Аутор: Ранко Бошњак
Коаутори: Милица Бошњак & Даница Бошњак
Институција: МЕТА-ПОЛИХИСТОР
DOI: 10.5281/zenodo.19762864
„ПОЛИХИСТОР“ N: PH-MAT-01-01A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

ГЕДЕЛ-ХИЛБЕРТОВ ПАР И РЕЛАЦИОНА УНИЈА

Истина и доказ се сусрећу не у доминацији, већ у рефлексији.

АПСТРАКТ

Уводимо концепт **GH-парова** - два формална система који међусобно доказују конзистентност један другог, док су појединачно подложни Геделовим теоремама о непотпуности [13, 34]. Сам појам **GH-уније** омогућава дуалистичку реализацију Хилбертовог програма [17]. Ту показујемо одсуство било какве принципијелне логичке забране против таквих парова, развијамо теорију неупоредивости, као неопходан услов и анализирамо могућности разних конструкција, које откривају дубоке структурне изазове. Испитујемо алтернативне кандидате кроз реверзну математику и конструктивне основе, али даље развијамо детаљна епистемолошка оправдања кроз кохерентистичке оквире и Аксиому логичке могућности **(ALP)** [2, 31]. Наш централни резултат (Теорема 5.2): под **ALP** принципом — да оно што није логички забрањено јесте математички реализујуће — следи **GH-парови** постоје у математичком простору. Тај доказ постојања комбинује одсуство логичке забране са модално-логичким принципом потврђеним историјским обрасцима у математици. Тако преостали изазов постаје идентификација, а не постојање: проналажење експлицитних примера феномена за који смо доказали да мора постојати. Оквир у потпуности поштује Геделове теореме о непотпуности [13]: оквир не предлаже систем који доказује сопствену конзистентност, већ пар чија је међусобна конзистентност спољa дефинисана и стога јесте логички неспорна.

Кључне речи: Геделове теореме о непотпуности, Хилбертов програм, докази конзистентности, међусобна интерпретабилност, комплементарност, доказно-теоријски ординали, епистемологија математике, аксиом логичке могућности, теореме постојања

AMS класификација (2020):

03F25 (Релативна конзистентност и интерпретације);
03F40 (Геделово нумерисање и питања непотпуности);
03A05 (Философска и критичка).

1. УВОД

1.1 Хилбертов програм: Сан о апсолутним основама

Давид Хилбертов програм темеља [17], најјасније је артикулисан у његовом познатом предавању из 1926. Године: *Über das Unendliche*. Овде је представљао један од најамбициознијих интелектуалних пројеката 20. века. Програм није био само технички већ дубоко философски: обезбедити целокупну математику на апсолутно сигурним основама кроз формализацију и финитистички доказ.

Уместо да оконча Хилбертов програм [17], Геделов резултат [13] само преобликује његов циљ. Иако је апсолутна самопотврда немогућа, место оправдања мора се преместити из унутрашњости једног система у однос између два система. Овај помак — од монолошког доказа ка дијалошкој рефлексији — дефинише **Гедел–Хилберт оквир** [6].

Основни циљеви Хилбертовог програма били су:

1. **Потпуност:** Свака истинита математичка тврдња је доказива унутар формалног система
2. **Конзистентност:** Систем не сме садржати противречности
3. **Одлучивост:** Треба да постоји механичка процедура за утврђивање истине
4. **Финитистички мета-доказ:** Конзистентност система треба да буде доказива финитистичким средствима доступним интуицији

Хилбертову визију [17] је мотивисала криза темеља математике изазвана парадоксима пронађеним у теорији множина [7] (Расел, Бурали-Форти) и споровима око аксиома избора. И његов одговор био је

карактеристично смео: формализовати све, а затим доказати исправност те формализације користећи само најнеспорније, конкретно резоновање — оно што је називао финитизмом.
Хилбертова *Beweistheorie* (теорија доказа) била је технички оквир за овај програм. Идеја: третирати и математичке доказе као саме математичке објекте, односно као коначне низове симбола који се могу комбинаторно проучавати. Ако се може доказати, користећи само финитистичко резоновање о овим низовима симбола, да се никада не може извести противречност, онда би цела математика почивала на непоколебљивим основама.
Улози су били огромни. Како је Хилберт својевремено изјавио: *Wir müssen wissen—wir werden wissen.* („Морамо знати — знаћемо", то је из Хилбертовог говора у Кенигсбергу 1930). Математика мора бити спасена од скептицизма; а њена извесност мора бити једном заувек демонстрирана.

1.2 Геделове теореме: Разбијање Хилбертовог сна

Године 1931. Курт Гедел је објавио [13] резултате који фундаментално мењају тадашње разумевање математичке истине и доказивости. Теореме нису биле само негативни резултати већ дубоки увиди у природу формалних система.
Прва Геделова теорема о непотпуности [13]**:** Сваки конзистентан формални систем **F** који садржи аритметику је непотпун — постоје истините аритметичке тврдње које се не могу доказати унутар **F**.
Доказ је користио генијалну самореференцију: Гедел је конструисао тврдњу **G** која суштински каже да **G** није доказива у **F**. Ако би **F** могао доказати **G**, онда би **G** била лажна (јер тврди недоказивост), чиме би **F** постао неконзистентан. Ако је **F** конзистентан, **G** мора бити истинита али недоказива.
Друга Геделова теорема о непотпуности [13, 34]**:** Ниједан довољно снажан конзистентан формални систем не може доказати сопствену конзистентност.
Прецизније: **ако** је **F** конзистентан и садржи довољно аритметике (довољно да формализује синтаксу и теорију доказа), **онда F** не може доказати $\mathbf{Con^{\{fin\}}(F)}$**,** као формализовану тврдњу своје сопствене конзистентности.
Ово је директно погодило Хилбертов програм [17]. Доказ конзистентности који је Хилберт тражио — доказ унутар система или користећи средства не јача од самог система — показао се немогућим. Сваки доказ конзистентности захтевао би јаче претпоставке, што води у бесконачан регрес [9].

1.3 Пост-геделовски развоји: Релативна конзистентност

После Гедела, фокус се померио са апсолутних на релативне доказе конзистентности. Преломни је био доказ Герхарда Генцена из 1936. године о конзистентности Пеанове аритметике **(PA)** [12]**.**
Генценова стратегија је да докаже $\mathbf{Con^{\{fin\}}(PA)}$ и то не унутар самог **PA** (немогуће је по Геделовој II теореми [13]), већ у слабијем систему проширеном новим принципом, трансфинитном индукцијом, до ординала $\boldsymbol{\varepsilon_0}$**:**

$$\mathbf{PRA + TI(\varepsilon_0) \vdash Con^{\{fin\}}(PA)}$$

где је **PRA Примитивна рекурзивна аритметика** (слабија од **PA** у неким аспектима), а $\mathbf{TI(\varepsilon_0)}$ јесте трансфинитна индукција до епсилон-нула. Ово је било величанствено али асиметрично. Генценов систем [12, 26, 29, 30] је „слабији у синтакси, а јачи у ординалима" - не може доказати све што **PA** доказује, али може доказати конзистентност **PA**. Кључно, обрнуто не важи:

$$\mathbf{PA \nvdash Con^{\{fin\}}(PRA + TI(\varepsilon_0))}$$

Ова асиметрија постаје стандардни образац [26, 31]: јачи системи доказују конзистентност слабијих, никада обрнуто. Добијамо хијерархију:

$$\mathbf{PA \rightarrow ZFC \rightarrow ZFC + велики\ кардинали \rightarrow ...}$$

Сваки ниво јесте оправдан следећим, али хијерархија се протеже бесконачно без апсолутних основа. Питање крајњих темеља остаје без одговора - или је можда показано да је у принципу неодговориво.

1.4 Централно питање: Може ли симетрија заменити хијерархију?

Овај рад поставља радикално питање: морају ли ови докази конзистентности увек бити асиметрични?
Стандардна хијерархија нам даје [7]: $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ **уз** $\mathbf{T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
Шта ако бисмо уместо тога имали: $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
са оба система појединачно подложна Геделу II: $\mathbf{T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
Такве парове називамо **GH-парови** — то су системи који међусобно потврђују конзистентност један

другог, сваки превазилази сопствена ограничења видећи у другом оно што сам себи не може видети. Назив **GH-парови** је конструисао главни аутор овог рада јер се ради о пару који задовољава програм који је поставио Хилберт [17], а истовремено поштује и Геделове теореме [13], Ако би **GH-парови** постали стандардни део математике, чему се с пуним правом надамо, остављамо математичарима на вољу да осмисле и неко прикладније име. Но, док се то не деси ми ћемо користити ову радну верзију. Ако, пак, име остане – нека то буде у част двојице великана чије су се визије, након читавог века, коначно среле у овом концепту.

Увођење симетрије у доказе конзистентности није покушај поништавања Геделових резултата, већ проширење домена њихове примене. **Ако** индивидуални системи никад не могу самопотврдити своју исправност, **онда** хипотеза о постојању међусобно рефлексивних парова отвара простор за затварање логичког круга без пада у порочну кружност (*vicious circularity*), али то под условом да се дефинише специфична *дистанца* или неупоредивост између система.

1.5 Наша теза

Износимо две централне тврдње:

Тврдња 1 (негативни резултат): Не постоји ниједна позната теорема у математичкој логици која би у принципу забрањивала постојање **GH-парова**. Геделове теореме [13, 34] ограничавају доказиве облике самореференције **($T \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$),** али не третирају међусобне референтне циклусе **($T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2) \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$).**

Тврдња 2 (позитивни предлог): Под Аксиомом логичке могућности **(ALP)** [2, 31] као принципом да оно што није логички забрањено јесте математички реализујуће, онда и **GH-парови** стварно постоје у математичком простору. Ако се још могу конструисати експлицитни примери, они нуде елегантно дуалистичко решење Хилбертовог програма — и то не у његовом оригиналном монистичком облику (један савршен систем), већ као међусобно подржавајућа структура два комплементарна система.

ALP се овде користи као мета-принцип постојања у оквиру мета-теорије, а не као аксиом било ког од формалних система $\mathbf{T_1}$ или $\mathbf{T_2}$**.** Вишеструки независни докази исте тврдње не мењају њену доказивост у формалном систему, већ служе као мера епистемичке поузданости резултата у мета-анализи доказа.

Важна разлика: Разликујемо постојање у принципу (доказано Теоремом 5.2 под **ALP**) и постојање у пракси (експлицитна конструкција, још увек отворена). Наш централни допринос јесте утврђивање да **GH-парови** припадају потврђеној онтологији математике, чиме се истраживање помера са питања „**да ли постоје**?" на питање „**где су они**?".

1.6 Философска мотивација

Зашто ово истраживати? Поред техничког интереса, **GH-парови** осветљавају и друга дубока питања:

- **Епистемолошка:** Може ли међусобна подршка обезбедити какво оправдање без бесконачног регреса или порочне кружности?
- **Онтолошка:** Да ли математичка истина захтева један темељ, или почива на комплементарним стубовима?
- **Методолошка:** Постоје ли алтернативе стандардној хијерархији у темељима?

Овај концепт морао би имати одјека и у савременој философији:

- **Кохерентизам у епистемологији** [28] (*Quine-ова мрежа уверења*)
- **Комплементарност у физици** (*Борово таласно-корпускуларно двојство*)
- **Плурализам у математици** [23] (*Badiou, Maddy*)

1.7 Структура рада

Овај рад представља први део теоријске тријаде посвећене Гедел–Хилбертовим паровима.

Ова тријада прати логичку прогресију од могућности до нужности и коначне актуелизације:

- **Први рад (овај): Могућност и онтолошко постојање.** Доказујемо одсуство логичке забране и, под Аксиомом логичке могућности (**ALP**), утврђујемо и да **GH-парови** постоје у простору математичких структура.
- **Други рад: Логичка нужност.** У овом раду, показујемо да постојање **GH-парова** не само да је могуће, већ је и нужно за кохерентност одређених мета-математичких оквира.
- **Трећи рад: Конструктивна актуелизација.** Завршавамо тријаду са конкретном конструкцијом **GH-пара**, потврђујући тиме и претходне теоријске гаранције.

У оквиру ове стратегије, овај први рад се одвија на следећи начин:
Одељак 2 даје ригорозне формалне дефиниције **GH-парова** и **GH-уније**.
Одељак 3 развија теоријски оквир, доказује одсуство логичке забране, неопходност неупоредивости и пружа методолошке смернице за конструисање **GH-парова**.
Одељак 4 разматра епистемолошке проблеме и развија кохерентистичко оправдање против оптужби за кружност.
Одељак 5 Аксиом логичке могућности и теорема о постојању
Одељак 6 дискутује импликације за темеље математике и филозофије.
Одељак 7 разматра отворена питања и правце будућих истраживања.
Одељак 8 закључује критичком проценом научне вредности.
Прилог А испитује алтернативне кандидате из реверзне математике, конструктивне математике и теорије категорија. **Епилог, Референце, Post scriptum**

---

2. ФОРМАЛНЕ ДЕФИНИЦИЈЕ

Овај део рада дефинише ригорозни синтаксички и семантички оквир, оквир неопходан за постојање **GH-парова.** Увођењем нових мета-логичких структура, као што су **GH-унија** и **Аксиом моста**, овде постављамо механизме који омогућавају рефлексивну конзистентност, а увек уз стриктно поштовање Геделових граница.
Појам **Гедел–Хилбертовог пара** може се увести и интуитивно, пре његове формалне спецификације. Концепт има за циљ да ухвати минималну релациону структуру између два формална система која су способна да рефлектују конзистентност један другог без урушавања у самореференцију.
Формална илустрација: Размотримо два формална система $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$, од којих сваки само-проширује заједничку аритметичку основу као што је **PA** [7]. Нека је:

$$\mathbf{T_1 = PA + Con^{\{fin\}}(T_2)} \text{ и } \mathbf{T_2 = PA + Con^{\{fin\}}(T_1).}$$

Иако такав пар не може постојати као коначно аксиоматизован систем унутар сопственог оквира, ова шема илуструје логички облик **GH-пара,** у једном облику, међусобно доказиве конзистентности без самореференције [13, 34].

2.1 Основни појмови

Радимо унутар стандардног оквира логике првог реда и формалних система. Формални систем **T** се састоји од [7]:

- **Формалног језика $\mathcal{L}$(T) са потписом Σ**
- **Скупа аксиома Ax(T) ⊆ Formulas($\mathcal{L}$)**
- **Правила закључивања (типично логика првог реда)**

Пишемо $\mathbf{T \vdash \varphi}$ да означимо [7] „**φ** је доказива у **T**" и $\mathbf{T \nvdash \varphi}$ за „**φ** није доказива у **T**."

Дефиниција 2.1 (Конзистентност). Формални систем **T** је конзистентан ако не постоји формула **φ** таква да важи $\mathbf{T \vdash \varphi}$ и $\mathbf{T \vdash \neg\varphi}$. Еквивалентно [7], $\mathbf{T \nvdash \bot}$ (**T** не доказује противречност).
За системе способне да формализују синтаксу (**PA** и јачи), [10] имамо:

Дефиниција 2.2 (Формализована тврдња о конзистентности). $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$ је формула [9], али само у језику аритметике која изражава да „не постоји природан број који кодира доказ за **0=1** у **T**."
Формално:

$$\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_i) := \neg\exists p\,[Prf_i(p, \ulcorner 0=1 \urcorner)], \text{ где } i \in \{1,2\}.}$$

где је $\mathbf{Prf_i}$ примитивно рекурзиван предикат, а $\ulcorner \mathbf{0=1} \urcorner$ Гёделов број [10, 13] противречности **0=1.**

2.2 GH парови: Ригорозна дефиниција

Дефиниција 2.3 (GH-пар). Пар формалних система $\mathbf{(T_1, T_2)}$ чини **GH-пар** [2, 3, 31] ако важе услови:
(DP1) Међусобна доказивост конзистентности [13, 34]**:**

- $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (систем $\mathbf{T_2}$ доказује конзистентност система $\mathbf{T_1}$)
- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ (систем $\mathbf{T_1}$ доказује конзистентност система $\mathbf{T_2}$)

(DP2) Појединачна геделовска ограничења [13, 34]**:**

- $\mathbf{T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (систем $\mathbf{T_1}$ не може доказати сопствену конзистентност)

- $\mathbf{T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ (систем $\mathbf{T_2}$ не може доказати сопствену конзистентност)

(DP3) Независност:

- $\mathbf{Ax(T_1) \cap Ax(T_2) = \emptyset}$ (скупови аксиома су суштински дисјунктни) [23]
- $\mathbf{T_1 \not\subset T_2}$ **и** $\mathbf{T_2 \not\subset T_1}$ (ниједан није подсистем другог) [26, 29, 30]
- $\mathbf{\mathcal{L}(T_1) \neq \mathcal{L}(T_2)}$ (различити језици, који одражавају различите домене) [23]

Напомена о DP3: Услов дисјунктних аксиома може бити сувише строг. У пракси, системи могу делити минимални логички апарат (пропозициону логику, основна правила закључивања). Оно што је битно јесте разлика у суштинском аксиоматском садржају, односно у класи теорија које описују. Кључ је разлика у структури теорија, а не у чистој синтаксичкој изолованости [23].

Неупоредивост се може разумети и као одсуство интерпретације једног система у другом.

Појашњење о DP2: Да би **DP2** важио, и $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ морају бити „довољно снажни" — способни да:

- Формализују сопствену синтаксу (Геделово нумерисање) [13]
- Изразе појам доказа [10]
- Репрезентују примитивно рекурзивне функције [10]

Ово типично значи да су најмање јаки као Робинсонова аритметика **Q** [33], иако је ту **PA** стандардна основа.

2.3 GH-унија: није систем већ релација

Дефиниција 2.4 (GH-унија). За **GH-пар** $\mathbf{(T_1, T_2)}$, пишемо [2, 31]: $\mathbf{T_1 \diamondsuit T_2}$ (чита се „$\mathbf{T_1}$ **GH**-јединствен са $\mathbf{T_2}$"), да означимо мета-релацију међусобне епистемичке подршке. То није нови формални систем (није $\mathbf{T_1 \cup T_2}$, што би нарушило Гедела) [13, 34], већ структурални однос.

Својства $\diamondsuit$:

1. **Симетрија:** $\mathbf{T_1 \diamondsuit T_2 \Leftrightarrow T_2 \diamondsuit T_1}$
2. **Ирефлексивност:** $\mathbf{T \diamondsuit T}$ никада не важи (по Геделу II) [13, 34]
3. **Нетранзитивност:** Из $\mathbf{T_1 \diamondsuit T_2}$ и $\mathbf{T_2 \diamondsuit T_3}$ не можемо извести $\mathbf{T_1 \diamondsuit T_3}$

Пропозиција 2.1 (Међусобна конзистентност као структурална релација).

Нека је $\mathbf{(T_1, T_2)}$ **GH**-пар у смислу Дефиниције 2.3, и нека је **M** мета-теорија која проширује **PA**. Тада:

(i) Формално (DP1): $\mathbf{M \vdash [T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)] \wedge [T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)]}$.

(ii) Формално (DP2): Ако су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ конзистентни, **онда** $\mathbf{M \vdash [T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)] \wedge [T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)]}$.

(iii) Условна мета-еквиваленција: Ако M овде претпоставља $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1) \wedge Con^{\{fin\}}(T_2)}$, **онда** $\mathbf{M \vdash Con^{\{fin\}}(T_1) \leftrightarrow Con^{\{fin\}}(T_2)}$. Ова еквиваленција јесте мета-теоријска (то није теорема ни $\mathbf{T_1}$ ни $\mathbf{T_2}$) и тривијално важи јер су обе стране истините под претпоставком.

(iv) Неколапс: Ни **(i)** ни **(iii)** не имплицирају $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ или $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$.

Доказ 1 (Структурни — директно из Дефиниције 2.3)

(i) и **(ii)** су непосредне последице **DP1**, односно **DP2** (уз Гедела II за **(ii)**).

(iii): Под претпоставком $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$, обе стране бикондиционала су истините у **M**, па је и бикондиционал истинит.

(iv): Претпоставимо, ради контрадикције, да **(i)** + **(iii)** имплицирају $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Тада би, према Дефиницији 2.11 (Аксиом моста) $\mathbf{T_1}$ морао интернализовати доказ из $\mathbf{T_2}$, што захтева $\mathbf{Ax(T_2) \subseteq Ax(T_1)}$ — кршење **DP3.** Симетрично за $\mathbf{T_2}$. Дакле, **(iv)** важи. ■

Доказ 2 (Семантички — кроз звучност)

Нека су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ **звучни** (свака теорема је истинита у стандардном моделу $\mathbb{N}$).

Према **DP1,** $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Како је $\mathbf{T_2}$ звучна и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ је $\mathbf{\Pi_1}$-исказ, доказ у $\mathbf{T_2}$ је онда *звучни сертификат* за $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$: формула је истинита у $\mathbb{N}$.

Звучност имплицира конзистентност (јер **0=1** је лажна формула, па је $\mathbf{T_2}$ не доказује). Дакле $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ важи. Симетрично за $\mathbf{T_1}$. Обе стране **(iii)** су истините у $\mathbb{N}$, па је и еквиваленција истинита у $\mathbb{N}$. Пошто $\mathbb{N} \models \mathbf{PA}$, мета-теорија **M** доказује **(iii).**

(iv) следи по Геделу II ($\mathbf{T_1}$ не може доказати сопствену конзистентност). ■

Напомена: Овај доказ захтева *звучност*, не само конзистентност. То је нешто јача претпоставка од оне у **(iii)** — али је експлицитно наведена.

Доказ 3 (Епистемички — кроз Аксиом моста и кохерентизам)

Овај доказ не покушава да изведе формалну импликацију. Он карактерише *епистемичку структуру* **GH**-пара.

(i) даје два формална сертификата: $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$.

(ii) показује да ниједан систем не може произвести сопствени сертификат.

(iv) осигурава да се сертификати из **(i)** не могу конвертовати у самосертификате (Аксиом моста + **DP3**).

Дакле, структура је *нециркуларна*: сваки сертификат долази споља, ту ниједан не зависи од сопствене валидације.

По кохерентистичком оквиру (Секција 4), ова структура даје епистемичко оправдање за прихватање оба система — под условом независног оправдања за сваки (емпиријски успех, досадашња пракса).

Мета-еквиваленција **(iii)** изражава управо: *прихватање оба система као дела математичке мреже обавезује на прихватање обе конзистентности*. ■

2.4 Снага и неупоредивост

Дефиниција 2.5 (Релативна снага). Кажемо да је $\mathbf{T_2}$ јачи од $\mathbf{T_1}$, пишемо $\mathbf{T_1 < T_2}$, ако:

- Свака теорема $\mathbf{T_1}$ јесте теорема $\mathbf{T_2}$ ($\mathbf{T_1 \subseteq T_2}$ у доказно-теоријском смислу)
- Постоји формула $\boldsymbol{\varphi}$ таква да $\mathbf{T_2 \vdash \varphi}$ али $\mathbf{T_1 \nvdash \varphi}$
- Ово је стандардни појам доказно-теоријске снаге [7].

Дефиниција 2.6 (Неупоредивост). Системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ су неупоредиви по снази [26, 29, 30] ако:

- $\mathbf{T_1 \not\subset T_2}$ ($\mathbf{T_1}$ доказује ствари које $\mathbf{T_2}$ не доказује)
- $\mathbf{T_2 \not\subset T_1}$ ($\mathbf{T_2}$ доказује ствари које $\mathbf{T_1}$ не доказује)

Дефиниција 2.7 (Комплементарна изражајна моћ). $\mathbf{T_1, T_2}$ су комплементарно изражајни ако:

1. Сваки може препознати/интерпретирати структуру другог [23] (мета-математички)
2. Ниједан не садржи аксиоматску основу другог
3. Сваки има изражајну снагу у „димензијама" у којима други нема

Пример: Аритметика може „говорити о" геометрији кроз координатизацију ($\mathbb{N}^2$ као тачке), док опет геометрија може „говорити о" аритметици кроз бројевну праву, али њихове аксиоматске основе су ортогоналне [23].

2.5 Формализација доказа конзистентности

Да бисмо **DP1** учинили прецизним, морамо разјаснити шта би то значило да један систем „доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(\bullet)}$ другог."

Дефиниција 2.8 (Аритметизација). За систем **T** са језиком $\mathcal{L}$ и аксиомима **Ax(T)**:

- Сваком симболу $\mathcal{L}$ се додељује Геделов број
- Свака формула се кодира композиционо
- Сваки доказ се кодира као низ

Ово је стандардно Геделово нумерисање [10, 13], за које се може претпоставити доступност у сваком систему који садржи довољно аритметике (**PA** или јачи).

Дефиниција 2.9 (Формула конзистентности). $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$: $= \neg\exists \mathbf{p}\,[\mathbf{Prf_i(p, \ulcorner \bot \urcorner)}]$ [13] где је $\mathbf{Prf_i(p, \varphi)}$ примитивно рекурзивна релација [10], **p** кодира доказ $\boldsymbol{\varphi}$ у **T**, а $\ulcorner \bot \urcorner$ ту представља Геделов број противречности (типично **0=1**).

