophical Logic, eds. Gabbay, D. & Guenthner, F. Springer.
[30] **Wang, H.** (1987). *Reflections on Kurt Gödel*. MIT Press.

POST SCRIPTUM

Сваки доказ носи траг сопственог ограничења, али ипак у тој самој граници опажамо све већи поредак кохерентности! Таква кохерентност, крхка али светлуцава, је право помирење Гедела и Хилберта. То помирење није остварено кроз синтезу, већ управо кроз рефлексивни опстанак самог разума.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Нови Сад
07.01.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.19763178
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-01B-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

CONSTRUCTIVE GÖDEL–HILBERT PAIRS

No system can fully illuminate itself; but in reflection, one system can illuminate another.

ABSTRACT

Gödel's incompleteness theorems have often been interpreted as the final word on **Hilbert's program**. However, their deeper implication may not be the impossibility of proving consistency, but rather the structural asymmetry of justification itself. This paper develops a constructively oriented extension of the **Gödel–Hilbert (GH)** framework, introducing the **Axiom of Reflexive Constructivity (ARC)—**a principle that generalizes Hilbertian verification through symmetric cross-referencing. Instead of seeking a single self-verifying system, the **GH** approach constructs paired formal systems —**GH-pairs** — each of which can reflect the consistency of the other without self-referentiality. We formalize this relationship through a constructive operator defined on pairs of recursively enumerable systems, showing that it produces a non-trivial space of symmetric justification. As a case study, we examine four candidate pairs representing orthogonal forms of constructive expressibility. The resulting framework reinterprets Hilbert's program as a search, not for absolute consistency, but for epistemic equilibrium among formal perspectives—i.e., a shift from monological proof to dialogical coherence. By determining the conditions under which such equilibrium becomes constructively permissible, the **GH model** itself provides a foundation for reuniting incompleteness and consistency through relational justification rather than self-containment.

Keywords: Gödel–Hilbert pairs; reflexive constructivity; logical symmetry; consistency; incompleteness; categorical duality; Hilbert's program; Gödel's theorems.

AMS Classification (2020):

03A05 — Foundations of mathematics;
03F03 — Proof theory and constructive mathematics;
03F15 — Recursive function theory;
03B70 — Logic in the philosophy of mathematics.

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
07.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"