Дефиниција 2.10 (Интерпретација). Интерпретација $\mathbf{I: T_1 \to T_2}$ јесте оно пресликавање формула $\mathcal{L}_1$ у формуле $\mathcal{L}_2$ такво да:

- **Ако $T_1 \vdash \varphi$, онда $T_2 \vdash I(\varphi)$**
- **I** очувава логичку структуру [16]

Интерпретација омогућава да T_2 „симулира“ T_1, чиме T_2 може да резонује о конзистентности T_1.

2.6 Принцип моста (bridge): омогућавање међусобне валидације

Критична компонента ових **GH-парова** јесте механизам којим ти међусобни докази конзистентности избегавају кршење Геделове друге теореме [13, 34] о непотпуности. Сада ћемо механизам учинити експлицитним.

2.6.1 Проблем Геделова друга теорема [13, 34] о непотпуности забрањује сваком систему да докаже сопствену конзистентност: **Ако** је **T** конзистентан и довољно снажан, **онда** $T \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$.

Али **GH-парови** захтевају: $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ и $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$

Критично питање: како T_1 „прихвата” доказ конзистентности из T_2, и то без доказивања $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ интерно, што би нарушило Гедела?

Одговор лежи у разликовању интерног доказа од екстерне валидације.

2.6.2 Аксиом моста

Дефиниција 2.11 (Аксиом моста). За **GH-пар** (T_1, T_2), сваки систем укључује аксиом моста такав да омогућава прихватање екстерне валидације:

Аксиом моста за T_1: „**Ако** постоји доказ π у T_2 такав да $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, **онда** и T_1 може препознати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ као екстерно валидиран.”

Аксиом моста за T_2: „**Ако** постоји доказ π у T_1 такав да $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, **онда** ће и T_2 препознавати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ као екстерно валидиран.”

Критично: Ово **НЕ** значи $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ (што би нарушило Гедела). Аксиом моста овде делује на мета-нивоу: T_1 препознаје да је $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ валидиран од стране екстерног система, али без интерног извођења [2, 31].

2.6.3 Формално појашњење Разлика је суптилна али кључна:

Интерни доказ (забрањен по Геделу) [13, 34]**:** $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$

Ово значи: да је унутар доказног система T_1, користећи само аксиоме и правила T_1, могуће извести и $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ као теорему. Ово је немогуће по Геделовој другој теореми о непотпуности.

Екстерна валидација (омогућена аксиомом моста): T_1 прихвата $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ на основу:

$$T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$$

Ово значи: T_1 има мета-принцип (аксиом моста) који му омогућава да верује пресуди T_2 о својој (T_1) **конзистентности**. T_1 не изводи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ из сопствених аксиома; прихвата сведочење T_2.

Аналогија: Никад сведок на суду не може сведочити о својој сопственој кредибилности (што јесте аналогно $T \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$ и забрањено), али може бити валидиран од независног сведока (аналогно T_2 валидира T_1, дозвољено).

2.6.4 Зашто ово не нарушава Гедела Геделова теорема се односи на оно што систем може доказати интерно користећи сопствене аксиоме и правила закључивања. Аксиом моста додатно уводи условно прихватање засновано на екстерним информацијама, а не интерно извођење.

Техничка тачка: аксиом моста може се формализовати као:

$$\mathbf{Axiom}_{\mathbf{Bridge}}(T_1): \exists \pi\, T_2\, [\mathbf{Prf}_2(\pi, \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1))] \rightarrow \mathbf{Accept}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1))$$

где је „**Accept**” мета-ниво суд, а не теорема на објект-нивоу T_1 [2, 31].

2.6.5 Модификација Хилбертовог програма Аксиом моста ту представља прецизну модификацију Хилбертовог програма неопходну за **GH-парове**:

Хилбертов оригинални захтев [17]: Систем **T** треба да докаже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$ користећи ту финитистички метод унутар **T**.

Геделов резултат: Немогуће: $T \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$ за сваки довољно снажан конзистентан **T**.

GH-парови (кроз аксиом моста): $\mathbf{T_1}$ треба да прихвати $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, а кроз екстерну валидацију из $\mathbf{T_2}$, док $\mathbf{T_2}$ прихвата $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ кроз екстерну валидацију из $\mathbf{T_1}$.
Промена је од самопотврде (немогуће) ка међусобној валидацији (није забрањено).
Кључни увид: Хилберт тражи монистичку самодовољност. **GH-парови** постижу само дуалистичку међусобну довољност. **Аксиом моста (bridge)** је формални механизам који омогућава овај помак.

2.6.6 Својства аксиома моста (bridge)
Пропозиција 2.2 (Аксиом моста је конзервативан). Додавање аксиома моста у $\mathbf{T_1}$ не чини $\mathbf{T_1}$ ништа неконзистентнијим (под претпоставком да су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ појединачно конзистентни).

Доказ 1 (Комплетан - кроз очување модела):
Нека је $\mathbf{M_1}$ произвољан модел теорије $\mathbf{T_1}$ пре додавања аксиома моста.
Аксиом моста има форму: $\mathbf{\exists\pi[\ Prf_{T_2}(\pi, Con^{\{fin\}}(T_1))] \rightarrow Accept(Con^{\{fin\}}(T_1))}$
Ово је **условна тврдња** која постаје активна само ако антецедент важи.
Случај 1: Ако $\mathbf{T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$, **онда** антецедент није задовољен у $\mathbf{M_1}$, па ни аксиом моста не додаје ништа. Модел $\mathbf{M_1}$ остаје модел проширене теорије $\mathbf{T_1 + Bridge}$.
Случај 2: Ако $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{T_1}$ је стварно конзистентан, **онда** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ мора бити истинита формула. Прихватање истините формуле не уводи противречност, а модел $\mathbf{M_1}$ се може проширити да задовољава $\mathbf{Accept(Con^{\{fin\}}(T_1))}$ без губитка конзистентности.
Случај 3: Ако је $\mathbf{T_1}$ већ неконзистентан, **онда** га додавање било чега (укључујући ту аксиом моста), не може учинити „још неконзистентнијим" - он већ доказује све.
У свим случајевима, аксиом моста је **конзервативан**. ■

Доказ 2 (Кроз синтаксичку анализу):
Аксиом моста не уводи нове **примитивне** аксиоме - он је **условно правило прихватања**.
Формално, можемо га третирати као **мета-принцип** који не проширује скуп аксиома $\mathbf{Ax(T_1)}$, он само дефинише **критеријум прихватања** за формуле доказане споља.
Пошто не постоји **деривационо правило** које би из аксиома моста извело $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и то без већег спољашњег доказа $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$. а аксиом моста не може интерно генерисати нове теореме.
Следствено, ако је $\mathbf{T_1}$ био конзистентан пре додавања, остаје конзистентан и после. ■

Доказ 3 (Кроз prf-theoretic (доказно теоријске) ординале):
Нека је $\mathbf{Ord(T_1)}$ **prf-theoretic ординал** теорије $\mathbf{T_1}$.
Аксиом моста не повећава $\mathbf{Ord(T_1)}$ зато што не уводи нове трансфинитне индукционе принципе нити рефлексивне шеме које би захтевале веће ординале.
Он само **условно региструје** екстерну информацију без интерне деривације.
Пошто О$\mathbf{rd(T_1 + Bridge) = Ord(T_1)}$, а конзистентност јесте строго корелисана са ординалном снагом, [26, 29, 30] аксиом моста је конзервативан. ■

Пропозиција 2.3 (Аксиом моста поштује Гедела). Аксиом моста не омогућава $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$.

Доказ 1: Аксиом моста је мета-ниво условног прихватања, а не правило извођења на објект-нивоу. $\mathbf{T_1}$ и може прихватити $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ екстерно, али не може интерно извести $\vdash_{\{T_1\}}$ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Овде је разлика између „прихватања" и „интерног доказивања" остала очувана [13]. ■

Доказ 2 (Кроз формално ограничење мета-принципа и неупоредивост):
Нека $\mathbf{Accept_1(\varphi)}$ буде мета-предикат дефинисан у $\mathbf{T_1}$ као: $\mathbf{Accept_1(\varphi)}$ ако и само ако $\mathbf{\exists\pi\ [Prf_2(\pi, \varphi)]}$ и важи аксиом моста $\mathbf{Bridge_1}$.
Кључно својство овог предиката је његова синтаксичка непроширивост: он ту не производи $\mathbf{T_1}$-доказ, већ само промену епистемичког статуса у оквиру мета-теорије. Ипак, да би се $\mathbf{Accept_1(Con^{\{fin\}}(T_1))}$ претворило у $\mathbf{Prf_1(\ulcorner\ Con^{\{fin\}}(T_1)\ \urcorner)}$, било би неопходно да $\mathbf{T_1}$ интернализује укупан доказни систем $\mathbf{T_2}$, укључујући ту и све његове аксиоме. То би захтевало $\mathbf{Ax(T_2) \subseteq Ax(T_1)}$, што директно крши услов неупоредивости **DP3** из Дефиниције 2.3.

Дакле, аксиом моста (bridge) остаје безбедан као мета-принцип: омогућава рефлексивно прихватање конзистентности, али не и интерно извођење. Тиме се поштује и слово и дух Геделове друге теореме. Оваква анализа открива и једну дубоку везу између механизма међусобне валидације и структурне ортогоналности система — једно гарантује друго. ■

Доказ 3 (Кроз немогућност затварања под дедукцијом):

Претпоставимо, ради контрадикције, да аксиом моста омогућава $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$.

Тада би постојао низ формула $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi^e = \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$ и то такав да свака φ_i или аксиома $\mathbf{T_1}$, или произилази из претходних применом правила закључивања. Али аксиом моста не уводи $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$ као аксиому - он само каже „**ако** постоји доказ у $\mathbf{T_2}$, **онда** прихвати".

Али за израђивање деривације $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$, морамо укључити корак који **материјализује** доказ из $\mathbf{T_2}$ као теорему $\mathbf{T_1}$, што би захтевало **правило увођења** облика: „**ако** $\mathbf{T_2} \vdash \psi$, **онда** $\mathbf{T_1} \vdash \psi$", што је потпуна интерпретација $\mathbf{T_2}$ у $\mathbf{T_1}$ - забрањена условом неупоредивости [26, 29, 30].

Дакле, аксиом моста не ствара затворену дедуктивну путању ка $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$, чиме поштује Геделову забрану [13, 34]. ■

2.6.7 Имплементација у Гедел–Хилберт (GH) паровима

При конкретним конструкцијама Bridge аксиома (мост) добија специфичне форме:

Bridge аксиома за $\mathbf{T_1}$ (условна форма, у складу са Дефиницијом 2.11):

- $\exists \pi\ \mathbf{Prf_1}(\pi, \ulcorner \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1}) \urcorner) \rightarrow \mathbf{Accept_1}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1}))$

Bridge аксиома за $\mathbf{T_2}$:

- $\exists \pi\ \mathbf{Prf_1}(\pi, \ulcorner \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_2}) \urcorner) \rightarrow \mathbf{Accept_2}(\mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_2}))$

где је $\mathbf{Accept_i}$ мета-предикат (није формула у језику $\mathbf{T_i}$).

2.6.8 Епистемолошки значај Аксиом моста оличава епистемолошки став **GH-парова**:

Фондационализам: Знање почива на самоочигледним темељима (није потребна екстерна подршка) → Несагласно са аксиомом моста

Кохерентизам: Знање почива на међусобној подршци унутар кохерентне мреже; екстерна валидација је легитимна) → Сагласно са аксиомом моста [6, 28] ✓

Аксиом моста је формални израз кохерентистичког оправдања примењеног на формалне системе. Он омогућава међусобну валидацију без порочне кружности јер:

- Сваки систем има независно оправдање (сопствену интерну валидност)
- Међусобна валидација додаје потврђујући доказ
- Нема бесконачног регреса (структура је коначна: само два система)

Резиме Одељка 2.6: Аксиом моста је формални механизам који омогућава **GH-паровима** постизање међусобне валидације конзистентности без нарушавања Геделове друге теореме о непотпуности. Он представља прецизну модификацију Хилбертовог програма све од његове монистичке самопотврде ка дуалистичкој међусобној валидацији. Аксиом моста је конзервативан (не уводи неконзистентност) и поштује Гедела (не омогућава самодоказ), али он обезбеђује недостајућу везу између концептуалне идеје **GH-парова** и њихове формалне реализације [2, 31].

---

3. ТЕОРИЈСКИ ОКВИР

Сад анализирамо теоријске импликације **GH-парова** кроз призму доказно-теоријске неупоредивости. Доказујемо и да одсуство формалне забране у Геделовим теоремама отвара пут ка новој таксономији формалних система, где симетрија постаје кључни фактор стабилности.

ALP се може посматрати као билатерално проширење класичних принципа рефлексије [2, 31]. Док је стандардна рефлексија једносмерна - јачи систем потврђује исправност слабијег - **GH-оквир** намеће симетрично ограничење допустености. На тај начин трансформише доказно-теоријску асиметрију у епистемичку равнотежу.

3.1 Одсуство логичке забране

Сада доказујемо наш први главни теоријски резултат.

Теорема 3.1 (Нема познате забране). Не постоји ниједна позната теорема у математичкој логици, која би, принципијелно, забранила постојање **GH-парова**.

Ово је негативан резултат - одсуство доказа за немогућност — а не позитиван доказ постојања. Ипак, философски је доста значајан. Тим се утврђује да **GH-парови** нису искључени у оквиру разматраних формалних теорија, односно да су у том смислу логички отворена класа објеката.

Доказ 1 (Логика интерпретабилности IL/ILM):

- **Поставка:** Нека су $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ рекурзивно аксиоматизовани системи са предикатима доказивости $\mathbf{Prf_i}$. У **IL/ILM** користимо модални оператор ▷ (интерпретабилност): $\mathbf{U \triangleright V}$, читај „**U** интерпретира **V**".
- **Апстракција:** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$ је $\mathbf{\Pi_1}$-исказ; тврђење „$\mathbf{T_1}$ доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$" који се у **IL** моделира као $\Box_1\neg\Box_2\bot$. Међусобна конзистентност даје шему: $\Box_1\neg\Box_2\bot$ и $\Box_2\neg\Box_1\bot$.

Кључ:

У **IL/ILM** не постоји теорема која из двосмерног „интерпретабилност/доказивост конзистентности" извлачи самоконзистентност $\Box i\neg\Box i\bot$. Разлог: аксиоме **IL** контролишу трансфер доказивости дужи **d**, али сви резултати саморефлексије (Лебов тип) траже исти индекс; смеша индекса $\mathbf{1\leftrightarrow 2}$ не имплицира самореференцију [22] (**IL = Interpretability Logic, ILM = Logic of Interpretability**).

Формално: Ако би важило $\Box_1\neg\Box_2\bot\wedge\Box_2\neg\Box_1\bot\vdash\Box_1\neg\Box_1\bot$, добили би шему која крши деривабилност у **IL** (за исту „кутију") јер **IL** нема никавог правила које идентификује индексе без додатне премисе $(\Box_1\varphi\leftrightarrow\Box_2\varphi)$.

Закључак: У **IL/ILM** не постоји „Принцип асиметричне нужности", такав који би забрањивао **GH-кружност**; отуд нема ни логичке забране **GH-парова** [3, 34]. ■

Постоји двомодални **GL-модел** (Gödel-Löb модална логика) [16, 34] и то са одвојеним релацијама приступачности $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ и валуацијом у ком су тачни $\Box_1\neg\Box_2\bot$ и $\Box_2\neg\Box_1\bot$, али не и $\Box_1\neg\Box_1\bot$ нити $\Box_2\neg\Box_2\bot$. Ово формално показује да је могућа **међусобна конзистентност без самоконзистентности** у доказивосној модалној логици.

Доказ 2 (Аритметичка конзервативност Π_1-исказа):

Поставка: Нека су $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ системи над базом **B** (нпр. $\mathbf{I\Sigma_1}$), такви да су међусобно $\mathbf{\Pi_1}$-конзервативни над **B**. То јест: за сваки $\mathbf{\Pi_1}$-исказ χ, ако $\mathbf{T_1}\vdash\chi$ онда $\mathbf{B}\vdash\chi$, и аналогно за $\mathbf{T_2}$.

Теза: Ако су **GH-услови** формулисани искључиво преко $\mathbf{\Pi_1}$-исказа (конзистентност, аритметизација доказа), тада ова „опасна" ескалација ка самоконзистентности захтева излазак из $\mathbf{\Pi_1}$-нивоа (макар $\mathbf{\Sigma_2}$-рефлексију), што се не може добити чисто логички.

Претпоставимо $\Box_1\neg\Box_2\bot$ и $\Box_2\neg\Box_1\bot$. Ово су $\mathbf{\Pi_1}$-искази у аритметици. Али тај $\Box_1\neg\Box_1\bot$ захтева унутрашњу рефлексију $\mathbf{\Sigma_1}$-коректности за $\mathbf{Prf_1}$, која није доступна из $\mathbf{\Pi_1}$-конзервативности без додатних аксиома. Према томе, немогуће је чисто логички подићи ниво на $\Box_1\neg\Box_1\bot$.

Закључак: $\mathbf{\Pi_1}$-конзервативност као мета-хипотеза осигурава да ови међусобни $\mathbf{\Pi_1}$-докази не могу да генеришу самоконзистентност; нема логичке забране **GH-пара** [10, 13]. ■

Доказ 3 (Настављамо са испитивањем потенцијалних извора забране):

Лема 3.1.1 (Гедел II и циклуси). Геделова друга теорема о непотпуности [13, 34] која каже: **Ако** је **T** конзистентан и довољно снажан (способан да формализује аритметику и синтаксу), **онда:**

$$\mathbf{T} \nvdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$$

Ово забрањује самореферентне доказе конзистентности. Међутим, строго говорећи, дата теорема се односи на један систем и његов однос према самом себи. Она не тврди ништа о циклусима облика:

$$\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)},\ \mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_3)},\ \ldots,\ \mathbf{T_n} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$$

Доказ 1 (Кроз немогућност унутрашње интернализације мета-конзистентности):

Геделова конструкција користи дијагонализацију и самореференцију. За овај циклус $\mathbf{T_1 \to T_2 \to T_1}$, дијагонализација у $\mathbf{T_1}$ референцира $\mathbf{T_1}$, а не $\mathbf{T_2}$. Овај циклус није самореференца у техничком смислу који Геделов доказ захтева.

Можемо ли применити Гедела итеративно? Претпоставимо $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$. Ако

$\mathbf{T_1}$ може „интернализовати" доказ из $\mathbf{T_2}$, зар не би индиректно доказао и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$?
Не нужно. Да би $\mathbf{T_1}$ интернализовао доказ $\mathbf{T_2}$ о $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, $\mathbf{T_1}$ би морао да:

- **Докаже:** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ (дато **DP1**)
- **Формализује импликацију:** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2) \rightarrow (T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1) \rightarrow Con^{\{fin\}}(T_1))}$
- **Закључи:** $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$

Корак 2 је суптилан. Да ли то $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ имплицира да је све што $\mathbf{T_2}$ доказује истинито? Само ако имамо формализовану исправност $\mathbf{T_2}$ унутар $\mathbf{T_1}$. А формализовање исправности захтева семантичке појмове (истина) јаче од синтаксе, што захтева да $\mathbf{T_1}$ буде значајније јачи од $\mathbf{T_2}$. Ако су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ неупоредиви, $\mathbf{T_1}$ можда нема ресурсе да формализује исправност $\mathbf{T_2}$.
Кључна логичка брана лежи у чињеници да $\mathbf{T_1}$ не поседује својство $\mathbf{\Sigma_1}$-адекватности за систем $\mathbf{T_2}$; он препознаје $\mathbf{T_2}$ као синтаксичку машину која избацује исказ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, а без мета-теоријског ресурса којим би потврдио да је сваки доказ из $\mathbf{T_2}$ нужно истинит у стандардном смислу. ■

Доказ 2 (Кроз Геделову баријеру интерне рефлексије):
Ово се може још даље формализовати користећи резултате о независности рефлексивних принципа (видети [10, 26]). Нека $\mathbf{Prf_i(x)}$ буде предикат доказивости за $\mathbf{T_i}$. Канонична Геделова реченица $\mathbf{G}$ за систем $\mathbf{T}$ има облик $\mathbf{\forall x \neg Prf_i (x, \ulcorner G \urcorner)}$. У предлаганом циклусу, $\mathbf{T_1}$ би доказивало тврдњу облика $\mathbf{\forall x \neg Pr_2(x, \ulcorner \psi \urcorner)}$ где је ψ нека тврдња о $\mathbf{T_1}$, али не и директну самореферентну формулу $\mathbf{\forall x \neg Prf_1(x, \ulcorner \varphi \urcorner)}$ за неку φ из $\mathbf{T_1}$. Теореме о независности показују да системи могу доказивати конзистентности које су међусобне а да притом не доказују сопствене локално конструисане независне реченице (као што су Росерове варијанте Геделових реченица) [11, 26]. Прецизније речено, могли би се конструисати парови система $\mathbf{(T, U)}$ такви да $\mathbf{T \vdash Con^{\{fin\}}(U)}$ и $\mathbf{U \vdash Con^{\{fin\}}(T)}$, али притом $\mathbf{T \nvdash Con^{\{fin\}}(T)}$ и $\mathbf{U \nvdash Con^{\{fin\}}(U)}$. Кључна разлика је у томе што докази $\mathbf{Con^{\{fin\}}(U)}$ у $\mathbf{T}$ и $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$ у $\mathbf{U}$ дијагонализацију у односу на сопствени систем не користе, већ само на онај други, што им и омогућава да заобиђу ограничења наметнута Геделовом II теоремом о непотпуности за сваки систем понаособ [13, 34]. ■

Доказ 3 (Кроз семантичку интерпретацију модела):
Геделова конструкција захтева да систем $\mathbf{T}$ конструише формулу $\mathbf{G_T}$ која „говори о себи":

$$\mathbf{G_T \leftrightarrow \neg Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner)}.$$

У циклусу $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$, свака формула „говори о другом систему", не о себи.
Конкретно, нека је $\mathbf{M_1}$ стандардни модел $\mathbf{T_1}$. У $\mathbf{M_1}$, формула $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ тврди „не постоји коначан доказ контрадикције у $\mathbf{T_2}$" - ово је тврдња о **екстерном** систему.
Када $\mathbf{T_2}$ доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, то се у $\mathbf{M_1}$ интерпретира као „постоји објекат који репрезентује доказ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ у $\mathbf{T_2}$" - али $\mathbf{M_1}$ не може директно „увући" овај објекат назад као сопствени доказ.
Разлог: Семантичка интерпретација $\mathbf{T_2}$-доказа у $\mathbf{M_1}$ захтева **trust assumption** о исправности $\mathbf{T_2}$, што $\mathbf{T_1}$ не може формализовати без излажења изван Геделових ограничења [13, 16, 34]. ■

Доказ 4 (Кроз prf-theoretic complexity (доказно-теоријска сложеност)):
Нека $\mathbf{|T|}$ буде Колмогоровска сложеност [19] (минимална дужина описа) система $\mathbf{T}$.
Геделова дијагонализација за $\mathbf{T \vdash Con^{\{fin\}}(T)}$ конструише формулу $\mathbf{G_T}$ чија сложеност расте са $\mathbf{|T|}$ - што је систем сложенији, дијагонална формула је дужа.
У циклусу $\mathbf{T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1}$, свака конзистентност-тврдња $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_i)}$ има сложеност пропорционалну $\mathbf{|T_i|}$.
Међутим, да би $\mathbf{T_1}$ интернализовао $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и извео $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$, морао би да:

- Кодира цео $\mathbf{T_2}$ унутар себе (сложеност $\mathbf{|T_2|}$)
- Симулира $\mathbf{T_2}$-доказ (додатна сложеност $\mathbf{O(|T_2|^2)}$)
- Извлачи закључак (додатна сложеност)

Укупна сложеност овог „индиректног" доказа би била >> $\mathbf{|T_1|}$, а то премашује лимит који Геделов аргумент поставља за директан доказ $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ у $\mathbf{T_1}$.
Дакле, чак и да циклус постоји, $\mathbf{T_1}$ не може ефикасно конвертовати екстерну валидацију у интерни доказ [10, 26]. ■
Закључак Леме 3.1.1: Гедел II се не проширује очигледно да забрани циклусе [13, 34]. □

Овде наглашавамо да сви резултати у §3.1 имају статус метатеоријских тврдњи о одсуству познатих формалних забрана у оквиру стандардних система доказивости (**IL/ILM, GL**, аритметичка теорија доказа). Ниједна од, овде наведених, лема не тврди постојање **GH-парова** у објектној теорији нити имплицира њихову конструкцију. Све употребљене модалне и аритметичке интерпретације односе се на релативну доказивост и интерпретабилност, а не на апсолутну семантичку гаранцију постојања структура.
Дакле, §3.1 успоставља само „простор дозвољености" GH-конфигурација, а не њихову реализацију.

Лема 3.1.2 (Генцен и симетрија).
Генценов резултат [12], о доказивости конзистентности **PA** у систему **PRA + TI(ε_0)** , није искључио могућност симетричних конфигурација где два система доказују конзистентност један другог.

Доказ 1 (Кроз асиметрију интерне и екстерне рефлексије):
Генценов резултат [12] показује: **PRA + TI(ε_0)** $\vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}$**(PA)**
Ово је асиметрично: **PRA + TI(ε_0)** и не може доказати све што **PA** доказује (недостаје му пуна шема индукције), али доказује конзистентност **PA** јер има приступ трансфинитној индукцији до **ε_0.** Генцен показује да систем „слабији у димензији **X**, јачи у димензији **Y**" може доказати конзистентност оног „јачег у **X**, слабијег у **Y**." Ово доказује могућност нестандардних односа снаге. Али не доказује да је асиметрија неопходна. ■
Генценов резултат [12], је једна тачка података и он не искључује могућност других конфигурација где међусобна доказивост важи.

Доказ 2 (Кроз структурну разлику између система и мета-система):
Генценов резултат [12] показује да **PRA + TI(ε_0)** доказује $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$**(PA)**, иако **PRA + TI(ε_0)** не садржи пуну **PA** индукцију. Ово илуструје **ортогоналност доказних ресурса**: **PA** јесте јака у индуктивној димензији (пуна шема индукције за све формуле), док је **PRA + TI(ε_0)** јака у ординалној димензији (трансфинитна индукција до **ε_0**).
Формално, можемо представити „снагу" система као вектор **(I, O)** где:

- **I** = индуктивна снага (колико формула покрива индукциона шема)
- **O** = ординална снага (до ког ординала иде трансфинитна индукција)
- **PA**: **(∞, ω)** - бесконачна индукциона шема, али само до коначних ординала **PRA + TI(ε_0)**: **(finite, ε_0)** - коначна шема, али до већег ординала

Генцен показује [12] да систем са векторима **($\mathbf{I_1}$, $\mathbf{O_1}$)** и **($\mathbf{I_2}$, $\mathbf{O_2}$)** где $\mathbf{I_1} < \mathbf{I_2}$ али $\mathbf{O_1} > \mathbf{O_2}$ може имати и **асиметричну** релацију доказивости конзистентности.
Међутим, ништа у овој анализи не искључује да два система са векторима **($\mathbf{I_1}$, $\mathbf{O_1}$)** и **($\mathbf{I_2}$, $\mathbf{O_2}$)** где су те димензије „укрштене" на другачији начин могу имати **симетричну** релацију [12, 26, 29, 30]. ■

Доказ 3 (Кроз контрапозицију интерналне доказивости):
Генценов резултат [12] не успоставља **тотално уређење** система по снази.
Да би **GH-парови** били немогући, морало би постојати тотално уређење ≤ на свим системима такво да: $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_2}) \rightarrow \mathbf{T_1} > \mathbf{T_2}$
Међутим, у **prf-theory** је познато да системи нису тотално уређени по снази [26, 31].
Конкретан пример: Постоје системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ такви да:

- $\mathbf{T_1}$ може доказати неке аритметичке тврдње које $\mathbf{T_2}$ не може
- $\mathbf{T_2}$ може доказати неке друге аритметичке тврдње које $\mathbf{T_1}$ не може
- Ниједан не „доминира" другог у тоталном смислу

Генценов **PRA + TI(ε_0)** vs **PA** је један такав пример [12], али постоје и други (нпр. **HA** vs **PA**).
Одсуство тоталног уређења значи да не можемо *a priori* искључити **симетричне** конфигурације где $\mathbf{T_1} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_2})$ и $\mathbf{T_2} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{T_1})$ истовремено важе [12, 31]. ■
Закључак Леме 3.1.2: Генцен показује да асиметрични случајеви постоје; не доказује да је симетрија немогућа [12, 26, 29, 30]. □

Лема 3.1.3 (Одсуство принципа асиметричне нужности). Да би **GH-парови** били немогући морала би постојати општа мета-теорема облика:

PAN (Принцип асиметричне нужности): $\forall T_1, T_2 [(T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)) \rightarrow (T_2 \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1))]$
„Ако један систем доказује конзистентност другог, обрнуто не може важити."
Тврдимо: **PAN** није познат као истинит.

Доказ 1 (Кроз преглед литературе и познатих резултата):

1. **PAN** није наведен у стандардним уџбеницима (Enderton, Kunen, Boolos–Jeffrey [7])
2. **PAN** није последица Геделових теорема о непотпуности [13]
3. **PAN** није последица Лебове теореме [22] или других познатих принципа рефлексије
4. **PAN** се не појављује у литератури доказне теорије (Pohlers [26], Rathjen [31], Feferman [10])

Може ли **PAN** бити доказан? Доказ би, вероватно, захтевао показивање да докази конзистентности не стварају нужно асиметричан „градијент снаге." Али Генценов резултат [12] већ показује да је и снага мулти-димензионална. Ниједна, досад позната, теорема не утврђује да све показане димензије морају бити асиметрично поравнате за доказе конзистентности. ■
Закључак Леме 3.1.3: PAN није утврђен [10, 26, 31]. □

Доказ 2 (Конструкција симетричних рефлексивних система).
Конструишемо експлицитан пример два система који задовољавају услове међусобне доказивости конзистентности, чиме показујемо да **PAN** није нужан.
Нека је **S** довољно јака базна теорија (нпр. **PRA**). Дефинишимо два скупа аксиома:

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{Con}^{\{fin\}}(S \cup \mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_2))\}$$
$$\Gamma_2 = \{\mathbf{Con}^{\{fin\}}(S \cup \mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_1))\}$$

Ово је корекурзивна дефиниција, али би се могла решити техником фиксне тачке (Клинијева теорема рекурзивне фиксне тачке) [10].
Сада дефинишемо:

$$T_1 = S + \mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_2) + \Gamma_1$$
$$T_2 = S + \mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_1) + \Gamma_2$$

Својства:
T_1 садржи $\mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_2)$, што му и омогућава резоновање о исправности $S \cup \Gamma_2$. Пошто $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ тврди конзистентност $S \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, T_1 може да докаже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ користећи $\mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_2)$ [10, 31].
Симетрично, $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ користећи $\mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_1)$.
Ниједан систем не садржи потпуни **RFN** другог, јер је $\mathbf{RFN}(S \cup \Gamma_i)$ ограничен само на сопствени скуп аксиома (**RFN(S) =** рефлексиони принцип за систем **S**).
По конструкцији, T_1 и T_2 нису упоредиви по инклузији.
Ова конструкција показује да симетрични парови нису *a priori* искључени. Али чињеница да је таква конструкција, уз одговарајућу технику фиксне тачке [10], могућа и даље указује да **PAN** није логичка нужност. ■

Доказ 3 (Кроз модалну логику доказивости):
У модалној логици доказивости **GL** (Gödel-Löb), постоји Лебова теорема [22]: $\mathbf{GL} \vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$.
Међутим, за **два** модална оператора $\Box_1$ и $\Box_2$, **GL** не садржи аксиому облика: $\Box_1\varphi \rightarrow \neg\Box_2\neg\varphi$ (доказује један → не побија други)
Да би **PAN** важио, требало би да постоји модална аксиома: $\Box_1\neg\Box_2\bot \rightarrow \neg\Box_2\neg\Box_1\bot$
Али таква аксиома није део стандардног **GL**, нити било које познате бимодалне логике доказивости [16, 34].
Штавише, постоје Крипке модели за бимодалне системе где су **оба** $\Box_1\neg\Box_2\bot$ и $\Box_2\neg\Box_1\bot$ истинита у неком свету.
Ово формално показује да **PAN** није логичка нужност [16, 34]. ■
Закључак Теореме 3.1: Пошто:

- Гедел забрањује само $T \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$, а не циклусе
- Генцен показује да су нестандардни односи могући, а не да је асиметрија неопходна
- **PAN** није доказан

Закључујемо: Не постоји позната теорема која забрањује **GH-парове** [10, 12, 13, 26, 31]. □

Лема 3.1.4 (О немогућности индиректне самореференце).

Нека су $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ рекурзивно аксиоматизовани, довољно снажни (садрже Робинсонову аритметику **Q**) [33] и конзистентни формални системи.

Тада из $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ **не следи** да $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$.

Доказ 1 (Кроз контрапозитив и prf-theoretic ординале):

Доказаћемо контрапозитив: **Ако** $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$, **онда** не важи истовремено $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ под уобичајеним претпоставкама о односу снаге.

Претпоставимо, контрадикторно, да важи:

1. $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (кршење Гедела II [13])
2. $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
3. $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$

Из (1) и (2), применом унутрашње логике $\mathbf{T_1}$, већ имамо $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1) \wedge Con^{\{fin\}}(T_2)}$. Ако $\mathbf{T_1}$ има довољну снагу да формализује **дијагонализацију преко** $\mathbf{T_2}$, могло би да се изведе некаква хибридна Геделова реченица. Да бисмо то спречили, морамо размотрити услове.

Користимо теорему о **релативној** $\mathbf{\Sigma_1}$**-комплетности** [10]. **Ако** $\mathbf{T_2}$ може да докаже $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, **онда** постоји $\mathbf{\Sigma_1}$-формула **Prf*** таква да за сваку формулу φ, **ако** $\mathbf{T_1 \vdash \varphi}$ **онда** $\mathbf{T_2 \vdash Prf^*(\ulcorner \varphi \urcorner)}$. Међутим, ако би $\mathbf{T_1}$ имао довољну снагу да интерпретира овај $\mathbf{\Sigma_1}$-предикат **Prf*** и да из $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ закључи да су све формуле доказиве у систему $\mathbf{T_2}$ истините, онда би из $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ могао да закључи $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ **и без коришћења (1)**. Али тада би $\mathbf{T_1}$ имао алтернативни пут до $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и то пут који нигде не користи директну самореференцу, што је супротно **Геделовој другој теореми о непотпуности у јачем облику**, која и тврди да чак и индиректни докази сопствене конзистентности, докази који не користе дијагонализацију експлицитно, захтевају прекорачење одређених доказно-теоријских ординала [34].

Конкретно, по теореми о **слабој рефлексији**, ако је систем **T** могао доказати конзистентност другог система **T** који је сам способан да докаже конзистентност **T,** онда и доказно-теоријски ординал од **T** мора бити строго већи од ординала од **T** [29, 30]. А **ако** $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ међусобно доказују конзистентност, **онда** би морало важити $\mathbf{Ord(T_1) > Ord(T_2)}$ и $\mathbf{Ord(T_2) > Ord(T_1)}$, што је контрадикција. **Претпоставке (1) и (2) и (3) заједно воде у контрадикцију у доказно-теоријској хијерархији.** Стога, **ако** и (2) и (3) важе (што дефинише **GH-пар**), **онда** (1) не може важити. Односно, из (2) и (3) не следи (1). Овај доказ се потпуно ослања на дубоке резултате доказне теорије [26, 29, 30, 34] и показује да је овде механизам индиректне самореференције **блокиран на нивоу ординалне снаге**, чиме се још додатно брани интегритет **GH-пара.** ■

Доказ 2 (Кроз $\mathbf{\Sigma_1}$**-комплетност):**

Претпоставимо $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$.

По теореми о $\mathbf{\Sigma_1}$-комплетности [10], **ако** $\mathbf{T_2}$ доказује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$, **онда** постоји $\mathbf{\Sigma_1}$-формула φ, таква да $\mathbf{T_2 \vdash \varphi}$ имплицира да φ важи у стандардном моделу аритметике.

Међутим, $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ је $\mathbf{\Pi_1}$-формула (универзална квантификација преко кодова доказа). Ако би $\mathbf{T_1}$ могао да „извуче назад" ову информацију кроз интерпретацију $\mathbf{T_2}$, морао би да конвертује $\mathbf{\Pi_1}$-садржај у $\mathbf{\Sigma_1}$-садржај, што захтева рефлексивни принцип јачи од саме $\mathbf{T_1}$.

Дакле, $\mathbf{T_1}$ не може доказати $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ чак ни индиректно кроз $\mathbf{T_2}$. ■

Доказ 3 (Кроз семантичку независност):

Разматрамо стандардне моделе $\mathbf{N_1}$ и $\mathbf{N_2}$ система $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$.

Ако $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$, **онда** у сваком моделу $\mathbf{M \models T_1}$ важи интерпретација $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_2)}$.

Међутим, ако би $\mathbf{T_1}$ могао доказати $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ користећи чињеницу да $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$, то значи да постоји формула ψ у $\mathbf{T_1}$ таква да ψ кодира „постоји модел $\mathbf{T_2}$ који верификује $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T_1)}$ ".

Али по Геделовој теореми о непотпуности [13, 34], $\mathbf{T_1}$ не може конструисати сопствени канонски модел сам унутар себе. Дакле, не може „видети" $\mathbf{T_2}$-ов модел који га верификује без излажења ван

сопствених граница. ■
Напомена: То нису докази да **GH-парови** постоје [6, 23], али показују да их савремена математичка логика не искључује у принципу. Конструктивни проблем остаје, још увек, у потпуности отворен.

3.2 Неопходност неупоредивости

Наш други главни теоријски резултат утврђује ограничење за **GH-парове**.

Теорема 3.2 (Неопходна неупоредивост).
Ако је **(T_1, T_2) GH-пар**, **онда T_1** и **T_2** морају бити неупоредиви по доказно-теоријској снази.

Доказ 1. Претпоставимо ради контрадикције да важи $T_2 \subsetneq T_1$ (строга инклузија: T_1 је строго јачи). По генерализованој Геделовој другој теореми о непотпуности [13, 34]: **Ако** је $T_2 \subsetneq T_1$ и оба су довољно снажна, **онда:** $T_2 \nvdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$

Резоновање: **Ако** систем T_2 може доказати $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, а $T_2 \subsetneq T_1$, **онда** би T_1 доказивао $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$ (јер све што је доказиво у T_2 доказиво је и у T_1). Али ово противречи Геделу II [13, 34] примењеном на T_1.

Међутим, услов **DP1** захтева: $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, што је директна контрадикција.

Симетрично, ако је $T_1 \subsetneq T_2$, добијамо контрадикцију са другим правцем **DP1**.

Стога, ни $T_1 \subsetneq T_2$ ни $T_2 \subsetneq T_1$ не могу важити. По Дефиницији 2.6, T_1 и T_2 морају бити неупоредиви. ■

Доказ 2 (ординална полу-доминација)

- **Поставка:** Нека су T_1, T_2 рекурзивни системи са ординалним инваријантама доказне снаге као $\mathbf{Ord}(T_1)$, $\mathbf{Ord}(T_2)$, дефинисаним кроз редукцију трансфинитне индукције [26, 29, 30, 31] (нпр. преко ε_0, Γ_0, итд.). Претпоставимо да је $T_1 \subsetneq T_2$ и $\mathbf{Ord}(T_1) < \mathbf{Ord}(T_2)$.
- **Тврђење: Ако $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, онда $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$.**
- **Механизам:** Већа ординална снага у T_2 омогућава интернализацију Σ_1-коректности за доказе у T_1. $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ је Π_1-исказ; из $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ следи $\exists p\, \mathbf{Prf}_1(p, \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2))$. Како овде T_2 симулира сваку трансфинитну рекурзију коју T_1 користи да формира доказ, онда T_2 доказује да је овај **p** коректан код — дакле $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ у T_2.
- **Формално:** Ординална доминација даје шему локалне рефлексије: за све Π_1-формуле χ, **ако** је $T_1 \vdash \chi$ **онда** $T_2 \vdash \chi$. Применом на $\chi := \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ добијамо $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, противречност са Геделом.

Закључак: Укључење/доминација руши **GH**; неопходна је неупоредивост [26, 29, 30, 31]. ■

Доказ 3 (Семантички аргумент кроз моделе). Претпоставимо, контрадикторност, да је $T_1 \subsetneq T_2$. Размотримо онда још и семантичку перспективу. Услови **GH-пара** захтевају $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ и $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$. Да би $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ важило, **сваки** модел **M** система T_1 мора да задовољава тврдњу $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$. Сасвим конкретно, у **M** мора да постоји (можда некакав нестандардни) природан број који кодира T_2-доказ контрадикције само ако T_2 заиста није конзистентан. Међутим, пошто је T_2 јачи, он би могао имати моделе које T_1 не може да „види" или симулира у пуном обиму — може постојати модел **M** од T_1 који **није** проширив до модела T_2. У таквом **M**, тврдња $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$ би била лажна, јер би у **M** постојао, неки нестандардни доказ неконзистентности T_2. Дакле, T_1 не би могло да докаже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, што би било у супротности са **DP1.** Овај семантички увид показује да услов неупоредивости није само доказно-теоријска формалност, већ **онтолошка препрека**: слабији систем, од ова два, не може да гарантује конзистентност јачег система ако не може да обухвати семантички простор у ком овај јачи систем живи. Зато је неупоредивост неопходна — јер она и осигурава да се семантички светови система довољно преклапају да међусобна конзистентност буде видљива, али не и толико да један доминира другим [16, 23]. ■

Королар 3.2.1. GH-парови не могу постојати унутар стандардне теоријско-множинске хијерархије **PA ⊊ ZFC ⊊ ZFC+IC ⊊ ...** [7, 23] где **IC** означава недостижне кардинале, итд.

Доказ 1 (Кроз монотоност интерпретабилности):

У стандардној хијерархији **PA ⊊ ZFC ⊊ ZFC+IC ⊊ ...**, сваки систем је **проширење** претходног - садржи све њене аксиоме плус додатне.
Ако $T_1 \subseteq T_2$ (сви аксиоми T_1 су у T_2), **онда T_2** потпуно интерпретира T_1 (тривијално, пошто већ садржи све његове аксиоме).
По услову неупоредивости **GH-пара DP3**, ниједан систем не сме потпуно интерпретирати други.
Дакле, **ако $T_1 \subsetneq T_2$**, **онда** они не могу бити **GH-пар** [7, 23]. ■

Доказ 2 (Кроз prf-theoretic ординале):
За системе у стандардној хијерархији важи строга монотоност ординала: **|PA| < |ZFC| < |ZFC+IC| < ...**
где **|T|** означава **prf-theoretic ординал** система **T**.

Ако $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$, онда $|T_1| > |T_2|$ [26, 29, 30].

У **GH-пару $T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$** и **$T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$**, што би имплицирало **$|T_1| > |T_2|$** и **$|T_2| > |T_1|$** истовремено - контрадикција.
Дакле, системи у линеарној хијерархији не могу формирати **GH-пар** [26, 29, 30]. ■

Доказ 3 (Кроз Геделову самореференцу и интернализацију):
Нека је **$T_1 \subsetneq T_2$** у стандардној хијерархији.
Пошто **T_2** садржи све аксиоме **T_1**, **T_2** може потпуно симулирати све **T_1**-доказе.
Ако $T_2 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$, онда T_2 може формализовати: „све што **T_1** доказује је истинито (у оквиру **T_2**)".
Али пошто **$T_1 \subseteq T_2$**, ово постаје изјава о подскупу сопствених аксиома **T_2**.
Када **T_1** покуша да „врати" овај доказ (користећи **$T_1 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_2)$**), добија могућност да индиректно докаже **$\mathbf{Con}^{\{fin\}}(T_1)$** кроз **$T_2$**, што крши Геделову забрану [13]. јер је **T_2** ефективно проширење **T_1**.
Дакле, стандардна хијерархија не дозвољава **GH-симетрију** [13, 34]. ■

Королар 3.2.2. GH-парови захтевају да сваки систем буде „јачи" [23] од другог и то у различитим, ортогоналним димензијама.
Интерпретација: Ова теорема тачно говори какве системе треба тражити. Потребни су системи са:

- **Комплементарним изражајним моћима**
- **Различитим профилима снаге**
- **Ортогоналним аксиоматским основама**

Зато стандардни парови као што су **(PA, ZFC)** или **(HA, PA)** не успевају - они су линеарно поредани по снази. То мотивише дизајн ортогоналних система — као на пример, аритметички системи са јаком индукцијом и геометријски системи са континуитетним аксиомима — уместо оне једнодимензионе ескалације снаге.

Доказ 1 (Кроз одсуство линеарне доминације):
Претпоставимо да су **T_1** и **T_2** линеарно упоредиви системи-постоји јединствена димензија „снаге" по којој један доминира другим.
Тада важи **$T_1 \leq T_2$** или **$T_2 \leq T_1$** у тој димензији.
Ако **$T_1 \leq T_2$**, онда **T_2** има све доказне ресурсе **T_1** плус додатне. У овом случају, **T_2** може потпуно да интерпретира **T_1**, што крши услов неупоредивости.
Дакле, **GH-парови** морају имати **ортогоналне** димензије снаге - сваки од њих је „јачи" у различитој, некомпарабилној димензији [23]. ■

Доказ 2 (Кроз комплементарност изражајних моћи):
Нека **Expr(T)** означава скуп концепата изразивих у систему **T**.
За **GH-пар T_1, T_2**, услов неупоредивости захтева:

- Постоје концепти у **$\mathbf{Expr}(T_1) \setminus \mathbf{Expr}(T_2)$** (**$T_1$** изражава нешто што **$T_2$** не може)
- Постоје концепти у **$\mathbf{Expr}(T_2) \setminus \mathbf{Expr}(T_1)$** (**$T_2$** изражава нешто што **$T_1$** не може)

Ово је тачно **комплементарност** - сваки систем покрива „мртав угао" оног другог.
Ова комплементарност је ортогоналност у изражајном смислу: сваки систем је „јачи" у свом домену [23]. ■

Доказ 3 (Кроз vector модел доказне снаге):

Представимо доказну снагу система као вектор у вишедимензионалном простору где свака димензија одговара различитом типу доказног ресурса:

- **I** = индуктивна снага
- **O** = ординална снага
- **C** = континуална снага (аксиоме о реалним бројевима)
- **G** = геометријска снага
- итд.

За систем **T**, његова снага је $\mathbf{v(T) = (I_T, O_T, C_T, G_T, ...)}$

За **GH-пар** $\mathbf{T_1, T_2}$, потребно је:

- $\mathbf{v(T_1)}$ и $\mathbf{v(T_2)}$ нису упоредиви по парцијалном уређењу (не постоји $\mathbf{v(T_1) \leq v(T_2)}$ компонента-по-компонента)
- Постоје индекси **i, j** такви да $\mathbf{v(T_1)_i}$
- $\mathbf{> v(T_2)_i}$ али $\mathbf{v(T_1)_j < v(T_2)_j}$

Ово је прецизна дефиниција ортогоналности у мулти-димензионалном простору [23, 26, 29, 30]. ■

3.3 Анатомија комплементарности

Да бисмо ове „ортогоналне димензије снаге" учинили прецизнијим, размотрићемо различите аспекте математичке моћи:

Димензија 1: Аритметичка изражајност [7]

- Способност квантификовања над ℕ
- Способност дефинисања рекурзивних функција
- Снага шеме индукције

Димензија 2: Геометријска/просторна изражајност [35]

- Способност резоновања о континууму
- Способност изражавања тополошких својстава
- Приступ реалним бројевима

Димензија 3: Ординална снага [26, 29, 30, 31]

- Приступ трансфинитним ординалима
- Снага трансфинитне индукције
- Доказно-теоријски ординал

Димензија 4: Категоријска апстракција [1]

- Способност рада са вишим структурама
- Функторијално резоновање
- Универзална својства

Димензија 5: Конструктивна моћ [5, 36]

- Ефективна реализабилност
- Рачунарски садржај
- Алгоритамска конструкција

Два система могу бити неупоредива ако се истичу у различитим димензијама.

Пропозиција 3.3 (Комплементарност је структурна). Број аксиома или синтаксичка сложеност не могу бити релевантни за комплементарност. Оно што је овде битно јесте структурна ортогоналност изражајних моћи [23].

Аналогија: Брава и кључ. Размотримо браву и кључ. Облик кључа је прецизно комплементаран ка облику браве, али они нису истог „типа". Кључ није мања брава; нити је брава већи кључ. Њихова је функционална координација и произилази из ортогоналности форми. Слично томе, **GH-парови** би имали аксиоматске структуре и изражајне моћи које су међусобно комплементарне и то тако да сваки препознаје структуру оног другог без његовог садржаја.

Пропозиција 3.4 (Препознавање без садржаја). Систем $\mathbf{T_1}$ може препознати систем $\mathbf{T_2}$ (у смислу да може рефлектовати његову структуру и доказати његову конзистентност) али без садржаја његових аксиома или теорема [16].

Механизам: Кроз интерпретацију — $\mathbf{T_1}$ гради модел $\mathbf{T_2}$, унутар себе, користећи сопствене изражајне

ресурсе.
Пример: PA може изградити модел геометрије и то користећи уређене парове природних бројева као „тачке," али геометријски аксиоми нису део **PA**.
Ово јесте кључ за то како међусобни докази конзистентности могу бити могући без стварања кружне неконзистентности.
Овим се завршава дефиниционi и теоријски оквир. Имамо:

- Ригорозно дефинисане **GH-парове** и **GH-унију**
- Доказано одсуство познате логичке забране
- Доказану неопходност неупоредивости
- Разјашњен концепт комплементарности

Напомена: Теореме 3.1 и 3.2 заједно постављају оквир: **GH-парови** нису логички забрањени, али захтевају неупоредивост по доказној снази [12, 13, 26, 31]. Ово дефинише простор претраге за остале потенцијалне кандидате у наредним секцијама, чија ће се анализа наставити у оквиру целе тријаде.

---

4. ЕПИСТЕМОЛОГИЈА GH-ПАРОВА

Након што смо утврдили формално-логичко одсуство забране за постојање **GH-парова**, дефинисали њихову неопходну неупоредивост, неопходно је размотрити њихов сазнајни статус. Ова секција ће се даље бавити питањем како се може оправдати веровање у системе који се међусобно подржавају, а да се притом не упадне у замку парадокса кружности. Анализирамо дефинисану **GH-структуру** кроз сукоб фондационализма и кохерентизма, нудећи решење у виду рефлексивне равнотеже која додатно оптимизује наше поверење у формалне основе математике.

4.1 Примедба кружности

Најнепосреднији философски приговор **GH-паровима** јесте да они делују порочно кружно:
Примедба: „Ако верујем да је **A** конзистентан зато што **B** каже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(A)}$**,** или аналогно верујем да је **B** конзистентан зато што **A** каже $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(B)}$**, онда** немам независне основе да верујем ниједном.
Ово је *circulus in probando* — кружно резоновање."
Овај приговор има *prima facie* снагу. У стандардној епистемологији, кружно оправдање сматра се као парадигматски погрешно. Ако оправдавам веровање **p** позивајући се на веровање **q**, а оправдавам и **q** позивајући се на **p**, нисам оправдао ништа. Кључно је приметити да ова формализација претпоставља да оправдање мора бити и линеарно и хијерархијско. Међутим, **ако** је ово оправдање структурално (мрежно), **онда** из (**P1–P2**) не следи да ниједна вера није оправдана, већ само да не постоји линеарна основа.
Стога закључак регреса није неутралан, већ зависи од усвојеног модела епистемичке структуре.
Приговор се може формализовати:

Премиса 1: Вера у $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(T_1)}$ је оправдана само ако постоји оправдана вера у $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(T_2)}$**.**
Премиса 2: Вера у $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(T_2)}$ је оправдана само ако постоји оправдана вера у $\mathbf{Con}^{\{fin\}}\mathbf{(T_1)}$**.**
Закључак: Ниједна вера није оправдана (порочни регрес у кругу).

Критично питање: Да ли је овај приговор фаталан, или почива на претпоставкама о оправдању које се могу довести у питање?

4.2 Фондационализам против кохерентизма

Да бисмо одговорили на примедбу кружности, морамо испитати она дубока питања епистемологије, која се тичу структуре оправдања.

4.2.1 Класични фондационализам Фондационализам тврди:

1. Нека веровања су основна (самооправдана, самоочигледна, непогрешива)
2. Сва остала веровања се изводе из основних веровања кроз оправдано закључивање
3. Оправдање тече једносмерно: основа → изведено
4. Кругови нису дозвољени у структури оправдања

Парадигматски примери:

- Декарт: *Cogito ergo sum* као темељно
- Емпиризам: чулно искуство као темељно

- Математика (традиционални поглед): аксиоми као самоочигледни

У овом оквиру, **GH-парови** су заиста проблематични. Ако се $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ међусобно оправдавају, ниједан није темељан, и добијамо круг.

Фондационалистички суд: GH-парови су епистемолошки недопустиви.

4.2.2 Кохерентизам Кохерентизам нуди радикално другачију слику:

1. Нема привилегованих основних веровања (сва веровања су на истом епистемичком нивоу)
2. Оправдање је холистичко (веровања су оправдана у складу са целокупном мрежом)
3. Међусобна подршка је легитимна (није порочна већ врлинска)
4. Кохерентност целог система обезбеђује оправдање

Кључне личности:

- **W.V.O. Quine:** *Two Dogmas of Empiricism* [28]
- **Laurence BonJour:** *The Structure of Empirical Knowledge* [6]
- **Keith Lehrer:** *Theory of Knowledge* [21]

Централни увид: Веровања не добијају оправдање линеарно из темеља, већ она стичу ваљаност кроз системску кохерентност — међусобну конзистентност, објашњиву интеграцију, једноставност.

Аналогија: И каменчићи у луку подржавају један другог без ослонца на независан темељ. Структура као целина је стабилна, иако ниједан камен није самоподржавајући.

У овом оквиру, **GH-парови** су потенцијално легитимни. $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ међусобно се подржавају, стварајући кохерентну структуру.

Кохерентистички суд: GH-парови су епистемолошки допустиви [7, 21, 28].

4.2.3 Quine-ова мрежа уверења

Quine-ова метафора је посебно прикладна за **GH-парове**. Quine тврди [28]:

Quine-ове тезе:

1. Наша уверења чине међусобно повезану мрежу или мрежицу
2. Периферна уверења (директно посматрање) суочавају се са емпиријским судом
3. Централна уверења (логика, математика) дубоко су уграђена
4. Ниједно уверење није потпуно имуно на ревизију
5. Оправдање је ствар кохерентности са мрежом

Примена на математику: Математичка уверења су близу центра мреже. Њихово оправдање долази не из самоочигледности већ из:

- Унутрашње кохерентности (нема пронађених противречности) [5]
- Незаменљивости за науку (примене у физици, итд.) [28]
- Систематских веза са другим деловима математике [7, 21, 28]

GH-парови се уклапају у ову слику: два формална система међусобно кохеришу, сваки од њих јачају поверење у други, оба дубоко уграђена у математичку праксу [7, 21, 28].

Цитат из Quine-а: „Целокупност нашег такозваног знања или уверења јесте човекова творевина која додирује искуство само по ивицама..... Сукоб са искуством на периферији изазива прилагођавања у унутрашњости поља.” (*Two Dogmas of Empiricism*, 1951 [28]).

GH-парови би били унутрашња прилагођавања која одржавају укупну кохерентност [7, 21, 28].

4.3 Рефлексивна равнотежа

Џон Ролс је развио методу рефлексивне равнотеже за етику, а која се примењује на епистемологију у општем смислу [32].

Метода:

1. Почети са размотреним судовима (претеоријска уверења која држимо са сигурношћу)
2. Формулисати принципе који систематизују те судове
3. Проверити кохерентност између судова и принципа
4. Ревидирати или судове или принципе да би се постигла равнотежа
5. Поновити поступак док не настане стабилан, кохерентан систем

Примена на GH парове:

Почетни судови:

- **PA** делује конзистентно (деценије употребе без противречности) [7]

- **GEO** делује конзистентно (успешно геометријско резоновање) [35]
- Оба су дубоко уграђена у математику [23]

Принципи:

- Формални системи захтевају доказе конзистентности [7]
- Гедел показује да је самодоказ немогућ [13, 34]
- Међусобни доказ би могао пружити оправдање [2, 31]

Рефлексивни процес:

- Да ли међусобни доказ повећава поверење? (Да, ако је истински) [7, 21, 28]
- Да ли ствара порочни круг? (Не, ако је у кохерентистичком оквиру) [7, 21, 28]
- Да ли целокупни систем постиже равнотежу? (Захтева даљу анализу) [32]

Закључак: GH-парови могу бити у рефлексивној равнотежи ако повећавају укупну кохерентност математичког знања без увођења нестабилности [32].

4.4 Одговор на примедбу кружности

Сада можемо формулисати и детаљнији одговор на примедбу кружности.

4.4.1 Разликовање порочних од врлинских кругова

Порочна кружност: Коришћење **p** да би се оправдао **q** и **q** да би се оправдао **p** када нема независног разлога да верујемо ниједном. Пример: „Библија је истинита јер Бог тако каже. Знамо да Бог постоји јер Библија тако каже."

- **Проблем:** Нема екстерног оправдања ни за једну тврдњу.

Врлинска кружност (међусобна подршка): Коришћење **p** да би се ојачало поверење у **q** и обрнуто, када оба већ имају независно оправдање. Овде независност не треба схватити као апсолутну логичку независност, већ као методолошку и историјску независност у епистемичкој пракси.

Пример: Емпиријска наука и математика међусобно се подржавају:

- Наука користи математику (физика захтева диференцијални рачун) [7]
- Математика се потврђује кроз науку (предвиђања функционишу) [23]
- Свака повећава поверење у другу

Али свака има независно оправдање (посматрање за науку, доказ за математику) [7, 21, 28].

GH парови припадају другој категорији: Независна оправдања:

1. **Емпиријски успех: PA** и **GEO** су коришћени успешно, вековима, без противречности. Ово је снажан индуктивни доказ за конзистентност [7, 35].
2. **Вишеструке независне истраге:** Хиљаде математичара су радиле у овим системима. До сада у њима није пронађена противречност [23].
3. **Доказно-теоријска анализа:** Разумемо структуру **PA** и **GEO**. Имамо и ординалне анализе, а имамо моделе (у јачим системима). Ово даје метаматематичко разумевање [26, 29, 30, 31].
4. **Философска кохерентност:** Системи концептуално имају смисла. Аксиоми јесу интуитивни, а добијени резултати су у складу са математичком праксом [6, 23].

Међусобни докази додају овоме: када имамо независне разлоге да верујемо у оба система, онда ови међусобни докази конзистентности повећавају поверење показујући да се они међусобно валидирају [2, 31].

Аналогија: Два сведока догађаја. Сваки исказ има независну кредибилност. Када се и њихови налази поклапају, поверење расте. Ово није кружно резоновање — то је колаборација [7, 21, 28].

4.4.2 Одбрана кроз „bootstrapping"

Други начин да разумемо **GH-парове**: епистемички **„bootstrapping".**

Bootstrapping (у епистемологији): Коришћење методе да валидира саму себе може бити легитимно ако:

1. Метода има независан досадашњи успех [7]
2. Самовалидирање додаје потврђујући доказ [28]
3. Не постоји боља алтернатива [23]

Пример: Коришћење перцепције да проверимо перцепцију (погледати два пута, користити огледала) није порочно кружно ако већ имамо разлог да верујемо перцепцији уопште [7].

GH парови као bootstrapping:

1. **PA** има независан досадашњи успех (емпиријски успех) [7]

2. **GEO** има независан досадашњи успех [35]
3. Међусобна валидација додаје потврђујући слој [2, 31]
4. Алтернатива (бесконачна хијерархија) има и проблеме (нема крајњег темеља) [26, 29, 30]

Кључна поента: Ту не стварамо оправдање *ex nihilo*, већ јачамо постојеће оправдање кроз системску кохерентност [7, 21, 28].

4.5 Компаративна процена

Хајде да систематски упоредимо **GH-парове** са алтернативама:

4.5.1 Један систем (T самостално)

Темељ: Систем покушава да оправда сам себе.

Проблеми:

- $\mathbf{T \nvdash Con^{\{fin\}}(T)}$ (Гедел II) [13, 34]
- Нема могућег интерног доказа конзистентности [13]
- Мора се позвати на екстерну мета-теорију [10]

Статус: Немогуће по Геделу [13, 34]

4.5.2 Бесконачна хијерархија ($T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \ldots$)

Темељ: Сваки систем оправдан јачим наследником.

Проблеми:

- Бесконачан регрес: нема крајњег темеља [26, 29, 30]
- Фондационалистичка дилема: шта оправдава T_∞? [6]

Прагматични проблем: Стварни математичари не раде на тај начин [23].

Статус: Философски јесте проблематично (нема завршетка).

4.5.3 Заустављање на јаком систему (нпр. ZFC + велики кардинали)

Темељ: Прихватити веома јак систем као „самоочигледан".

Проблеми:

- Велики кардинали нису самоочигледни (контроверзни) [23]
- И даље не може доказати сопствену конзистентност (Гедел важи) [13, 34]
- Делује произвољно (зашто стати овде?) [23]

Статус: Јесте прагматично корисно али је философски незадовољавајуће.

4.5.4 GH парови ($T_1 \leftrightarrow T_2$)

Темељ: Међусобна кохерентност два система.

Предности:

- Коначна структура (нема бесконачног регреса) [2, 31]
- Поштује Гедела (нема самодоказа) [13, 34]
- Одражава математичку праксу (више темеља се проучава) [23]
- Доступно кохерентистичко оправдање [7, 21, 28].

Отворено питање остаје да ли се међусобна кохерентност може сматрати довољним условом за епистемичко утемељење без екстерног сидра.

Проблеми:

- Очигледна кружност (размотрено изнад) [7, 21, 28]
- Нема познате конструкције (још увек отворен проблем) [26, 29, 30]
- Захтева нестандардну епистемологију [6, 28]

Статус: Философски јесте одрживо ако се прихвати и кохерентизам; технички изазовно.

Компаративна табела

Приступ	Темељ	Гедел-компатибилно?	Коначно?	Философски кохерентно?
Један систем	Само	Не [13, 34]	Да	Не (немогуће)
Хијерархија	Регресивно	Да [26, 29, 30]	Не	Спорно (нема краја)
Јак систем	Тврдња	Да* [13, 34]	Да	Спорно (произвољно)
GH-парови	Међусобно	Да [2, 31]	Да	Да (ако кохерентистичко [7, 21, 28])

- И даље не може доказати сопствену конзистентност

Закључак: GH-парови нуде философски одбрањиву алтернативу ако прихватимо кохерентистичку епистемологију и ако се могу конструисати [7, 21, 28].

4.6 Прагматичко оправдање

Поред чисте епистемологије, постоји и прагматички аргумент:

Прагматички аргумент за конзистентност:

- **P1.** Математика је била изузетно успешна вековима (наука, технологија, инжењерство све од ње зависи) [23].
- **P2.** Ако би математика била фундаментално неконзистентна, тај успех би био стварно ретка случајност [7].
- **P3.** Чудесне случајности не треба прихватати без изузетних доказа [28].
- **C1.** Стога, математика је вероватно конзистентна (таква прагматичка инференција на најбоље објашњење) [23].

Примена на GH парове:

- **P4.** И **PA** и **GEO** су кључни делови успешне математике [7, 35].
- **P5**. Њихов успех пружа прагматичке доказе за конзистентност [23].
- **P6.** Међусобни докази конзистентности формализују и јачају ове прагматичке доказе [2, 31].
- **C2**. **GH-парови** пружају структуру која се усклађује са прагматичким оправдањем [7, 21, 28].

Овај аргумент не доказује конзистентност (ништа то не може апсолутно), али он пружа рационалне основе за поверење [6, 28].

Паралела са природним наукама: Немамо апсолутног доказа да индукција функционише, али њен успех пружа прагматичко оправдање. Слично томе, успех математике пружа прагматичко оправдање за конзистентност [23].

4.7 Степени извесности

Епистемологија **GH-парова** треба да препозна градације извесности:

Ниво 0: Нема доказа конзистентности

- Систем тек предложен, непроверен
- Чиста спекулација
- Рационално поверење: веома ниско

Ниво 1: Емпиријски досадашњи успех

- Систем коришћен деценијама без противречности [7, 35]
- Заједница практичара га сматра поузданим [23]
- Рационално поверење: умерено

Ниво 2: Мета-математичка анализа

- Модели конструисани у јачим системима [10, 26]
- Доказно-теоријски ординали израчунати [26, 29, 30, 31]
- Конзистентност доказана релативно (у јачем систему) [12]
- Рационално поверење: високо

Ниво 3: GH-пар

- Систем има статус Нивоа 2
- Плус међусобно валидира други систем на Нивоу 2 [2, 31]
- Кохерентна структура без регреса [7, 21, 28]
- Рационално поверење: веома високо

Ниво 4: Апсолутна извесност

- Самоочигледна истина
- Логички неопходно
- Рационално поверење: недостижно (ово Гедел показује) [13, 34]

GH-парови нуде Ниво 3 — не апсолутан (немогуће), али виши од изолованих система или система бесконачних хијерархија [2, 31].

Кључни увид: Епистемологија треба да препозна да математика функционише на Нивоу 2–3, а не на Нивоу 4. Али Гедел је доказао да је Ниво 4 недостижан [13, 34]. **GH-парови** оптимизују унутар тих ограничења.

---

5. АКСИОМ ЛОГИЧКЕ МОГУЋНОСТИ И ТЕОРЕМА О ПОСТОЈАЊУ

Након што смо у претходним поглављима ригорозно дефинисали **GH-парове** а и одбранили њихову епистемолошку одрживост, долазимо и до кључног онтолошког питања: да ли овакви системи заиста постоје у математичком универзуму? У овој секцији уводи се **Аксиом логичке могућности (ALP)** и то као методолошки принцип који, ослањајући се на историју математике али и Хенкинову теорему о постојању модела, доказује да одсуство логичке забране имплицира математичко постојање. Тиме ми **GH-парове** преводимо из статуса теоријске спекулације у статус потврђених математичких објеката који чекају своју експлицитну конструкцију.

5.1 Аксиом логичке могућности

Сад уводимо дубљи принцип који помера наше разумевање **GH-парова** од простог одсуства забране ка позитивном постојању.

5.1.1 Принцип

Математичке структуре, укључујући формалне системе — постоје по својој логичкој кохерентности. Основни принцип управља математичким постојањем:

Аксиом логичке могућности (ALP): „У математичкој логици, оно што није логички забрањено је, у принципу, математички реализабилно. За довољно богате и добро дефинисане структуре ова логичка могућност подразумева математичко постојање.” [6, 23]

(Све референце на доказивост се разумеју на мета-нивоу, унутар позадинске теорије као што је $\mathbf{Z_2}$ или **ZFC**. Сам **GH-оквир** остаје шематски и неспецифичан за теорију.)

Формална изјава: За математичке структуре **Σ** довољне сложености:

$\neg(\mathbf{Provably}_{\mathbf{Impossible}}(\Sigma)) \rightarrow \exists \Sigma$ (у математичком простору) [13, 34].

Примена на GH-парове: Доказали смо (Теорема 3.1) да ниједна позната теорема не забрањује **GH-парове** [13, 31]. По **ALP**, ово одсуство забране није само негативан резултат већ оно представља и позитиван доказ: **GH-парови постоје у простору свих могућих формалних система** [2, 31].

Критична разлика: ALP није један произвољан постулат већ је и методолошки принцип валидиран целокупном историјом математике. Свако велико проширење математичке онтологије, од негативних бројева до трансфинитних кардинала, следило је тај образац: концептуална кохерентност + одсуство противречности → прихватање као постојећих математичких објеката [23].

5.1.2 Оправдање ALP

Историјски преседан:

- **Комплексни бројеви:** У почетку контроверзни („имагинарни”), прихваћени су тек онда када је показано да су конзистентни [23].
- **Бесконачни скупови:** Канторови трансфинитни бројеви су наишли на отпор; када је показано да су конзистентни са **ZF**, прихваћени су [23].
- **Велики кардинали:** Недостижни кардинали, Mahlo кардинали итд. прихваћени као постојећи математички објекти на основу доказа конзистентности [23].
- **Неуклидска геометрија**: Када је показана конзистентност (кроз Клајнове моделе), тек онда је хиперболичка геометрија постала „реална” као и Еуклидова [35].

Напомена: Историјски примери се овде користе као индуктивна мотивација, а не као формални доказ **ALP**-а

Образац: Конзистентна дефинибилност → математичко постојање [23].

- **Философски аргумент:** У физичком свету, могућност и актуелност су прилично различите. У математици, та разлика се губи: сматра се да математички објекти постоје по својој логичкој кохерентности, а не кроз физичку инстанцијацију [6, 28].
- **Платонистичка интерпретација:** Простор свих математичких структура постоји независно од људског знања [23].
- **Формалистичка интерпретација:** Математичко постојање дефинише конзистентност [7].
- **Структуралистичка интерпретација:** Математика проучава структуре и њихове односе [23].

ALP као методолошки принцип: Принцип: Ако је математички концепт:

(а) прецизно дефинисан,

(б) унутрашње конзистентан и

(в) није забрањен утврђеним теоремама,

онда он припада математичкој онтологији и легитиман је објекат истраживања [6, 23].

Овај принцип подупире целокупну модерну математику. Без њега, не бисмо могли прихватити:

- Комплексне бројеве [23]
- Бесконачне скупове [23]
- Немизерљиве скупове [23]
- Велике кардинале [23]

Одговор на конструктивистички приговор: Конструктивисти захтевају експлицитну конструкцију за тврдње о постојању. Одговор: Чак и конструктивисти прихватају структуре чија је конзистентност доказана индиректним средствима [5, 36]. За **GH-парове** тврдимо да одсуство забране имплицира и конструктивност у принципу — конструкција може бити тешка, али није немогућа. Зато ни класична математика не захтева експлицитну конструкцију за тврдње о постојању. И саме теореме о постојању рутински утврђују да решења постоје без да дају алгоритме за њихово проналажење [7, 23].

5.1.3 Креационистички аргумент

Допунско оправдање ослања се на природу математичког стварања:

Креационистичка теза: Аксиоматски системи јесу артефакти интелигенције и то ако интелигенција може:

- Кохерентно замислити структуру (спецификовати аксиоме и правила) [5]
- Проверити интерну конзистентност (нема непосредне противречности) [13, 34]
- Проверити екстерну конзистентност (нема забране из мета-теорије) [2, 31]
- Онда та структура постоји као математички објекат, доступан за истраживање [23].

Примена:

- Ми смо кохерентно замислили **GH-парове** (Дефиниције, Секција 2) [2, 31]
- Проверили смо да нема интерне противречности (сваки систем је појединачно конзистентан) [13, 34]
- Проверили смо да нема екстерне забране (Теорема 3.1) [13, 31]
- Дакле, **GH-парови**, математички, постоје [23].

Кључни увид: Чин ригорозне дефиниције, када није забрањен, је управо чин стварања. Прецизним дефинисањем шта су **GH-парови**, ми их доводимо у статус математичког постојања. Зато преостало питање није да ли они постоје већ да ли можемо експлицитно конструисати конкретне инстанце [23]?

5.1.4 Формулација у модалној логици

У терминима модалне логике, **ALP** се може изразити [3, 34]:

- **M1. ◇P** (**P** је логички могуће) у математици
- **M2. ¬□¬P** (**P** није нужно лажно)
- **M3. Consistent(P)** (**P** не садржи противречност) [13]

Из **M1–M3**, у математичком контексту:

- **M4. P** постоји у математичком простору [23]

Ова импликација важи у оквиру прихваћеног модалног тумачења математичког постојања

За GH-парове:

- **◇GHPair(T_1, T_2):** Могуће је да **(T_1, T_2)** чине **GH-пар** [2, 31]
- **¬□¬GHPair:** Ниједна теорема не забрањује нужно (Теорема 3.1) [13, 31]
- **Consistent(GHPair):** Концепт не садржи интерну противречност [13, 34]

Закључак: GH-парови постоје у математичком простору [23].

Појашњење: „Постоје у математичком простору" значи да су и они легитимни математички објекти проучавања, а не да имамо експлицитан пример. Разлика је између:

- **Постојања у принципу:** Концепт је кохерентан и није забрањен [23]
- **Постојања у пракси:** Имамо експлицитну конструкцију [26, 29, 30]

ALP гарантује прво; док друго, за сада, остаје отворен проблем [23].

5.1.5 Импликације за централни проблем

ALP фундаментално преобликује наше истраживање:

Традиционално питање: „Да ли **GH-парови** постоје?”

- **ALP одговор:** „Да, у математичком простору (према одсуству забране).” [2, 31]

Ново питање: „Можемо ли експлицитно конструисати **GH-пар**?”

- **Статус:** Отворен технички проблем [26, 29, 30]. Али нема разлога да не можемо.

Овај помак има важне последице:

- **Терет доказа:** Раније смо морали да докажемо постојање (конструишемо пар). Сад ће морати сви противници доказати немогућност (пронађу скривену забрану). Ово је значајна предност [13, 31].
- **Оправдање истраживања:** И без експлицитне конструкције, истраживање је вредно јер ми овде истражујемо потврђену област математичког простора, а не јуримо некакву химеру [23].
- **Философско поверење:** Можемо са сигурношћу тврдити да **GH-парови** постоје математички уз констатацију да их још нисмо експлицитно пронашли, односно конструисали [6, 28].

Поређење са другом математиком: Ово је управо статус многих важних математичких објеката јер је познато да постоје по конзистентности, а траже се кроз конструкцију.

Примери: специфични велики кардинали, решења отворених Диофантових једначина, итд. [23].

5.1.6 ALP и историја математике

Пример:

Концепт	У почетку одбијен	Критеријум прихватања	Тренутни статус
Негативни бројеви	„Апсурд” (средњи век)	Показана конзистентност [23]	Стандард
Комплексни бројеви	„Имагинарни” (16. век)	Показана конзистентност [23]	Суштински
Инфинитезимали	Беркли: „духови”	Конзистентност (NSA,1960-е) [23]	Прихваћени
Бесконачни скупови	„Патолошки” (19. век)	Конзистентност са ZF [23]	Темељ
Велики кардинали	„Сумњиви” (20. век)	Докази конзистентности [23]	Напредна истраживања

ALP објашњава образац у историји математике:

Образац:

- Нови концепт предложен (комплексни бројеви, бесконачни скупови, итд.)
- У почетку контроверзан, дочекан са скепсом
- Показано да је конзистентан (без противречности) [23]
- Постепено прихваћен као „постојећи” [23]
- Постаје стандардна математика [23]

Овај историјски образац подсећа на Кунову анализу научних револуција [20].

Трајекторија GH-парова:

- **Тренутно:** Предложени, дочекани са (очекиваном) скепсом [2, 31]
- **Наш допринос:** Показано одсуство забране (Теорема 3.1) [13, 31]
- **Будућност:** Биће прихваћени ако се пронађе експлицитна конструкција (чак и без ње, по **ALP**) [23]

Закључак: ALP предвиђа да ће **GH-парови** бити прихваћени, пратећи историјски образац [23].

5.1.7 ALP и Теорема о постојању модела

Аксиом логичке могућности није изолован принцип. Строго је повезан са утврђеним резултатима у математичкој логици, конкретно са Хенкиновом **Теоремом о постојању модела** [16]**.**

Теорема о постојању модела (Хенкин, 1949):

Сваки конзистентан скуп формула првог реда има модел [16].

Формално: ако је **Г** конзистентан скуп формула у логици првог реда, **онда** постоји модел **М** такав да **М ⊨ Г**.

Та теорема формализује фундаментални принцип у математичкој логици: конзистентност имплицира постојање (у смислу модела-теоријског постојања) [16]. Она пружа ригорозну основу за интуицију да „оно што се може кохерентно описати, математички постоји.”

Примена на GH-парове: GH-парови задовољавају услове за модел-теоријског постојања:

- **Прецизна дефиниција: GH-парови** су ригорозно дефинисани кроз услове **DP1 – DP3**, који се (Дефиниција 2.3) могу формализовати у језику математичке логике [2, 31].
- **Конзистентност**: Дефиниција јесте интерно конзистентна (нема противречности ни у захтеву за међусобне доказе конзистентности, појединачна Геделова ограничења, ни неупоредивости) [13, 34]. Штавише, Теорема 3.1 утврђује и да ниједна од познатих теорема математичке логике не забрањује **GH-парове** — нема екстерне неконзистентности [13, 31].
- **Формализабилност у првом реду**: Иако су **GH-парови** мета-математичке структуре, дате као формални системи, њихова дефинишућа својства могу се изразити и у логици првог реда кроз аритметизацију (Геделово нумерисање) [10,13]. Услови **DP1–DP3** преводе се у формуле првог реда о предикатима доказивости и формулама конзистентности.

По **Теореми о постојању модела**, пошто је карактеризација **GH-парова** конзистентна постоји модел **M** у коме постоје структуре које задовољавају **DP1–DP3** [16]. Ово пружа математичко утемељење за тврдњу о постојању из Теореме 5.2.

Однос између ALP и Теореме о постојању модела: ALP је могуће разумети још и као филозофску артикулацију принципа постојања модела, даље проширену и изван формула првог реда на сложене математичке структуре [6, 23]. Док Теорема о постојању модела утврђује постојање модела само за конзистентне скупове формула [16], **ALP** проширује ово резоновање на мета-математичке структуре као што су формални системи, геометријски простори и апстрактни математички објекти [23].

Историјски образац који подржава **ALP** (комплексни бројеви, трансфинитни ординали, неевклидова геометрија) одражава поновљене примене принципа „конзистентност имплицира постојање", које та Теорема о постојању модела формализује [23, 35]. Сваки историјски случај укључивао је:

- Прецизну дефиницију (формализабилну)
- Унутрашњу конзистентност (без противречности)
- Одсуство забране (ниједна теорема није то забрањивала)
- Коначно прихватање као постојећих математичких објеката [23]

Закључак: Теорема 5.2 не почива на **ALP** као методолошком принципу валидираном историјом, већ [6, 23] и на утврђеној вези између конзистентности и модела-теоријског постојања у математичкој логици [16]. Теорема о постојању модела пружа математички темељ, али **ALP** пружа и филозофски оквир за примену овог принципа на темељне структуре.

Критична напомена: Неки би могли приговорити да се **GH-парови,** као мета-математички објекти (формални системи), разликују од формула на које се Хенкинова теорема директно примењује. То је тачно, али принцип се генерално проширује: као што конзистентни скупови формула имају моделе [16], тако и конзистентне карактеризације математичких структура имају реализације [23]. Обиман развој теорије модела од Хенкиновог рада подржава ову генерализацију [16]. **GH-парови**, доследно карактерисани, припадају математичком универзуму структура — они постоје у истом смислу у ком постоји свака математички кохерентна структура [23]. Ова генерализација није тек пуки аналогијски скок. Иако Хенкинова теорема директно важи за скупове формула у једном језику, принцип који она формализује - да конзистентна карактеризација гарантује реализацију - примењује се у математичкој пракси широко и на сложеније структуре. Конкретно, пар система $(\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})$ са условима **DP1–DP3** се може посматрати као конзистентан скуп услова у одговарајућем мета-теоријском језику, на пример. у $\mathbf{Z_2}$ или **ZFC**, у коме је Хенкинов принцип директно применљив. У том оквиру, постојање структуре која задовољава **DP1–DP3** следи стандардним путем. Потпуна верификација овог корака биће даље обезбеђена експлицитном конструкцијом у трећем раду ове тријаде.

5.2 Теорема о постојању

Сада можемо коначно формулисати централни резултат о постојању који следи из Аксиома логичке могућности и наше анализе **GH-парова**.

5.2 Главна теорема (Постојање GH-парова кроз ALP).

Под **ALP**, **GH-парови** постоје у простору математичких структура [6, 23].

Доказ 1 (Постојање кроз логичку секвенцу):

(1) **Прецизна дефиниција: GH-парови** су ригорозно дефинисани кроз услове **DP1–DP3** (Дефин.2.3) [2, 31]. Дефиниција је математички прецизна и укључује:

- Међусобну доказивост конзистентности: $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ и $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
- Појединачне Геделове ограничености: $\mathbf{T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ и $\mathbf{T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ [13, 34]
- Неупоредивост: ниједан систем није подсистем другог [26, 29, 30]

(2) **Унутрашња конзистентност дефиниције:** Услови **DP1–DP3** су међусобно конзистентни. Нема логичке противречности у истовременом захтеву за:
Међусобне доказе конзистентности (**DP1**) — синтаксички односи између различитих система [2, 31].
Појединачне Геделове ограничености (**DP2**) — следе из Гедела II за сваки систем посебно [13, 34].
Ова конзистентност се односи на формалну компатибилност услова, а не на доказ постојања модела.
Неупоредивост (**DP3**) — релационо својство доказно-теоријске инклузије [26, 29, 30].
(3) **Одсуство забране:** По Теореми 3.1, не постоји позната теорема у математичкој логици која тврди да су **GH-парови** немогући [13, 31]. Конкретно:

- Геделове теореме о непотпуности забрањују самореференцију али не циклусе [13, 34]
- Ниједан Принцип асиметричне нужности **(PAN)** није доказан [7, 26, 31]
- Ниједан други темељни резултат не искључује **GH-парове** [23]

(4) **ALP се примењује: GH-парови** задовољавају услове за **ALP** [6, 23]:

- Довољно богата структура (формални системи са аритметичком снагом) [7]
- Добро дефинисани (прецизни аксиоми и семантика) [2, 31]
- Није логички забрањено (по кораку 3) [13, 31]

(5) Постојање следи: По **ALP**, све оно што је конзистентно дефинибилно и није забрањено постоји у математичком простору [6,23].
Формална шема: **GH-парови** јесу добро дефинисани (1) Дефиниција је унутрашње конзистентна (2) $\neg\mathbf{Provably_{Impossible(GHPairs)}}$(3) **ALP** се примењује на такве структуре (4), (5)
——————————————— ∴ ∃($\mathbf{T_1, T_2}$): GHPair($\mathbf{T_1, T_2}$)
Под ALP, GH-парови постоје као математичке структуре у простору формалне логике [6, 23]. □

Методолошка напомена: Овај доказ следи исти образац као докази постојања за:

- комплексне бројеве (без противречја са реалном аритметиком → комплексни бројеви постоје) [23],
- трансфинитне ординале (без противречности са **ZF**→ трансфинитни ординали постоје) [26, 29, 30],
- велике кардинале (конзистентност са **ZFC**→ или велики кардинали морају постојати у проширеним теоријама скупова) [23].

У сваком случају, конзистентна дефинибилност + одсуство забране утврђује математичко постојање [6, 23].

Доказ 2 (Кроз еквиваленцију са конзистентношћу Γ):
Нека је **Γ** прворедна карактеризација **GH**-пара у језику мета-теорије:

- $\mathbf{\Gamma_1: T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
- $\mathbf{\Gamma_2: T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
- $\mathbf{\Gamma_3: T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$
- $\mathbf{\Gamma_4: T_2 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$
- **Γ_5: неупоредивост T_1 и T_2**

По Хенкиновој теореми о потпуности [16], за сваку прворедну теорију **Γ**:
Γ је конзистентан ⇔ **Γ** има модел.
Примењено на нашу **Γ**:
Γ је конзистентан ⇔ постоји структура **(T_1, T_2)** која задовољава **DP1–DP3.**
Дакле, **питање постојања GH-пара еквивалентно је питању конзистентности Γ**. Ово није доказ постојања — то је *редукција* проблема постојања на проблем конзистентности [16].
Применом **ALP: Γ** је прецизно дефинисана (корак 1 главног доказа) [6, 23], унутрашње конзистентна (Теорема 3.1 нема познате забране) [13, 31], довољно је богата. По **ALP, Γ** је конзистентан, па према Хенкину [16] има модел. Тај модел је **GH**-пар.

Доказ 3 (Кроз трансцендентални аргумент):

Претпоставимо, ради контрадикције, да **GH-парови** НЕ постоје.
Тада, по **ALP** принципу (валидираном историјском праксом), мора постојати логичка забрана која их искључује.
Али Теорема 3.1 детаљно показује [13, 31] да таква забрана не постоји јер ни Гедел, ни Генцен, нити принципи рефлексије је не дозвољавају.
Да бисмо одржали хипотезу непостојања, морали бисмо или:

(а) одбацити **ALP** [6, 23] (што подрива онтолошко упориште целе модерне математике)
(б) открити нову, скривену теорему која забрањује **GH-парове**.

Пошто ниједно од тога није поткрепљено доказима, а и наш методолошки оквир остаје кохерентан, једини рационални закључак јесте: **GH-парови постоје.**
Напомена: Закључак Теореме 5.2 је условљен прихватањем **ALP** као важећег принципа математичке онтологије

5.2.1 Интерпретација и импликација
Шта Теорема 5.2 утврђује: Теорема показује да су **GH-парови** легитимни математички објекти.
Они постоје у истом смислу у ком:

- Комплексни бројеви постоје (конзистентно проширење реалних) [23]
- Трансфинитни ординали постоје (конзистентно проширење коначних ординала) [26, 29, 30]
- Велики кардинали постоје (конзистентни са **ZFC**, без експлицитне конструкције за све) [23]

Шта Теорема 5.2 НЕ тврди: Теорема не тврди:

- Да имамо експлицитну конструкцију (немамо, још увек)
- Да сваки формални систем има свог **GH-партнера** (непознато)
- Да су **GH-парови** „чести" или се „лако проналазе" (делују ретки и деликатни)

Разлика: Постојање у принципу је (платоновски домен) насупрот постојању у пракси (експлицитан пример) [6,23].
Аналогија: Основна теорема алгебре каже да сваки полином степена **n** има тачно **n** корена у $\mathbb{C}$ [7]. Ово гарантује постојање без давања формула (штавише, Абел–Руфини доказује да не постоји општа формула за **n≥5**). Ипак, корени постоје. Слично томе, Теорема 5.2 гарантује да **GH-парови** постоје и без давања експлицитних примера [2, 31].
Критично појашњење о природи постојања: Ипак, тврдња „**GH-парови** постоје у математичком простору" често се погрешно разуме. Зато разјашњавамо три смисла математичког постојања:

- Постојање као конзистентна дефинибилност: постоји$_1$ ако се може конзистентно дефинисати [23].
- Постојање као теоријска нужност: постоји$_2$ ако следи из прихваћених принципа (као **ALP**) [6, 23].
- Постојање као експлицитна конструкција: постоји$_3$ ако имамо и некакав експлицитан пример или алгоритам [5, 36].

Теорема 5.2 утврђује постојање$_2$ — **GH-парови** постоје као теоријска нужност под **ALP**, валидирани одсуством забране и историјским обрасцима [6, 23]. То је исти смисао у ком кажемо „постоји реалан број **x** такав да **$x^2 = 2$**" пре конструкције **$\sqrt{2}$**, или „постоје модели нееуклидске геометрије" који су пре Клајнових експлицитних модела [35]. Постојање$_3$ остаје отворено, али је сада правилно формулисано као проблем претраге, а не као питање постојања.
Приговор: „Али ви само дефинишете ствари у постојање!"
Одговор: Не. **ALP** није дозвола да се произвољно прогласи постојање. Он захтева:

(а) Ригорозну дефиницију [2, 31]
(б) Унутрашњу конзистентност [13, 34]
(в) Спољашњу конзистентност [13, 31]
(г) Довољну богатост [23]

GH-парови задовољавају сва четири услова. Ово **није дефинисање у постојање** већ препознавање постојања кроз утврђену математичку методологију [6, 10].
Додатни аргумент (Трансцендентална нужност). Поред директне дедукције из **ALP**-а, постојање **GH-парова** може се видети и као **трансцендентална нужност**, нужност унутар нашег математичког универзума. Претпоставимо, само ради контрадикције, да **GH-парови не постоје** као математичке структуре. Тада, по **ALP**-у (који је валидиран историјском праксом), мора постојати логичка забрана која то искључује. Међутим, Теорема 3.1 детаљно показује да таква забрана **не постоји**, не у оквиру познате логике; ни Гедел, ни Генцен, ни принципи рефлексије не дају је. Да би одржали ову хипотезу

непостојања, морали бисмо или:
(а) одбацити **ALP** (што би онда већ подривало онтолошко упориште целокупне модерне математике),
(б) открити нову, до сада скривену, теорему, ону која забрањује **GH-парове** — што је у суштини тврдња да је наша тренутна логика непотпуна у фундаменталном смислу. Пошто ни једно ни друго није пружило евиденцију, а наш методолошки оквир остаје сасвим кохерентан и плодан, једини рационални закључак је онај изведен: **GH-парови постоје**. Тај аргумент не само да јача везу између Т3.1 и Т5.2, већ и позиционира **GH-парове** као **неизбежне кандидате** за испуњавање дуалистичког Хилбертовог програма [2, 6, 31].

5.2.2 Королари

Королар 5.2.1 (Преобликовање централног проблема). Централно питање није „Да ли **GH-парови** постоје?" већ „Који формални системи чине **GH-парове**?"

Доказ 1 (Постојање утврђено Теоремом 5.2) [6, 23]. Оно што преостаје је проблем идентификације: карактеризација и проналажење експлицитних инстанци. □

Доказ 2 (Кроз епистемичку транзицију):
Пре Теореме 3.1 и Теореме 5.2, питање „Да ли **GH-парови** постоје?" било је **отворено емпиријско питање** - могли су и не постојати.
Теорема 3.1 показује: **нема логичке забране** [13, 31]. Али Теорема 5.2 показује: **ALP имплицира постојање** [6, 23].
Ове две теореме заједно врше **епистемичку транзицију**:

- **Пре:** „Можда постоје, можда не"
- **После:** „Постоје у принципу, питање је који конкретно"

Ово је исти тип транзиције као у историји математике:

- **Пре Кантора:** „Да ли постоје различите величине бесконачности?"
- **После Кантора:** „Постоје, питање је класификација"

Дакле, централни проблем је **идентификација**, не **постојање** [6, 23]. ■

Доказ 3 (Кроз аналогију са великим кардиналима):
У теорији скупова, велики кардинали (недостижни, мерљиви, итд.) су прво **постулирани** на основу конзистентности, па тек онда **конструисани** и **класификовани**.
Редослед је био:

1. Доказ конзистентности (нема забране)
2. Принцип прихватања (**ALP** еквивалент у теорији скупова)
3. Истраживање конкретних инстанци

GH-парови прате исти образац:

1. ✓ Теорема 3.1 (нема забране)
2. ✓ Теорема 5.2 (**ALP** имплицира постојање)
3. → Истраживање конкретних инстанци (Рад 3 ове тријаде)

Питање „Да ли постоје?" је одговорено. Преостаје „Који?" [23]. ■

Королар 5.2.2 (Терет доказа). Терет доказа лежи на онима који би порицали постојање **GH-парова.**
Они морају или:
(а) Доказати $\mathbf{Provably_{Impossible}}$ **(GH-Pairs),** чиме би оповргли Теорему 3.1 [13, 31]
(б) Одбацити **ALP** као важећи принцип за математичко постојање [6, 23].
Доказ 1. Дата је Теорема 3.1 (нема забране) и **ALP** (прихваћен принцип), подразумевана позиција је постојање. Негирање захтева је побијање једне од ових премиса. □

Доказ 2 (Кроз Bayesian епистемологију):
Нека **P(GH)** буде епистемичка вероватноћа постојања **GH-парова**.

- **Пре** Теорема 3.1 и 5.2: **P(GH) ≈ 0.5** (неутралан *prior)*
- **После** Теореме 3.1: Одсуство забране повећава: **P(GH) > 0.5**
- **После** Теореме 5.2: ALP аргумент даље повећава: **P(GH) ≫ 0.5**

По Bayesian ажурирању [8], терет доказа се помера: онај ко тврди **¬(GH)** мора пружити **јак доказ**

(јачи од комбинације Теореме 3.1 + **ALP**) да врати **P(GH)** испод **0.5**.
Опције су:

(а) Пронаћи скривену забрану (побити Теорему 3.1)
(б) Одбацити **ALP** (побити Теорему 5.2)

Обе су **јаки захтеви** [6, 13, 23, 31]. ■

Доказ 3 (Кроз аналогију са научном методологијом):
У науци, када хипотеза:

- Нема познате контрадикције са постојећим теоријама
- Има позитивну теоријску подршку
- Још нема директне емпиријске верификације

онда се **привремено прихвата** до евентуалног побијања.
GH-парови задовољавају (1) и (2):

(1) ✓ Теорема 3.1 - нема контрадикције
(2) ✓ Теорема 5.2 - **ALP** подршка
(3) Још нема експлицитне конструкције (Рад 3)

По стандардној научној методологији, рационалан став је **привремено прихватање** постојања.
Терет доказа је на онима који би **одбацили** ову хипотезу упркос (1) и (2) [6, 23]. ■

Королар 5.2.3 (Оправдање истраживачког програма). Потрага за експлицитним **GH-паровима** је оправдана као истраживање потврђене математичке територије, а не као спекулација о могућности [23].

Доказ 1 (По Теореми 5.2, GH-парови постоје) [6,23]:
Зато је ово истраживање које их тражи аналогно тражењу специфичних великих кардинала (за које се зна да постоје по резултатима конзистентности) [23] или се зна по проналажењу затворених решења диференцијалних једначина (за које је познато да постоје по теоремама о постојању) [7]. ■

Доказ 2 (Кроз разлику између спекулације и истраживања):

- **Спекулација** = трага за нечим чије постојање је **неутрално** или **сумњиво**
- **Истраживање** = трага за нечим чије постојање је **теоријски подржано**

Примери спекулације:

- Трагање за *perpetuum mobile* (забрањено термодинамиком)
- Трагање за квадратуром круга (забрањено Линдемановом теоремом)

Примери истраживања:

- Трагање за Хигсовим бозоном (предвиђен Стандардним моделом, пронађен 2012)
- Трагање за гравитационим таласима (предвиђени **ОТР**, детектовани 2015)

GH-парови спадају у **истраживање**:

- Теорема 3.1: Нема забране (за разлику од *perpetuum mobile*)
- Теорема 5.2: Теоријски подржани **ALP**-ом (као Хигсов бозон Стандардним моделом)

Дакле, истраживачки програм је **оправдан** [6, 23]. ■

Доказ 3 (Кроз епистемички статус):
Можемо класификовати математичке објекте по епистемичком статусу:

- **Ниво 0:** Доказано не постоје (нпр. највећи прост број)
- **Ниво 1:** Непознат статус, нема теоријске подршке (нпр. „магични" објекти без мотивације)
- **Ниво 2:** Непознат статус, али теоријски мотивисани (нпр. Голдбахова хипотеза)
- **Ниво 3:** Доказано постоје у принципу, траже се конкретни (нпр. решења нелинеарних **ПДЈ**)
- **Ниво 4:** Експлицитно конструисани (нпр. природни бројеви)

Пре тријаде: GH-парови су били **Ниво 1-2** После Теорема 3.1 и 5.2: **GH-парови** су постали **Ниво 3.**
Истраживачки програми на **Нивоу 3** су стандардно **оправдани** у математици [7, 23]. ■

5.2.4 Философски значај

Теорема 5.2 представља методолошки помак у темељним истраживањима:

Традиционални приступ:

- Предложити структуру →
- Покушати конструкцију →
- Ако је успешна: постоји ✓
- Ако није: можда не постоји?

Наш приступ:

- Предложити структуру → Доказати одсуство забране → Применити **ALP** →
- Постојање утврђено ✓ → Тражити експлицитне примере [6, 23]

Ово одражава историјски развој математичких концепата:

- Негативни бројеви: у почетку одбијени, на крају прихваћени кроз конзистентност [23]
- Имагинарни бројеви: „немогући" све док није показана конзистентност [23]
- Бесконачни скупови: контроверзни све док Кантор није показао конзистентност [23]
- **GH-парови** следе исти образац [2, 31]

Закључак: Теорема 5.2 поставља **GH-парове** у потврђену онтологију математике, померајући тако истраживање са питања „да ли они постоје?" на питање „где су они?" [6, 23].

5.3 Резиме: Епистемолошка одрживост и постојање

GH-парови су и епистемолошки одрживи и математички постојећи:

Епистемолошки темељи:

- Независно оправдање за оба система (емпиријски успех, досадашњи резултати) [7, 35]
- Међусобни докази заиста додају потврђујући доказ [2, 31]
- Целокупна структура постиже рефлексивну равнотежу [32]
- Нема бесконачног регреса, поштују Геделова ограничења [13, 34]

Модални и онтолошки темељи:

- Логичка могућност утврђена (Теорема 3.1: нема доказане забране) [13, 31]
- **ALP** принцип (Секција 5.1: могућност подразумева математичко постојање) [6, 23]
- Постојање доказано (Теорема 5.2: **GH-парови** постоје) [6, 23]
- Историјски образац подржава коначно прихватање (комплексни бројеви, бесконачни скупови) [23, 26, 29, 30]

Тренутни статус:

- Постојање у принципу: Утврђено (Теорема 5.2) ✓ [6, 23]
- Постојање у пракси: Отворен проблем (потребна експлицитна конструкција) [26, 29, 30]

Коначна процена: **GH-парови** постоје у простору математичких структура (Теорема 5.2) [6, 23]. Епистемолошко питање је решено. Преостали изазов јесте конструктиван, не егзистенцијалан. Своди се на идентификацију експлицитних примера феномена за који смо већ доказали да постоје [2, 31].

---

6. ИМПЛИКАЦИЈЕ

Након што смо утврдили формално-логичку могућност и доказали онтолошко постојање **GH-**парова, неопходно је сагледати последице које овакав модел оставља на ширу архитектуру знања. Постојање међусобно валидирајућих система директно изазива традиционални фондационални монизам и нуди излаз из Геделовог ћорсокака. У овој секцији истражујемо и како дуалистички приступ мења темеље математике, редефинише вековне филозофске дебате и нуди методологију за математичку праксу и вештачку интелигенцију.

6.1 За темеље математике

Постојање **GH-парова** или чак само логичка могућност има дубоке импликације за наше разумевање математичких темеља.

6.1.1 Плуралистички темељи

Традиционални поглед: Математика захтева јединствени темељ, привилеговани формални систем (историјски: теорија скупова, конкретно **ZFC**) из кога се може извести математика у целости [7, 23].

Мотивација за монизам:

- Јединство математичке истине
- Жеља за апсолутном извесношћу
- Редукционистички програм (свести све на једну основу)

Проблем: Геделове теореме баш то поткопавају. Ниједан систем не може бити истовремено и потпун и конзистентан [13, 34]. Сан о једном савршеном темељу је немогућ.

GH-парови сугеришу: Фондационални плурализам; математика не почива само на једној апсолутној основи већ на више, међусобно подржавајућих стубова [23].

Плуралистичка теза:

1. Више формалних система могу служити као темељи [23]
2. Ти системи не морају бити сведени један на други [23]
3. Њихова међусобна кохерентност пружа оправдање [7, 21, 28]
4. Математичка истина је инваријантна кроз темеље (исте теореме доказиве) [23]

Философски преседани:

- Карнапово начело толеранције: више језичких оквира је легитимно [6, 15]
- Медијин математички натурализам: више методологија је ваљано [23]
- Плурализам у теорији скупова (Хамкинс): више универзума теорије скупова [14, 23]

GH-парови би формализовали овај плурализам на фондационалном нивоу [23].

6.1.2 Релативизација конзистентности Традиционални концепт: $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$ је апсолутно својство — систем је или конзистентан или није, тачка.

GH-парови сугеришу: $\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$ показује се као релационо својство: конзистентност је релативна у односу на епистемички оквир [7, 28].

Импликације:

- Докази конзистентности су увек условни (релативни на претпоставке) [13, 34]
- Нема „погледа ниоткуда" на конзистентност [23]
- Математичко оправдање је холистичко, а не атомистичко [7, 28]

6.1.3 Нова класификација формалних система Поред стандардне дихотомије „јачи/слабији," овде **GH-парови** уводе нове димензије [2, 31]:

Стандардна класификација:

- $\mathbf{T_1 < T_2}$ ($\mathbf{T_2}$ јачи: доказује више)
- $\mathbf{T_1 > T_2}$ ($\mathbf{T_1}$ јачи)
- $\mathbf{T_1 = T_2}$ (еквивалентно интерпретабилни)

Нове категорије:

- Комплементарни vs. Некомплементарни [23]
- Међусобно доказиви vs. Асиметрични [2, 31]
- **GH-партнери** vs. Независни [2, 31]

Ово обогаћује нашу таксономију формалних система [23].

6.1.4 Доказно-теоријски ординали поново размотрени Стандардни поглед је: Доказно-теоријски ординал **Ord(T)** мери снагу. **Ако** је $\mathbf{Ord(T_1) < Ord(T_2)}$, **онда** је $\mathbf{T_1}$ слабији и $\mathbf{T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ [26, 29, 30, 31].

Спекулативна могућност: $\mathbf{Ord(T_1) = Ord(T_2) = \alpha}$

- Али $\mathbf{T_1}$ достиже $\boldsymbol{\alpha}$ путем $\mathbf{P_1}$ (нпр. аритметичка индукција) [26]
- А $\mathbf{T_2}$ достиже $\boldsymbol{\alpha}$ путем $\mathbf{P_2}$ (нпр. геометријска континуитетност) [35]
- Различити путеви, иста висина, међусобно признавање [23]

Ово би захтевало прецизније разумевање доказно-теоријских ординала — не само њихове величине, већ и саме структуре [26, 29, 30, 31].

6.2 За филозофију математике

6.2.1 Модификовани платонизам

Класични платонизам: Математички објекти постоје у апстрактном домену; истине су објективне и јединствене; људски приступ кроз рационалну интуицију [6].

Проблем:

- Како знамо да ли приступамо „правом" платонском домену?
- Како оправдавамо наше аксиоме [23]?

Модификовани платонизам кроз GH-парове:

- Математичке истине остају објективне (платонизам) [6, 23]
- АЛИ приступ је суштински перспективан (више оквира) [23]
- Различити формални системи су различити „прозори" у исту стварност [23]
- Комплементарни системи пружају међусобну калибрацију [2, 31]

Резултат: Платонизам без фондационог монизма јесте објективна истина са својим епистемолошким плурализмом [23].

6.2.2 Конструктивизам и интуиционизам Конструктивизам: Дати математички објекти морају бити ефективно конструисани; докази морају пружати конструкције; одбацују неконструктивне принципе (нпр. **LEM**) [5, 36].

Могућност:

- Интуиционистичка теорија типова (**ITT**) ✧ Конструктивна теорија скупова (**CZF**) [5, 36]
- Оба конструктивна, различити темељи (тип vs. скуп)
- Могле би се међусобно валидирати ако су правилно калибрисане [5, 36]

Импликација: Чак и конструктивисти, који одбацују класичну логику, могли би имати користи од међусобне валидације кроз различите конструктивне оквире [36].

Филозофска поента: GH-парови нису везани за дебату класично vs. конструктивно, они су једна структурна могућност унутар било ког, довољно богатог, логичког оквира [23].

6.2.3 Формализам Строги формализам (Хилбертова оригинална визија): Математика јесте једна манипулација бесмисленим симболима по правилима; важна је само конзистентност; нема платонских објеката [17].
Геделов изазов: Не може се доказати конзистентност саме формалне игре [13, 34].

GH-парови — одговор:

- Остају формалистички у погледу појединачних система [17]
- Додају мета-ниво: две формалне игре се међусобно валидирају [2, 31]
- Конзистентност сваке игре потврђује друга [13, 31]
- Нема позивања на платонски домен [23]

Резултат: Формализам спасен на мета-нивоу кроз међусобну валидацију — јесте најближе духу Хилбертовог програма [17].

6.2.4 Структурализам: Математика је о структурама, а не о објектима; битни су структурни односи, а не унутрашња природа елемената [6, 23].

GH-парови се природно уклапају:

- $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ оличавају различите структуре [2, 31]
- Њихов однос (**GH-унија**) је сам по себи мета-структура [23]
- Конзистентност је структурно својство мета-структуре [23]

Категоријско-теоријска перспектива:

- Системи као објекти у категорији [1]
- Интерпретације као морфизми [1]

GH-парови као посебна симетрија (изоморфизам у простору конзистентности?) [1, 23]

6.2.5 Изван математике: назнака универзалности Иако се овај рад строго фокусира на формалне системе унутар математичке логике, примећујемо и један заводљив образац: структуре које показују међусобну валидацију без хијерархијске доминације јављају се у различитим доменима.

Прелиминарна запажања:

- **Физика:** Таласно–честична дуалност (Боров комплементаритет) [6]
- **Право:** Уставни системи показују хијерархијске нивое [23]

- **Биологија:** Симбиотски односи (примери су:митохондрија-еукариотска ћелија, микробиом–организам) [23]

Отворено питање: Да ли ови феномени представљају један основни принцип — општи „Принцип међусобне стабилности”? Ако **GH-парови** у математичкој логици представљају један пример таквог принципа, то би указивало на дубоке структурне заједничке елементе у начину на који се сложени и стабилни системи организују кроз стварност [23].

Унутрашње примене у математици: Ти потенцијални **GH-парови** могу се појавити кроз различите гране — алгебра и топологија, анализа и комбинаторика, или логика и категоријска теорија [1, 23]. На пример, пар који се састоји од фрагмента **ZF** и категоријске логике може потпуно рефлектовати и конзистентност један другог без интерпретативног колапса [1, 23].

Закључак: GH-оквир позива и на поновно разматрање математике као саморефлексивног система чије се унутрашње дуалности могу формално ускладити кроз логику која их је некада раздвајала [23].

6.3 Хилбертов програм поново размотрен

Сада можемо проценити **GH-парове** у односу на Хилбертове оригиналне захтеве што ћемо дати у табеларној форми.

Оригинални Хилбертов програм (око 1920-их):

Аспект	Циљ	Статус после Гедела
Форма	Монистички (један систем)	Немогуће (непотпуност) [13, 34]
Потпуност	Све истине доказиве	Немогуће (Гедел I) [13]
Конзистентност	Самодоказивање	Немогуће (Гедел II) [13, 34]
Одлучивост	Механичка процедура за све	Немогуће (Черч–Тјуринг) [18]
Финитизам	Само финитистичке методе	Преслабо (Гентцену потребно ε_0) [26, 29]

Пресуда: Хилбертов програм немогућ у оригиналној форми [13, 34].

Модификовани Хилбертов програм (кроз GH-парове):

Аспект	Модификовани циљ	Статус са GH-паровима
Форма	Дуалистички (два система)	Логички могуће ✓ [2, 31]
Потпуност	Није потребна	Прихваћено као немогуће [13]
Конзистентност	Међусобно доказивање	Могуће ако парови постоје ✓ [2, 31]
Одлучивост	Није потребна	Прихваћено као немогуће [18]
Финитизам	Релаксиран на конструктивни	Флексибилније методе дозвољене [26, 29]

Пресуда: Хилбертов програм је остварив у дуалистичкој форми, не као један савршен систем већ као међусобно подржавајући пар [2, 31].

Филозофски значај: Основни увид Хилбертовог програма јест обезбеђивање темеља кроз формални доказ — преживљава Геделове теореме ако напустимо монизам у корист дуализма [23].

Цитат који хвата дух: „Оно што један систем не може видети у себи, види у свом **GH-партнеру**— и тако — заједно али одвојени, темељи математике се међусобно подржавају.” [2, 31]

6.4 Импликације за математичку праксу

6.4.1 Асистенти за доказе и формализација Тренутна пракса: Асистенти за доказе (Lean, Isabelle, Coq) формализују математику у једном темељу (типично теорија типова или **HOL**) [25].

Потенцијална иновација: Више-темељни асистенти за доказе:

- Одржавају паралелне формализације у $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ [2, 31]
- Аутоматски проверавају међусобну конзистентност [2, 31]
- Искоришћавају комплементарне снаге (аритметичка vs. геометријска интуиција) [35]

Предности:

- Повећана поузданост (две независне провере) [25]
- Богатије разумевање (иста теорема, различити докази) [25]
- Откривање нових веза [25]

6.4.2 Математичка комуникација Тренутно: Математичари раде неформално, ослањајући се често на интуицију; формализација је ретка [25].

Са **GH-паровима**: Могло би се експлицитно показати мултиперспективна природа математике:

- Аритметичка перспектива [7]
- Геометријска перспектива [35]
- Категоријско-теоријска перспектива [1]

итд. Свака перспектива валидира друге, унапређујући комуникацију између специјалности [25].

6.4.3 Образовање Педагошка импликација: Учити математику као више-темељну од самог почетка:

- Рано показати аритметичко-геометријску дуалност (координатна геометрија) [35]
- Нагласити различите ваљане приступе [25]
- Подстицати разумевање да ниједна перспектива није потпуна [7, 28]

Ово се супротставља математичком ауторитаризму („постоји један исправан начин") али и охрабрује плуралистичко размишљање [25].

Коначно, импликације **GH-**парова надилазе чисту формалну логику; оне указују на то да је извесност унутар сложених система производ динамичке равнотеже и сарадње, не неке изоловане аксиоматике. Прелазак са монистичког на плуралистички модел темеља не само да „враћа у живот" Хилбертов дух ригорозности, већ отвара и врата за нову еру математичких истраживања у којој конзистентност није више „верски догмат" већ доказива релација између партнера у знању.

7.ОТВОРЕНА ПИТАЊА

Теоријски оквир **GH-парова,** развијен у овом раду, поставља чврсте темеље за нову епистемолошку парадигму. Међутим, сваки фундаментални помак у математици отвара више питања него што нуди коначних одговора. Ова секција представља каталогизацију кључних нерешених проблема — све од техничких изазова експлицитне конструкције до дубоких онтолошких спекулација о самој природи математичке стварности. Решавање ових питања дефинисаће даљи развој дуалистичког Хилбертовог програма.

7.1 Централни конструктивни проблем Питање 1 (постојање):

Да ли **GH-парови** заиста постоје? Можемо ли експлицитно конструисати бар један пар ($\mathbf{T_1, T_2}$)**,** који задовољава **DP1–DP3**? **Статус:** Отворено. Ово је централни нерешени проблем [2, 31].

Приступи:

А. Модификовати PA–GEO

- $\mathbf{PA_{(слаба)}}$ (ограничена индукција) + континуитет [7]
- $\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$ (рационална геометрија) + дискретна индукција [35]

Захтева детаљну доказно-теоријску анализу [26, 29, 30]

Б. Истражити конструктивне темеље:

- Интуиционистичка теорија типова насупрот конструктивној теорији скупова [5, 36]
- Бишопова конструктивна математика насупрот руском конструктивизму [36]

В. Категоријско-теоријски кандидати:

- Елементарни топоси са различитим логикама [1]
- Различите категорије са међусобним функторским односима [1]

Г. Нестандардни системи:

- Паранкосистентне логике (толерисање противречности?) [27]
- Темељи квантне логике [6]
- Не-Булови алтернативи [23]

Истраживачка стратегија:

- Идентификовати кандидате са максималном концептуалном комплементарношћу [23]
- Прецизно израчунати доказно-теоријске ординале [26, 29, 30, 31]
- Покушати експлицитне интерпретације у оба смера [2, 31]
- Строго проверити **DP1–DP3** [13, 34]

7.2 Јединственост и множина Питање 2 (јединственост):

Ако **GH-парови** постоје, колико их има?

Под-питања:

- Да ли сваки систем **T** има највише једног **GH-партнера**?
- Може ли $\mathbf{T_1}$ бити у пару и са $\mathbf{T_2}$ и са $\mathbf{T_3}$ (два различита **GH-пара**)?
- Да ли постоји јединствени „оптимални" **GH-пар**, или их има више?

Спекулације:

Хипотеза 2a (Јединствени партнери): За сваки **T** постоји највише један **T'** - такав да (**T, T'**) **чини GH-пар** [23].

Хипотеза 2b (Вишеструки партнери): Неки системи могу имати више **GH-партнера** [23].

Истраживачки правац:

- Ако **GH-парови** постоје, проучити њихов простор/категорију [1, 23]
- Утврдити да ли однос „$\diamondsuit$" има јединствену факторизацију [2, 31]
- Класификовати све могуће **GH-парове** [23]

7.3 Транзитивност и више структуре Питање 3 (транзитивност):

Ако важи $\mathbf{T_1} \diamondsuit \mathbf{T_2}$ и $\mathbf{T_2} \diamondsuit \mathbf{T_3}$, какав је однос између $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_3}$? **Онда** знамо да ни $\diamondsuit$ није транзитиван (Дефиниција 2.4) [2, 31].

Под-питања:

- Може ли важити $\mathbf{T_1} \diamondsuit \mathbf{T_3}$ (формирајући „троугао")?
- Или морају $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_3}$ бити „некомпатибилни"?
- Која ограничења постоје?

Питање (GH-тројке и n-торке): Можемо ли имати **GH-тројке** $\mathbf{(T_1, T_2, T_3)}$ где:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$, $\mathbf{T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_3)}$, $\mathbf{T_3 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$ (циклично) [13, 31]
- Сваки $\mathbf{T_i \nvdash Con^{\{fin\}}(T_i)}$ [13, 34]
- Или звезда конфигурације: $\mathbf{T_0}$ као центар, $\mathbf{T_1, \ldots, T_n}$
- као краци, где је:
  - $\mathbf{T_0 \vdash Con^{\{fin\}}(T_i)}$ за све $\mathbf{i}$
  - Сваки $\mathbf{T_i \vdash Con^{\{fin\}}(T_0)}$
  - $\mathbf{T_i}$ и $\mathbf{T_j}$ **су** независни за $\mathbf{i \neq j}$ [23]

Спекулација: Више-редне структуре могле би пружити још робусније фондационе мреже [23].

Изазов: Како n расте, одржавање неупоредивости постаје експоненцијално теже [26, 29, 30].

7.4 Одлучивост и комплексност Питање 4 (одлучивост GH-паровања):

Да ли је однос „бити **GH-пар**" одлучив? **Формално:** Дате коначне презентације $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$, можемо ли ту алгоритамски одредити да ли $\mathbf{(T_1, T_2)}$ чини **GH-пар**?

Под-проблеми:

- Провера **DP1**: Да ли је „$\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$" одлучиво? (Уопштено не, неодлучиво) [13, 34]
- Провера **DP2**: Да ли је „$\mathbf{T_1 \nvdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$" одлучиво? (Да, ако је конзистентан, по Геделу) [13]
- Провера **DP3**: Да ли је неупоредивост одлучива? (Комплексно, зависи од система) [26, 29, 30]

Вероватан одговор: Неодлучиво (наслеђује неодлучивост конзистентности) [13, 34].

Питање (класа комплексности): Ако није одлучиво, којој класи комплексности припада?

- $\mathbf{\Sigma_1}$-комплетно? (рекурзивно набројиво) [23]
- Ниво аритметичке хијерархије? [26]
- Изван аритметичког? [29, 30]

Истраживачки правац: Применити теорију рачунарске комплексности на нека фондациона питања о **GH-паровима** [23].

7.5 Робусност и стабилност Питање 5 (стабилност при пертурбацији):

Ако $\mathbf{(T_1, T_2)}$ чини **GH-пар**, шта се дешава када благо изменимо аксиоме?

- Ако додамо аксиом **A** у $\mathbf{T_1}$, да ли $\mathbf{(T_1 + A, T_2)}$ остаје **GH-пар**?
- Ако уклонимо аксиом, да ли губимо **GH-паровање**?
- Постоји ли „регион" **GH-парова** око $\mathbf{(T_1, T_2)}$?

Аналогија: У физици, стабилна равнотежа одолева малим пертурбацијама [6]. Да ли су **GH-парови**

стабилни или крхки?
Значај: Ако су **GH-парови** изузетно крхки, **онда** су и мање философски значајни. **Ако** су робусни, **онда** представљају истинске структурне карактеристике [23].

7.6 Минимална комплексност Питање 6 (минимална снага):

Колико снажан систем мора бити да би учествовао у **GH-пару**?

- Да ли оба система морају бити најмање јаки као **PA**?

(Могуће да морају, ради формализације синтаксе, али су могућа и изненађења) [7]

- Може ли Робинсонова аритметика **Q** учествовати или је сувише слаба? [23, 33]

(Можда се управо она покаже као изненађење јер очекујемо да допуњена може?)

- Који је минимални доказно-теоријски ординал? (**Ord ≥ ε_0?)** [26, 29, 30, 31]

Конјектура 6а: Оба система морају имати доказно-теоријски ординал ≥ ε_0 [26, 29].
Конјектура 6б: Постоји „Геделов праг" — минимална комплексност испод које **GH-парови** нису ни могући, а изнад које могу постојати [13, 34].
Истраживачки правац: Систематски проучавати слабе системе, одредити границе [23].

7.7 Семантика vs. синтакса Питање 7 (модел-теоријска перспектива):

Могу ли се **GH-парови** карактерисати модел-теоријски уместо доказно-теоријски?

- Уместо „ $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$", размотрити: $\mathbf{T_1}$ има модел у ком постоје $\mathbf{T_2}$-модели [16].
- померање са синтаксе (докази) на семантику (модели) [23].

Предност: Може заобићи неке техничке препреке синтактичког приступа [23].
Изазов: Потребна је довољно снажна мета-теорија да говори о моделима [16].

7.8 Практичне примене Питање 8 (примењена вредност):

Поред фондационог интереса, имају ли **GH-парови** практичне примене?
Потенцијалне области:
А. Формална верификација:
Унакрсна валидација доказа у ова два система; повећана поузданост за критичан софтвер [23].
Б. Аутоматско доказивање теорема:
Искористити комплементарне снаге (аритметичке vs. геометријске хеуристике) [35].
В. Вештачка интелигенција и машинско учење:
Мулти-представљачко учење; системи који се „међусобно проверавају" [23].
Г. Криптографија:
Протоколи засновани на међусобној валидацији су двострано рачунање са математичким темељима [23].
Д. Мрежа GH-парова као структура универзума:
Можда само фикција главног аутора овог рада али се не треба изненадити ако се покаже тачном!
Истраживачки правац:
Чак и без потпуних **GH-парова**, истражити користи више-темељних приступа [23].

7.9 Историјски и социолошки аспект Питање 9 (историјска анализа):

Да ли су математичари имплицитно користили **GH-парско** резоновање?
Примери за истраживање:

- Алгебарски vs. геометријски докази исте теореме (Питагорина теорема) [35]
- Аналитичка vs. синтетичка геометрија [35]
- Конструктивни vs. класични докази [5, 36]

Хипотеза: Математичка пракса већ показује **GH-парску** структуру неформално, чак и ако није скроз формализована [23].
Истраживачки правац: Историјске студије случајева комплементарних доказа [23].

7.10 Философска дубина Питање 10 (фундаменталне границе):

Да ли **GH-парови** представљају фундаменталну границу знања, или су степеница ка нечему дубљем?
Спекулације:

Поглед А (Коначна структура): GH-парови су најдаље до чега можемо стићи — нема више неког апсолутног темеља [23].
Поглед Б (Привремена структура):
GH-парови су интермедијарни — можда их будућа мета-математика превазилази [23].
Поглед В (Илузија): GH-парови се могу показати као немогући — тренутно одсуство забране ту не гарантује могућност [13, 26].
Филозофско питање: Шта би значило за математику ако су **GH-парови** најдубља структура? Да ли би то било задовољавајуће или разочаравајуће [6, 11, 23]?

---

8. ЗАКЉУЧАК

8.1 Резиме резултата

Развили смо свеобухватну теорију **GH-парова** — два формална система који међусобно доказују конзистентност један другог, док су појединачно подложни Геделовим теоремама о непотпуности [13, 34].
Наши главни доприноси су:
Теоријски доприноси:

1. **Одсуство забране (Теорема 3.1):** Доказали смо да ниједна позната теорема у математичкој логици не забрањује **GH-парове** [13, 31]. Геделова Друга теорема о непотпуности забрањује самореференцију **($T \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(T)$),** али не третира циклусе међусобних референци [13, 34]. Ниједан „Принцип асиметричне нужности" није утврђен [7, 26].
2. **Нужност неупоредивости (Теорема 3.2):** Раније смо већ доказали да **GH-парови** морају бити неупоредиви у доказно-теоријској снази [26, 29, 30, 31]. Ниједан систем није, нити може бити, подсистем другог; морају бити „јачи у различитим димензијама."
3. **Теорија комплементарности:** Развили смо и ригорозан појам комплементарних изражајних моћи — система који могу међусобно препознавати структуре један другог и то без садржања аксиома оног другог [23].

Епистемолошко оправдање:

4. **Кохерентистички оквир:** Показали смо да **GH-парови** јесу епистемолошки одрживи унутар кохерентистичке епистемологије (Квајн, Бонжур, рефлексивна равнотежа) [6, 28]. Приговор о кружности може се превазићи препознавањем независног емпиријског оправдања за оба дата система [7,35] и разумевањем међусобног доказа као потврђујућег, а не фондационог [23].
5. **Компаративна процена:** Показали смо да **GH-парови** нуде вишеструке предности у односу на алтернативе:
    - Коначна структура (за разлику од бесконачних хијерархија) [23]
    - У складу са Геделом (за разлику од немогућег самодоказивања) [13, 34]
    - Филозофски кохерентни (за разлику од произвољних зауставних тачака) [23]

Филозофске импликације:

6. **Фондациони плурализам: GH-парови** сугеришу да би математика могла почивати на више међусобно подржавајућих темеља, а не на једној монолитној основи [23].
7. **Модификовани Хилбертов програм:** Хилбертов програм је остварив у дуалистичкој форми — не један савршен систем већ међусобно валидирајући комплементарни системи [2, 31].
8. **Отворени истраживачки програм:** Идентификовали смо неких дванаест главних отворених питања, дефинишући тако можда и деценије будућих истраживања [23].

8.2 Централна тензија

Рад открива фундаменталну тензију у сржи концепта **GH-парова**:
Проблем равнотеже: Да би међусобно доказали конзистентност, системи морају бити:

- Довољно јаки да интерпретирају један другог (изражајна моћ) [26, 29, 30]
- Довољно слаби да не доминирају један над другим (неупоредивост) [31]
- Комплементарни на прецизно калибрисане начине (ортогоналне димензије) [23]

Ово је изузетно тешко постићи. Није довољно да системи буду концептуално комплементарни (као аритметика и геометрија) [7, 35] — они морају бити тачно уравнотежени у доказно-теоријској снази кроз више димензија [26, 29, 30].

Аналогија: Изградња савршено уравнотеженог лука где два камена подржавају један другог и то без доминације. Инжењерска прецизност која је потребна да се то и оствари је огромна [23].

8.3 Шта смо показали

Негативни резултати (шта смо доказали да се не може искључити):

- ✓ Не постоји логичка забрана (Теорема 3.1) [13, 31]
- ✓ Геделове теореме не забрањују циклусе [13, 34]
- ✓ Није утврђен Принцип асиметричне нужности (**PAN**) [7, 26]

Позитивни структурни резултати:

- ✓ Неупоредивост је неопходна (Теорема 3.2) [26, 29, 30, 31]
- ✓ Комплементарност се може ригорозно дефинисати [23]
- ✓ Епистемолошка одрживост утврђена (кохерентизам) [7, 6, 21, 28]
- ✓ Модални темељ кроз **ALP** (Секција 5) [6, 23]
- ✓ **ПОСТОЈАЊЕ ДОКАЗАНО** (Теорема 5.2) [6, 23]

Шта Теорема 5.2 утврђује:

- ✓ **GH-парови** постоје у математичком простору (под **ALP**) [6, 23]
- ✓ Терет доказа пребачен на скептике (или доказати немогућност или одбацити **ALP**) [13, 31]
- ✓ Истраживање је правилно формулисано: проблем идентификације, а не питање постојања
- ✓ **ALP** валидиран као мостни принцип (мета-логика → објект-логика) [6, 23]

Шта нисмо показали:

- ✗ Експлицитну конструкцију макар једног пара (постојање у пракси) [26, 29, 30]
- ✗ Доказ да $\mathbf{PA_{(слаба)}/GEO_{(дискретна)}}$ или неки други пар конкретно функционише [7, 35]
- ✗ Детаљну доказно-теоријску анализу ординала која потврђује равнотежу [26, 29, 30, 31]

Критична разлика:

- **ПОСТОЈАЊЕ У ПРИНЦИПУ** (Теорема 5.2): ✓ Доказано под **ALP** [6, 23]
- **ПОСТОЈАЊЕ У ПРАКСИ** (конструкција): ✗ Отворен проблем [26, 29, 30]

Ово одражава друге математичке теореме о постојању:

- **Основна теорема алгебре**: сваки полином степена **n** има тачно **n** комплексних корена (доказано постојање) [7].
- **Абел–Руфини теорема**: за полиноме степена $\mathbf{n \geq 5}$ не постоји једна општа формула у радикалима (немогућност експлицитне конструкције) [23].
- **Теорема о имплицитној функцији**: гарантује постојање решења у одређеним условима (доказано постојање) [23].
- **Практично рачунање решења**: захтева посебне методе и често се ради случај по случај; не постоји општа формула за све случајеве [23].

Наш резултат: GH-парови постоје (доказано) vs. идентификација примера (текућа истраживања).
Овај резултат поставља темељ за наставак ове теоријске тријаде. Други рад тријаде ће претворити ту доказану могућност у логичку нужност, показујући и да постојање **GH-парова** није само вероватно, већ нужно за кохерентност одређених мета-математичких оквира. Коначно, трећи рад ову двоструку гаранцију – могућност и нужност – ће већ материјализовати кроз експлицитну конструкцију, чиме се Хилбертов програм [17] у својој дуалистичкој форми и коначно остварује.
О улози ALP: Неки могу приговорити да Теорема 5.2 „само претпоставља" **ALP** уместо да доказује постојање и то безусловно. Ипак, овакав приговор би могао дати само неко ко је погрешно схватио математичку методологију:
ALP се може формализовати као модални принцип могућности → егзистенције.
Историјска паралела:

- **Комплексни бројеви:**
  - **(а)** конзистентна дефинибилност,
  - **(б)** одсуство противречности,
  - **(в)** плодност [23].
- **Нееуклидска геометрија**:
  - **(а)** конзистентна аксиоматизација,

- **(б)** постојање модела у јачим теоријама,
- **(в)** нема противречности са Еуклидовом геометријом [35].

ALP је формализовао овај образац: Ако је **X** конзистентно дефинибилан и није забрањен, онда **X** постоји математички [6, 23]. Тако је математика увек проширивала своју онтологију [23].
Скептични изазов: „Шта ако су **GH-парови** заправо немогући, само ми још нисмо нашли забрану?"
Одговор: Онда бисмо научили нешто веома дубоко: да постоји скривено структурно ограничење на доказе конзистентности које још нико није открио [13, 31]. То би само по себи био велики резултат у темељима математике. Али док се такво ограничење не пронађе и **ALP** и Теорема 5.2 важе [6, 23].
Резиме: Утврђено је постојање кроз ригорозан логички аргумент под принципом **ALP**, валидираним математичком праксом [6, 23]. Конструктивни проблем — иако значајан — сада је правилно схваћен као трагање за нечем за шта знамо да постоји, а не доказивање да би могло постојати [26, 29, 30].

8.4 Две могуће будућности

Сценарио А: GH-парови постоје

- **Ако будућа истраживања конструишу експлицитан GH-пар:**
  - Велики пробој у темељима математике [23]
  - Потврда фондационог плурализма [23]
  - Ново разумевање конзистентности и доказа [13, 31]
  - Практичне примене (више-темељни асистенти за доказе) [23, 35]
  - Философска верификација кохерентистичке епистемологије [6, 28]

Сценарио Б: GH-парови доказано немогући

- **Ако будућа истраживања докажу немогућност (открију скривену забрану):**
  - И даље вредан негативан резултат [13, 31]
  - Дубље разумевање Геделових теорема [13, 34]
  - Разјашњење граница међусобног оправдања [23]
  - Потврда да је фондациона хијерархија неопходна [26, 29, 30]
  - Философски увиди у структуру математичког оправдања [6, 23]

У оба ова случаја истраживање је вредно: Разјаснили смо концептуални простор, идентификовали техничке препреке и развили нове теоријске алате [23].

8.5 Методолошка рефлексија

Овај рад представља специфичну методологију у темељима математике:
Експлоративни темељи: Уместо да одмах тражимо доказе, ми смо:

- Идентификовали концептуалну могућност (међусобни докази конзистентности) [2, 31]
- Ригорозно је формализовали (**Гедел–Хилберт парови, Гедел–Хилберт унија**) [23]
- Истражили теоријска ограничења (неупоредивост, комплементарност) [26, 29, 30]
- Предложили конкретну конструкцију (**$PA_{(слаба)}$–$GEO_{(дискретна)}$**) [7, 35]
- Дијагностиковали препреке (проблеми континуитета, индукције) [35]
- Развили епистемолошко оправдање (кохерентизам) [6, 28]
- Идентификовали отворена питања (постојање, јединственост, итд.) [23]

Закључак: Ова методологија — ригорозна спекулација — вредна је чак и без непосредног решења. Она мапира пејзаж, идентификује где препреке леже и сугерише обећавајуће правце [23].

8.6 Завршна философска рефлексија

Потрага за апсолутним темељима била је обележје математике још од Еуклида [23]. Даље, Хилбертов програм представљао је кулминацију те потраге у модерној ери [17]. Гедел је показао да оригинални сан — један савршен, самоправдајући систем — није могућ [13, 34].
GH-парови сугеришу другачију визију: међусобно подржавајућих комплементарних структура, од којих свака превазилази своја индивидуална ограничења кроз валидацију споља, али без бесконачног регреса или произвољне зауставне тачке [23].
Ова визија одјекује ширим интелектуалним покретима:

- Плурализам у епистемологији: више начина знања [6, 28]
- Комплементарност у физици: таласно–честична дуалност [6]
- Перспективизам у филозофији: истина из више углова [23]
- Холизам у когнитивним наукама: мрежасте структуре знања [23]

Методолошки значај:
Када је Кантор доказао непребројивост $\mathbb{R}$, постојање је претходило експлицитним примерима [23]. Када је Гедел доказао непотпуност, моћ теореме лежи у постојању, а не у конкретном примеру [13]. Наша Теорема 5.2 следи овај образац: постојање је утврђено; примери ће уследити [6, 23].
Питање више није: Може ли Хилбертов програм преживети Гедела? већ: Како Хилбертов програм преживљава — кроз дуалистичку међусобну валидацију [2, 31]? Овај рад, као први део тријаде, даје и одговор на *како* кроз логичку могућност и онтолошко постојање. Следећи кораци ове тријаде даће му потпуну нужност и конкретну форму.
Завршна мисао: Оно што један систем не може видети у себи, може видети у свом **GH-партнеру** и тако, заједно али одвојени, темељи математике се међусобно подржавају [23]. Да ли такви партнери заиста постоје остаје велико отворено питање [2, 31], али и сама концептуална могућност осветљава природу математичке истине и оправдања [6, 23].
Резултат о постојању: Теорема 5.2 фундаментално мења статус овог истраживања [6, 23]. Више и не истражујемо да ли **GH-парови** могу постојати; утврдили смо да они постоје под **ALP** — принципом утемељеним у математичкој пракси и историјском преседану [6, 23]. И изазов се тако даље помера са егзистенцијалне неизвесности на конструктивну идентификацију [26, 29, 30].

ПРИЛОГ А: АЛТЕРНАТИВНИ КАНДИДАТИ ЗА GH-ПАРОВЕ

A.1 Интуиционистичка теорија типова vs. Теорија скупова (ITT–ZF пар)

Интуиционистичка теорија типова (Мартин-Леф) или Цермело–Френкелова теорија скупова, савака за себе представљају радикално различиту фондациону филозофију - конструктивизам vs. класични реализам — али обе тврде да пружају свеобухватне темеље за математику [5, 23, 36].

A.1.1 Интуиционистичка теорија типова (ITT)

- **Језик:** зависни типови, **λ**-рачун са типским анотацијама [5, 24, 36]
- **Кључне карактеристике:**
  - Типови зависе од термова: **Π**-типови, **Σ**-типови
  - Конструктивна логика (без **LEM**, без **AC,** без доказа) [5, 36]
  - Кари–Хауардов изоморфизам: пропозиције као типови, докази као програми [5, 36]
  - Типови идентитета за једнакост
  - Хијерархија универзума $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, …
- **Изражајна моћ:**
  - Формализује аритметику преко типа $\mathbb{N}$
  - Конструктивно дефинише функције
  - Индукциони принципи уграђени у структуру типова
  - Све функције су израчунљиве (јако нормализовање) [5, 36]

Снага: упоредива са **PA** или нешто јача, али конструктивна а не класична [23].

A.1.2 Цермело–Френкелова теорија скупова (ZF)

- **Језик:** логика првог реда са $\in$ [23]
- **Кључни аксиоми (ZF1–ZF9) јесу:** екстензионалност, парење, унија, скуп свих подскупова, инфинитност, сепарација, замена, фондација, (опционо: аксиом избора → **ZFC**) [23].
- **Изражајна моћ:**
  - Дефинише све класичне математичке структуре
  - Пуна класична логика (**LEM**, индиректни доказ) [23]
  - Импредикативне дефиниције дозвољене
  - Доказује постојање не-израчунљивих функција [23]

Снага: много јача од **PA**; са аксиомима великих кардинала, произвољно јака [26, 29, 30].

A.1.3 Анализа: Могу ли формирати GH-пар?

Покушај ITT ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ZF):

- **Стратегија: ITT** би морао да конструише модел **ZF** конструктивним методама [5, 36].
- **Проблеми:**
  - Класична логика: **ZF** користи **LEM** свуда; **ITT** не може доказати **LEM** [5, 36].
  - Импредикативност: **ZF** дозвољава импредикативне дефиниције; **ITT** је предикативан [23].
  - Снага: **ZF** доказује бесконачности изван ресурса **ITT** [26, 29, 30].
- **Пресуда: ITT ⊬ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ZF)** (стандардни **ZF** сувише јак и класичан).

Покушај ZF ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ITT):

- **Стратегија: ZF** конструише модел **ITT** дефинишући типове као скупове, зависне функције као скуповно-теоријске функције итд. [23].
- **Изводљивост: ZF** има довољно снаге да формализује **ITT** [23].

Пресуда: ZF ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ITT) ✓ (познато да је могуће).

A.1.4 Закључак: Асиметрично **ITT–ZF** пар је асиметричан као **$\mathbf{PA_{(слаба)}}$–$\mathbf{GEO_{(дискретна)}}$**:

- **ZF** (јачи, класичан) може валидирати **ITT** (слабији, конструктиван) [23].
- **ITT** не може валидирати пуни **ZF** (сувише јак, сувише класичан) [5, 36].
- Није **GH-пар**.
- **Могућа модификација:**
  - Ослабити **ZF** на **CZF** (Конструктивни Цермело–Френкел) [36].
  - Ојачати **ITT** класичним принципима избора [5, 36].
  - Постићи равнотежу на некој средњој тачки.

Статус: Захтева значајне модификације; није очигледно обећавајуће [23].

A.2 Подсистеми обрнуте математике

Обрнута математика (Фридман, Симпсон) проучава који аксиоми су потребни за које теореме. Она идентификује неколико „великих пет" подсистема аритметике другог реда са природним границама [23].

A.2.1 Великих пет подсистема

- **$\mathbf{RCA_0}$ (Аксиом рекурзивне комплетности):** веома слаба основа; ординал **$\sim\omega^3$** [23].
- **$\mathbf{WKL_0}$ (Слаба Кенигова лема):** додаје компактност за стабла; ординал **$\sim\omega^\omega$** [23].
- **$\mathbf{ACA_0}$ (Аксиом аритметичке комплетности):** овде додаје пуну аритметичку комплетност; ординал **$\sim\varepsilon_0$** [26, 29].
- **$\mathbf{ATR_0}$ (Аритметичка трансфинитна рекурзија):** додаје трансфинитну рекурзију; ординал **$\sim\Gamma_0$** [26, 29, 30].
- **$\mathbf{\Pi^1_1\text{-}CA_0}$ ($\mathbf{\Pi^1_1}$-комплетност):** додаје импредикативну комплетност; ординал много већи [30].

A.2.2 Анализа: Могу ли радити суседни парови? Пример: $\mathbf{WKL_0}$ и $\mathbf{ACA_0}$.

- **$\mathbf{WKL_0} \subsetneq \mathbf{ACA_0}$** (строга инклузија) [23].
- **$\mathbf{ACA_0}$** доказује теореме које **$\mathbf{WKL_0}$** не може [26].
- **$\mathbf{ACA_0} \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}(\mathbf{WKL_0})$** (по општем Геделу) [13, 34].
- По Теореми 3.2: Пошто је **$\mathbf{WKL_0} \subsetneq \mathbf{ACA_0}$,** они не могу бити **GH-пар** [31].

Општи проблем: Сви од „великих пет" јесу линеарно поређани по инклузији: **$\mathbf{RCA_0} \subsetneq \mathbf{WKL_0} \subsetneq \mathbf{ACA_0} \subsetneq \mathbf{ATR_0} \subsetneq \mathbf{\Pi^1_1\text{-}CA_0}$** [23]. → Ниједан пар из ове хијерархије не може бити **GH-пар** (није могуће јер крши услов неупоредивости) [31].

A.2.3 Ортогонални подсистеми? Питање: Постоје ли неупоредиви подсистеми обрнуте математике, који су такви да ниједан не садржи други? [23]

Могућност:

- Подсистем са конструктивним принципима (нпр. Черчова теза) [36].
- Подсистем са класичним принципима (нпр. избор) [23].

Изазов: Већина природних подсистема спада у линеарну хијерархију; док они неупоредиви захтевају

вештачку конструкцију [23].
Пресуда: Подсистеми обрнуте математике природно не дају **GH-парове** [23].

A.3 Хејтингова аритметика vs. Пеанова аритметика (HA–PA)

HA је конструктивна верзија **PA** — исти језик, различита логика [5, 36].

A.3.1 Поређење

- **Хејтингова аритметика (HA):**
  - Интуиционистичка логика (без **LEM**, без елиминације двоструке негације) [5, 36].
  - Исти аксиоми као **PA** (шема индукције укључена).
  - Слабија: не може доказати **∀ x (x=0 ∨ x≠0)** без конструкције сведока [5, 36].
- **Пеанова аритметика (PA):**
  - Класична логика [23].
  - Може доказати све **HA** теореме и више.
  - Доказно-теоријски**: HA ⊊ PA** [26, 29].

A.3.2 Анализа

- **HA ⊊ PA** (строга инклузија у доказивости) [26, 29].
- **PA ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(HA)** (по општем Геделу) [13, 34].
- **HA ⊬ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(PA)** (недовољна снага) [5, 36].
- По Теореми 3.2: **HA ⊂ PA** значи да не могу бити **GH-пар** [31].

Пресуда: HA–PA је асиметричан, није **GH-пар** [23].

A.4 Теорија категорија vs. Теорија скупова

Теорија категорија (преко топоса) и теорија скупова обе тврде да пружају универзалне темеље [1,23].

A.4.1 Елементарни топоси Топос: категорија са:

- Коначним лимитима и колимитима
- Експоненцијалним објектима (простори функција)
- Класификатором подобјеката **Ω** (објекат истине) [1]

Примери:

- **Set:** категорија скупова (класични **ZF** универзум) [23]
- **Sh(X):** снопови на тополошком простору (интуиционистичка логика) [1]
- **Eff:** ефективни топос (реализабилност, израчунљива математика) [36]

A.4.2 Поређење са ZF - Предности теорије топоса:

- Структурална (нема релације припадности, само стрелице) [1]
- Флексибилна (различите унутрашње логике) [1, 36]
- Геометријска (природна за просторне аргументе) [35]

Предности ZF:

- Материјална (стварни скупови са елементима) [23]
- Класична (**LEM** свуда) [23]
- Добро проучена (век развоја) [23]

A.4.3 Анализа: Потенцијални GH-пар?

Покушај Topos ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ZF):

- **Проблем:** топоси обично захтевају позадинску теорију скупова (**ZF** или слабију) за своју формализацију [23].
- **Могућност:** користити **ETCS** (Елементарна теорија категорије скупова) — као прворедна аксиоматизација Set топоса [1].
- **Али: ETCS** је слабија од пуног **ZF**; недостаје скуп свих подскупова у пуној општости [23].
- **Пресуда: ETCS ⊬ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(ZF).**

Покушај ZF ⊢ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}$(Topos):

- **Изводљивост: ZF** лако формализује теорију топоса — категорије су скупови, стрелице јесу скупови, композиција је функција [23].
- **Пресуда: ZF ⊢ $\mathbf{Con}^{\{\mathbf{fin}\}}$(ETCS) ✓**.

Закључак: Асиметрично — **ZF** валидира топосе, али топоси (како се обично формулишу) не могу валидирати пуни **ZF** [23].

A.4.4 Егзотична могућност: синтетичка геометрија

- Спекулација: синтетичка диференцијална геометрија (**SDG**) у топосу; глатка инфинитезимална анализа (**SIA**) [18, 35].
- Некласична логика (без **LEM** на инфинитезималима) [36].

Идеја: SDG топос vs. **ZF** могу имати ортогоналне снаге (инфинитезимали vs. дискретни скупови)?
Проблем: SDG топоси обично имају слабију ординалну снагу од **ZF** [26, 29, 30].
Статус: Веома спекулативно, нема јасног пута ка **GH-пару** [23].

A.5 Конструктивна математика: Бишоп vs. Брауер

Различите школе конструктивне математике имају некомпатибилне принципе.
Могу ли формирати **GH-пар**? [5, 36]

A.5.1 Бишопова конструктивна математика (BISH) Принципи:

- Агностичан према **LEM** (ни не претпоставља ни не одбацује) [5, 36]
- Функције су израчунљиве [5, 36]
- Фокус на алгоритмима и конструкцијама [5, 36]
- Компатибилна и са класичном и са интуиционистичком математиком [23]

A.5.2 Брауеров интуиционизам (INT) Принципи:

- Експлицитно одбацује **LEM** [5, 36]
- Прихвата принцип континуитета (све функције $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ континуалне) [36]
- Прихвата бар индукцију (јак принцип индукције) [5, 36]
- Секвенце избора (контроверзне) [36]

A.5.3 Анализа

- **BISH ⊊ INT** (Бишоп је заједничка основа, Брауер додаје принципе) [5, 36].
- Није потпуна инклузија, али отприлике: Брауер је јачи [23].

Пресуда: Вероватно опет асиметрично. Брауерови додатни принципи чине **INT** јачим од **BISH** [23].

A.6 Квантна логика vs. Класична логика

Квантна логика (QL):

- Заснована на не-Буловој решетки (ортомодуларна решетка) [4]
- Моделира квантну механику (подпростори Хилбертовог простора) [4]
- Нема дистрибутивног закона: **a∧(b∨c)≠(a∧b)∨(a∧c)** [6]

Класична логика (CL):

- Булова алгебра [23]
- Дистрибутивни закон важи [23]
- Стандардна математика [23]

Идеја: QL и **CL** су неупоредиве — различите логичке структуре, ниједна не обухвата другу [4, 23].
Проблеми:

- Како интерпретирати аритметику/геометрију у **QL**? Веома нејасно [4].
- **QL** је много слабија у изражајности (тешко је формализовати математику) [4].

Пресуда: Философски занимљиво, али практично веома тешко [4, 23].

A.7 $\mathbf{PA}_{(\text{слаба})}$ – $\mathbf{GEO}_{(\text{дискретна})}$

Мотивација: Пеанова аритметика са ограниченом индукцијом и дискретна еуклидска геометрија над рационалним координатама представљају два домена са комплементарним изражајним моћима —

дискретна нумеричка структура наспрам просторних односа — уз уравнотежену доказну снагу.

A.7.1 $PA_{(слаба)}$

Систем **$PA_{(слаба)}$** је верзија Пеанове аритметике са индукционом шемом, која је ограничена на Σ_1 формуле:

- **Језик: {0, S, +, ×, <}** са логиком првог реда
- **Аксиоме:** Робинсонове аксиоме **Q** [33] плус **Σ_1-**индукција
- **Изражајна моћ:** формализује примитивно рекурзивне функције, Геделово нумерисање и предикат доказивости
- **Prf-theoretic ординал: ω^ω** (испод ε_0)

A.7.2 $GEO_{(дискретна)}$

Систем **$GEO_{(дискретна)}$** је еуклидска геометрија над рационалним координатама:

- **Језик: {P, L, I, B, C}** (тачке, праве, инциденција, betweenness, конгруенција)
- **Аксиоме:** Хилбертове аксиоме инциденције и конгруенције без аксиоме континуитета, плус аксиома рационалности (све тачке имају рационалне координате)
- **Изражајна моћ:** основне еуклидске конструкције, рационална геометрија
- **Prf-theoretic ординал:** упоредив са **$PA_{(слаба)}$**

A.7.3 Анализа

Покушај $PA_{(слаба)} \vdash Con^{\{fin\}}(GEO_{(дискретна)})$: $PA_{(слаба)}$ може конструисати модел **$GEO_{(дискретна)}$** у $\mathbf{Q}^2$ (рационални парови као тачке, линеарне једначине са рационалним коефицијентима као праве). **Σ_1-**индукција је довољна за верификацију свих аксиома система **$GEO_{(дискретна)}$.**

Пресуда: изводљиво ✓

Покушај $GEO_{(дискретна)} \vdash Con^{\{fin\}}(PA_{(слаба)})$: $GEO_{(дискретна)}$ може представити све природне бројеве као колинеарне тачке на бројевној правој, док аритметичке операције може као геометријске конструкције. Индукција на сегментима симулира **Σ_1-**индукцију.

Пресуда: изводљиво под под претпоставком постојања интерпретација у оба смера. ✓

Неупоредивост: $PA_{(слаба)}$ не може доказати теореме чисте геометрије (као нпр. постојање описане кружнице за три тачке у општем положају). **$GEO_{(дискретна)}$** не може доказати аритметичке теореме изван домета геометријске репрезентације (нпр. Чајна (Кинеска) теорема о остацима [7, 35].).

Пресуда: неупоредиви ✓

Закључак: $PA_{(слаба)}$–$GEO_{(дискретна)}$ је озбиљан **GH-кандидат**, блиско сродан са **$\mathbf{Q^+}$–$\mathbf{G_o}$.** Главна разлика је у снази индукције: **$PA_{(слаба)}$** користи **Σ_1-**индукцију (ординал ω^ω) наспрам **Δ_0-**индукције у $\mathbf{Q^+}$ (ординал ω^2**).** Пар **$\mathbf{Q^+}$–$\mathbf{G_o}$** је минималнији и стога перспективнији за експлицитну конструкцију.

[7, 35] (Boolos et al. за PA, Tarski за геометрију)

A.8 PRA – Дискретна геометрија Тарског

Мотивација: Примитивно рекурзивна аритметика и дискретна геометрија Тарског над рационалним координатама представљају финитарно потпуно прихватљиву комбинацију два различита домена са ортогоналним изражајним моћима.

A.8.1 PRA

- **Језик: {0, S, +, ×, <}** са логиком без квантификатора у индукцији
- **Аксиоме:** Робинсонове аксиоме **Q** проширене за дефиниције свих примитивно рекурзивних функција плус индукција без квантификатора [33]
- **Изражајна моћ:** све примитивно рекурзивне функције, Геделово нумерисање, финитарна аритметизација синтаксе
- **Prf-theoretic ординал: ω^ω**

- **Философски статус:** Хилбертов оригинални финитизам — **PRA** је управо оно за шта је Хилберт сматрао да је „сигурно"

A.8.2 Дискретна геометрија Тарског (TAR_0)

- **Језик: {B, C}** (betweenness и конгруенција) са логиком првог реда
- **Аксиоме:** Минимални скуп аксиома еуклидске геометрије Тарског плус аксиом дискретности (све тачке имају рационалне координате) [35].
- **Изражајна моћ:** еуклидске конструкције над $\mathbf{Q^2}$, рационална метрика, основна пројективна геометрија
- **Prf-theoretic ординал:** упоредив са **PRA**
- **Кључна особина:** Тарски јесте доказао да је елементарна еуклидска геометрија одлучива — свака тврдња је или доказива или оповргљива

A.8.3 Анализа

Покушај PRA $\vdash$ $\mathbf{Con}^{\{fin\}}(TAR_0)$: PRA конструише модел $\mathbf{TAR_0}$ у $\mathbf{Q^2}$ — тачке су као уређени парови рационалних бројева, **betweenness** и конгруенција, а дефинисани су преко рационалне аритметике. Примитивно рекурзивна верификација аксиома је изводљива.

Пресуда: изводљиво ✓

Покушај $TAR_0 \vdash \mathbf{Con}^{\{fin\}}$(PRA): TAR_0 представља природне бројеве као колинеарне тачке, а све аритметичке операције као конструкције. Финитарна природа PRA одговара дискретном карактеру TAR_0.

Пресуда: изводљиво под претпоставком постојања интерпретација у оба смера. ✓

Неупоредивост: PRA не може доказати геометријске теореме о просторним односима (нпр. Паш-ова аксиома у пуном обиму). $\mathbf{TAR_0}$ не доказује аритметичке теореме изван геометријске репрезентације. Одлучивост $\mathbf{TAR_0}$ (Тарски) наспрам неодлучивости **PRA** додатно потврђује ортогоналност.

Пресуда: неупоредиви ✓

Закључак: PRA–TAR_0 је доста солидан **GH-кандидат** са философски занимљивом особином: **PRA** је Хилбертов финитизам, а $\mathbf{TAR_0}$ је Хилбертова аксиоматска геометрија. Пар би тако представљао директну реализацију Хилбертовог програма у дуалистичкој форми. Слабија тачка је нешто већа техничка сложеност у поређењу са $\mathbf{Q^+–G_0}$.

[12, 26, 35] (Gentzen за PRA, Pohlers за ординале, Tarski за геометрију)

A.9 $ZF_0 – CAT_0$

Мотивација: Ослабљена теорија скупова и минимална теорија категорија управо представљају две фундаменталне онтолошке перспективе на математику — материјалну (скупови са елементима) и структурну (категорије са морфизмима) — уз пажљиво уравнотежену снагу.

A.9.1 ZF_0

- **Језик:** логика првог реда са $\in$
- **Аксиоме:** екстензионалност, паровање, унија, фондација, инфинитност, као и сепарација са ограничењем на $\mathbf{\Delta_0}$-формуле, аксиома скупа свих подскупова са ограничењем на $\mathbf{\Delta_0}$-формуле — без пуне аксиоме замене
- **Изражајна моћ:** коначни и бројиви скупови, основна аритметика, Гедел-нумерисање
- **Prf-theoretic ординал:** испод $\mathbf{\Gamma_0}$, упоредив са $\mathbf{ACA_0}$
- **Кључна особина:** довољно јак за аритметизацију синтаксе, али без пуне моћи **ZF**

A.9.2 CAT_0

- **Језик:** логика првог реда са константама **Ob, Mor** и функцијама **dom, cod, id,** $\circ$

- **Аксиоме:** асоцијативност композиције, закони идентитета, постојање **dom** и **cod** за све морфизме, аксиома малих категорија
- **Изражајна моћ:** мале категорије, функтори, природне трансформације, категоријска алгебра (основна)
- **Prf-theoretic ординал:** упоредив са $\mathbf{ZF_o}$
- **Кључна особина:** структурална онтологија-објекти немају унутрашњу структуру, само спољашње релације

A.9.3 Анализа

Покушај $\mathbf{ZF_o} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(CAT_o)}$: $\mathbf{ZF_o}$ конструише модел **$\mathbf{CAT_o}$** дефинишући категорије као скупове са структуром. Мале категорије су скупови морфизама са функцијама композиције — **$\mathbf{ZF_o}$** их лако формализује без пуне аксиоме замене.

Пресуда: изводљиво ✓

Покушај $\mathbf{CAT_o} \vdash \mathbf{Con^{\{fin\}}(ZF_o)}$: $\mathbf{CAT_o}$ може представити скупове и као дискретне категорије (само идентитетни морфизми), а ∈-релацију може као посебну класу морфизама. Аксиоме **$\mathbf{ZF_o}$** преводе се у категоријске услове.

Пресуда: изводљиво под претпоставком постојања интерпретација у оба смера. ✓

Неупоредивост: $\mathbf{ZF_o}$ доказује постојање специфичних скупова које **$\mathbf{CAT_o}$** не може изразити (нпр. конкретне кардиналне особине). **$\mathbf{CAT_o}$** доказује универзалне конструкције (лимити, колимити) које **$\mathbf{ZF_o}$** не може природно формулисати.

Пресуда: неупоредиви ✓

Закључак: $\mathbf{ZF_o}$–$\mathbf{CAT_o}$ је концептуално веома богат **GH-кандидат** јер оличава темељну филозофску поделу у математици — „шта постоји" наспрам „како се ствари односе." Главна техничка препрека је прецизно калибрисање снаге: пуни **ZF** тривијално доминира **$\mathbf{CAT_o}$,** па ослабљивање на **$\mathbf{ZF_o}$** постаје неопходно али деликатно. Ипак, пар је перспективнији за филозофску анализу него за експлицитну конструкцију. [1, 23] (Aczel за теорију типова/скупова, Maddy за плурализам и категорије)

A.10 $\mathbf{Q^+ – G_o}$

Мотивација: Након анализе свих претходних кандидата, **$\mathbf{Q^+}$–$\mathbf{G_o}$** се издваја као најперспективнији пар за експлицитну конструкцију **GH-пара**. Минималност оба система омогућава прецизну контролу над доказном снагом, а ортогоналност онтологија (дискретно–просторно) осигурава неупоредивост.

A.10.1 $\mathbf{Q^+}$ ($\mathbf{I\Delta_o}$)

- **Језик: {0, S, +, ×, =}** са логиком првог реда
- **Аксиоме:** Робинсонове аксиоме **Q** [33] плус **Δ_o**-индукциона шема
- **Изражајна моћ:** Геделово нумерисање, предикат доказивости **$\mathbf{Prf_1}$,** примитивно рекурзивне функције у ограниченом обиму
- **Prf-theoretic ординал: ω^2**
- **Кључна особина:** минимални систем способан за потпуну аритметизацију синтаксе

A.10.2 $\mathbf{G_o}$

- **Језик: {P, L, I, B, C}** (тачке, праве, инциденција, betweenness, конгруенција)
- **Аксиоме:** Хилбертове аксиоме апсолутне геометрије [17, 35] (без постулата паралелности) са додатом аксиомом дискретности
- **Изражајна моћ:** рационалне координате, основне геометријске конструкције, предикат доказивости **$\mathbf{Prf_2}$**
- **Prf-theoretic ординал:** није стандардно дефинисан. **$\mathbf{G_0}$** је фрагмент елементарне геометрије Тарског (одлучиве и потпуне). Релативна снага се мери управо преко интерпретације аритметичких теорија.
- **Кључна особина:** просторна онтологија потпуно ортогонална нумеричкој онтологији **$\mathbf{Q^+}$**

A.10.3 Анализа

Покушај $Q^+ \vdash Con^{\{fin\}}(G_0)$: Q^+ конструише модел G_0 у Q^2 — тачке као уређени парови рационалних бројева. Δ_0-индукција је довољна за верификацију свих аксиома система G_0 укључујући ту и аксиому дискретности. **Soundness** теорема потврђује да је модел исправан. Под **soundness**-ом (коректношћу) подразумевамо да **ако** систем **T** доказује формулу **φ**, онда је **φ** истинита у свим моделима система **T**.
Пресуда: изводљиво ✓

Покушај $G_0 \vdash Con^{\{fin\}}(Q^+)$: G_0 представља природне бројеве као колинеарне тачке, а сабирање као конкатенацију сегмената и множење као конструкцију правоугаоника. Δ_0-индукција је симулирана са индукцијом на сегментима.
Пресуда: изводљиво уз Аксиом моста (bridge) (Дефиниција 2.11). Bridge додаје потребну рефлексију без кршења Гедела II. Тиме $|G_0 + \textbf{Bridge}| \geq \omega^2$.
Неупоредивост: Q^+ и G_0 су неупоредиви по **димензијама снаге** (Пропозиција 3.3): Q^+ је јак управо у аритметичкој димензији, а G_0 у просторној. Ниједан не садржи аксиоме оног другог (**DP3**).
Пресуда: неупоредиви ✓

Предности над осталим кандидатима:

- **Минималност:** оба система су најслабији у својој класи способни за аритметизацију синтаксе
- **Прецизност:** ординали ω^2 и ω су познати и добро проучени
- **Конструктивност:** интерпретације у оба смера су експлицитно конструктивне
- **Философска јасноћа:** дискретно наспрам просторног је најчистија могућа ортогоналност

Закључак: Q^+–G_0 је примарни кандидат за експлицитну конструкцију **GH-пара**. Ова блиц анализа, у текућем раду то показује. Услови **DP1–DP3** су верификабилни, интерпретације су конструктивне, а минималност система осигурава да свака додатна снага коју би пар захтевао буде видљива и добро анализабилна. Ипак, пре него што приступимо експлицитној конструкцији **GH-пара** урадићемо мало детаљнију анализу у следећем раду тријаде, у којем ћемо донети коначан закључак којем кандидату ћемо дати приоритет у покушају експлицитне конструкције.
[5, 6, 9, 23, 35] (Boolos, BonJour, Feferman, Maddy, Tarski)

A.11 Резиме Прилога А

Испитали смо десет алтернативних кандидата:

Пар	Комплементарни?	Неупоредиви?	Међусобни доказ?	Пресуда
ITT–ZF	Да (конструктивно vs класично)	Не (**ZF** јачи)	Не (асиметрично)	✗ Није **GH** [5,36,23]
Подсистеми обрнуте математике	Не (линеарна хијерархија)	Не (уређени)	Не	✗ Није **GH** [23,26,29,30]
HA–PA	Не (исти домен)	Не (**HA ⊊ PA**)	Не	✗ Није **GH** [5,26,29,36]
Категорија–Скуп	Делимично	Маргинално	Не (асиметрично)	✗ Није **GH** [1,23]
Бишоп–Брауер	Да (различити конструктивни)	Не (Брауер јачи)	Не	✗ Није **GH** [5,23,36]
Квантна–Класична	Да (различите логике)	Да	Нејасно	✗ Врло [4,23] спекулативно
$PA_{(слаба)}$ – $GEO_{(дискретна)}$	Да (аритметика vs геометрија)	Да (различите димензије снаге)	Да (уз ↔-интерп.)	✓ **Кандидат**
PRA – TAR_0 дискр. геометрија Тарског	Да (аритметика vs геометрија)	Да (различите димензије снаге)	Да (уз ↔-интерп.)	✓ **Кандидат**
ZF_0 – CAT_0	Да (материјално vs структурно)	Да (различите онтологије)	Да (уз ↔-интерп.)	✓ **Кандидат**
Q^+ – G_0	Да (дискретно vs просторно)	Да (ортогонални ординали)	Да (уз ↔-интерп.)	✓ **Кандидат**

Општа лекција:

Стандардни математички системи имају тенденцију да буду линеарно поредани (један да буде јачи од другог) или да један јасно доминира.
Проналажење заиста неупоредивих система са уравнотеженом снагом је изузетно ретко [23].

Најперспективнији правци:

1. Пажљиво изабране модификације **(PA–GEO), (PRA–TAR ,) (ZF_o–CAT_o), (Q^+-G_o)** [7, 35]
2. Егзотични системи из нестандардних темеља [6, 24]
3. Мултидимензионални профили снаге (ортогонални у више аспеката истовремено) [23]

Закључак: Потрага за **GH-паровима** захтева тражење изван добро утабаних стаза у темељима [23].

ПРИЛОГ Б: ВОДИЧ КРОЗ ЛОГИЧКУ НОТАЦИЈУ

Овај прилог пружа кратак преглед логичких симбола и нотације коришћене у раду.Намењен је оним читаоцима који нису специјализовани за математичку логику, ради лакшег разумевања.

Б.1 Основни логички оператори

Симбол	Назив	Чита се	Пример	Значење
¬	Негација	„не"	**¬φ**	„није истина да **φ**"
∧	Коњункција	„и"	**φ ∧ ψ**	„**φ** и **ψ** су оба истинита"
∨	Дисјункција	„или"	**φ ∨ ψ**	„**φ** или **ψ** (или оба)"
→	Импликација	„ако...онда"	**φ → ψ**	„ако **φ**, онда **ψ**"
↔	Еквиваленција	„ако и само ако"	**φ ↔ ψ**	„**φ** важи ако и само ако важи **ψ**"

Примери читања:

- **¬(φ ∧ ψ)** = „није истина да важе и **φ** и **ψ** истовремено"
- **(φ → ψ) ∧ (ψ → φ)** = „ако **φ** онда **ψ**, и ако **ψ** онда **φ**"

Б.2 Квантификатори

Симбол	Назив	Пример	Значење
∀	Универзални	**Чита се**	„за све **x** важи **φ(x)**"
∃	Егзистенцијални „постоји"	„постоји"	„постоји **x** такво да важи **φ(x)**"

Примери читања:

- **∀x (x ∈ N → x ≥ 0)** = „за сваки **x**, **ако x** припада скупу природних бројева, **онда је x ≥ 0**"
- **∃x (φ(x) ∧ ψ(x))** = „постоји **x** за који важе и **φ(x)** и **ψ(x)**"
- **∀x ∃y (x < y)** = „за сваки **x** постоји **y** такво да је **x < y**"

Б.3 Модални оператори

Симбол	Назив	Чита се	Значење
□	Бокс (нужност)	„нужно је", „мора"	„□**φ**" = „нужно је да **φ**"
◇	Дијамант (могућност)	„могуће је"	„◇**φ**" = „могуће је да **φ**"
$□_i$	Индексирани бокс	„нужно у систему i"	„$□_1$**φ**" = „нужно је у систему $\mathbf{T_1}$ да **φ**"

Веза: ◇**φ** је еквивалентно са ¬□¬**φ** („није нужно да не важи **φ**")

Примери читања:

- $□_1¬□_2⊥$ = „нужно је у систему $\mathbf{T_1}$ да није нужна контрадикција у систему $\mathbf{T_2}$"
- **◇φ ∧ ◇¬φ** = „могуће је да **φ** и могуће је да **не-φ**"

Б.4 Доказна нотација

Нотација	Чита се	Значење
T ⊢ φ	„**T** доказује **φ**"	У систему **T** постоји формални доказ формуле **φ**
T ⊬ φ	„**T** не доказује **φ**"	У систему **T** не постоји формални доказ формуле **φ**
Con(T)	„**T** је конзистентан"	Систем **T** не доказује контрадикцију
$\mathbf{Con^{\{fin\}}(T)}$	„**T** је финитарно конзистентан"	У **T** не постоји коначан доказ контрадикције
$\mathbf{Pr_T(x)}$	„**x** је доказ у **T**"	Предикат који тврди да је **x** кодирани доказ у систему **T**

Примери читања:

- $\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2)}$ = „систем $\mathbf{T_1}$ доказује финитарну конзистентност система $\mathbf{T_2}$"
- $\mathbf{T \nvdash Con(T)}$ = „систем **T** не може доказати сопствену конзистентност" (Геделова II теорема)
- $\mathbf{\forall x\,(Pr_T(x, \ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi)}$ = „за све **x**, ако је **x** доказ **φ** у **T**, онда **φ** важи"

Б.5 GH-специфична нотација

Нотација	Чита се	Значење
$\mathbf{T_1 \diamondsuit T_2}$	„$\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ чине **GH-пар**"	Системи $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ задовољавају услове Гедел-Хилбертовог пара
$\mathbf{\Phi_{\{T_1 \to T_2\}}}$	„превод из $\mathbf{T_1}$ у $\mathbf{T_2}$"	Функција која преводи формуле/доказе из $\mathbf{T_1}$ у $\mathbf{T_2}$
$\mathbf{J(T_1, T_2)}$	„интер-рефлексивно поље"	Скуп формула које оба система међусобно верификују

Примери читања:

- $\mathbf{\Phi_{\{T_1 \to T_2\}}(\varphi) = \psi}$ = „превод формуле **φ** из $\mathbf{T_1}$ у $\mathbf{T_2}$ даје формулу **ψ**"
- $\mathbf{\varphi \in J(T_1, T_2)}$ = „формула **φ** припада интер-рефлексивном пољу система $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$"

Б.6 Типични обрасци у раду

Образац 1: Међусобна доказивост конзистентности

$$\mathbf{T_1 \vdash Con^{\{fin\}}(T_2) \land T_2 \vdash Con^{\{fin\}}(T_1)}$$

Чита се: „$\mathbf{T_1}$ доказује финитарну конзистентност $\mathbf{T_2}$, и $\mathbf{T_2}$ доказује финитарну конзистентност $\mathbf{T_1}$"

Образац 2: Геделова забрана

$$\mathbf{T \nvdash Con^{\{fin\}}(T)}$$

Чита се: „систем **T** не може доказати сопствену финитарну конзистентност"

Образац 3: Неупоредивост

$$\mathbf{T_1 \nvdash \varphi \land T_2 \vdash \varphi}$$ (за неку формулу **φ**)

Чита се: „$\mathbf{T_1}$ не доказује **φ**, али $\mathbf{T_2}$ доказује **φ**" (различита доказна снага)

Образац 4: Модална рефлексија

$$\mathbf{\Box_1(\Box_2\varphi \rightarrow \varphi)}$$

Чита се: „нужно је у $\mathbf{T_1}$ да **ако** је **φ** нужно у $\mathbf{T_2}$, онда **φ** важи"

Б.7 Теоријско-множинска нотација

Симбол	Назив	Чита се	Пример	Значење
$\in$	Припадност	„припада"	$\mathbf{x \in A}$	„**x** је елемент скупа **A**"
$\notin$	Неприпадност	„не припада"	$\mathbf{x \notin A}$	„**x** није елемент скупа **A**"
$\subseteq$	Подскуп	„подскуп је од"	$\mathbf{A \subseteq B}$	„сваки елемент **A** припада и **B**"
$\subset$	Прави подскуп	„прави подскуп"	$\mathbf{A \subset B}$	„$\mathbf{A \subseteq B}$ али $\mathbf{A \neq B}$"
$\cup$	Унија	„унија"	$\mathbf{A \cup B}$	„скуп свих елемената из **A** или **B**"
$\cap$	Пресек	„пресек"	$\mathbf{A \cap B}$	„скуп елемената који припадају и **A** и **B**"
$\emptyset$	Празан скуп	„празан скуп"	$\mathbf{\emptyset}$	скуп без иједног елемента

Примери читања:

- $\mathbf{\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)}$ = „за свако **x**, **ако x** припада **A**, **онда x** припада и **B**"
- $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$ = „пресек скупова **A** и **B** је празан" (немају заједничких елемената)

Б.8 Специјални симболи

Симбол	Значење
$\bot$	Контрадикција (лажна формула, „дно")
$\top$	Таутологија (истинита формула, „врх")
$\ulcorner \varphi \urcorner$	Геделов број формуле **φ** (нумерички код)
$\lvert T \rvert$	Prf-theoretic ординал система **T**
ε_0	Први epsilon број (ординал)
$\cong$	Изоморфизам
$\Rightarrow$	Мета-импликација (на нивоу тврдњи о системима)

Примери читања:

- **T** ⊢ ⊥ = „систем **T** доказује контрадикцију" (**T** је неконзистентан)
- $\mathbf{Pr_T(n, \ulcorner \varphi \urcorner)}$ = „број **n** кодира доказ формуле **φ** у систему **T**"
- $\mathbf{|PA| = \varepsilon_0}$ = „prf-theoretic ординал Пеанове аритметике је $\mathbf{\varepsilon_0}$"

Б.9 Конвенције читања сложених формула

Приоритет оператора (од највишег до најнижег):

- ¬ (негација)
- **∧, ∨** (коњункција, дисјункција)
- **→,** ↔ (импликација, еквиваленција)

Пример:

- **¬φ ∧ ψ → χ** чита се као **((¬φ) ∧ ψ) → χ**
- **φ → ψ ∧ χ** чита се као **φ → (ψ ∧ χ)**

Савет: Када сте несигурни, заграде **увек** појашњавају структуру.

ПРИЛОГ В: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

У овом прилогу разматрамо неколико основних евентуалних приговора дајући припадајуће одговоре на ове приговоре.

Критика 1: „Кохерентизам је превише попустљив. Сваки међусобно конзистентан скуп уверења постаје оправдан."

Одговор 1: Кохерентизам укључује ограничења изван саме конзистентности:

- Објашњавајућа моћ [7, 21, 28]
- Једноставност/парсимонија [6]
- Емпиријска адекватност (за емпиријске домене) [23]
- Досадашњи успех [7, 35]

GH-парови задовољавају ове услове: и **PA** и **GEO** су објашњавајући, јесу релативно једноставни и емпиријски су адекватни (у примењеним контекстима) и имају одличан досадашњи успех [7, 35].

Критика 2: „Зашто стати на паровима? Зашто не тројке, четворке, бесконачне мреже?"

Одговор 2:

1. Парови су најједноставнији нетривијални случај [2, 31]
2. Веће мреже могу постојати (занимљиво питање!) [23]
3. Пар је довољан да избегне бесконачан регрес [26, 29, 30]
4. Минимализам: преферирати најједноставнију структуру која постиже циљ [6]

Критика 3: „Ово само помера проблем уназад. Како да знамо да су **PA** и **GEO** појединачно уопште конзистентни?"

Одговор 3: Немамо апсолутну извесност (Гедел то искључује) [13, 34]. Имамо:

- Емпиријске доказе (није пронађена противречност) [7, 35]
- Мета-математичко разумевање [10, 26, 29, 30, 31]
- Прагматички успех [23]

GH-парови не стварају извесност *ex nihilo* - они пружају оптималну епистемичку структуру у датим Геделовим ограничењима [2, 31].

Критика 4: „Међусобни доказ делује психолошки умирујуће али епистемолошки празно."

Одговор 4: Ово меша психолошко и логичко. Међусобни докази су:

- Логички ваљани (формалне деривације) [2, 29]
- Нетривијални (захтевају суштинску интерпретацију) [10, 16]
- Информативни (откривају структурне односе) [23, 28]
- Они нису само психолошка утеха већ истински математички резултати [2, 29].

Критика 5: „**ALP** је превише снажан и доказао би постојање било чега што се може конзистентно описати, укључујући и неке апсурдности."

Одговор 5: ALP је ограничен само на „довољно богате и добро дефинисане структуре." Нејасни или

недовољно спецификовани концепти се не квалификују. **GH-парови** су прецизно дефинисани (**DP1–DP3**), што их чини погодним кандидатима [2, 29]. Штавише, конзистентне апсурдности нису заиста апсурдне — оне су само контраинтуитивне. Математика је пуна контраинтуитивних истина (Банах–Тарски, па и саме Геделове теореме о непотпуности [13, 34]).

Критика 6: „У математици, постојање захтева конструкцију (конструктивистичка критика)."
Одговор 6: Чак и конструктивисти прихватају доказе постојања кроз индиректне методе када је нека конструкција у принципу могућа [5, 36]. **ALP** тврди да одсуство забране имплицира конструктивност у принципу. Сама конструкција може бити тешка (као код **GH-парова**), али не и немогућа. Штавише класична математика (коју већина математичара практикује) не захтева експлицитну конструкцију за тврдње о постојању [7, 23].

Критика 7: „**ALP** меша логичку могућност са математичком актуелношћу."
Одговор 7: У физичким доменима, ова конфузија би била погрешна. Али сами фундаменти логичких структура су другачији и за њих важе другачија правила. За математичке објекте, логичка могућност ЈЕ актуелност (у математичком смислу). Ово је суштински платонистички увид да су и математичке истине неопходне истине [6, 23, 28].

Критика 8: „**ALP** чини математику тривијалном — само дефиниши било шта и оно постоји!"
Одговор 8: ALP захтева:

- Прецизну дефиницију (не нејасно махање руком) [7]
- Унутрашњу конзистентност (без непосредне противречности) [13, 34]
- Спољашњу конзистентност (без забране из утврђених теорема) [2, 29]

Ово су строги услови. Већина „површно дефинисаних" структура пада већ на једном од ових тестова [23].

ЕПИЛОГ

Овај рад је показао да унутар строгих граница Геделових теорема ипак постоји неки простор за нову симетрију. Концепт **GH-парова** не руши постојеће резултате, само их преобликује јер: уместо једног темеља који се сам собом потврђује, добијамо двојицу партнера који се међусобно подржавају. Овај помак од асиметрије ка равнотежи није само технички, већ и философски — он сугерише да истина у математици није нужно монолитна, већ може бити плурална и кооперативна. Тако ни **GH-оквир** није крај једне потраге, већ почетак нове: трагања за системима који нису линеарно поредани. Ти системи се укрштају у више димензија снаге. Управо ту, у тим пресецима, лежи могућност да се непотпуност и конзистентност помире у конструктивној хармонији. Ако Хилберт већ јесте тражио извесност кроз конструкцију, а Гедел открио њене границе кроз непотпуност, **GH-оквир** сугерише да кохерентност — а не конструкција — може коначно да их помири.

У следећем раду наше **GH-тријаде** више ћемо се посветити кандидатима из прилога А.11 како бисмо изабрали најперспективнијег кандидата за експлицитну конструкцију. Изабрани пар ћемо покушати конструисати у трећем раду тријаде. **Ако** ову конструкцију успешно завршимо, **онда** добијамо једну додатну потврду за све дефиниције, аксиоме, теореме, леме и све друго што је презентовано у овом и следећем раду. То би омогућило да **GH-оквир** уђе „на велика врата" у математичку логику.

РЕФЕРЕНЦЕ

[1] **Aczel, P.** (1978). *The type theoretic interpretation of constructive set theory*. In A. MacIntyre, L. Pacholski, & J. Paris (Eds.), *Logic Colloquium '77* (pp. 55-66). North-Holland.

[2] **Beklemishev, L.** (2005). *Reflection Principles and Provability Algebras in Formal Arithmetic*. In Logic Colloquium 2003, Lecture Notes in Logic, ed. A. Andretta et al.,Association for Symbolic Logic, 11–45.

[3] **Beklemishev, L. D. (2003).** *Proof-theoretic analysis by iterated reflection.* Annals of Pure and Applied Logic, 122(1–3), 1–19.

[4] **Birkhoff, G., & von Neumann, J.** (1936). *The Logic of quantum mechanics.* Annals of Mathematics, 37(4), 823–843.

[5] **Bishop, E**. (1967). *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw–Hill.

[6] **BonJour, L.** (1985). *The Structure of Empirical Knowledge*. Harvard University Press.

[7] **Boolos, G. S., Burgess, J. P., & Jeffrey, R. C.** (2007). *Computability and Logic* (5th ed.). Cambridge University Press.
[8] **Bovens, L., & Hartmann, S.** (2003). *Bayesian Epistemology*. Oxford University Press.
[9] **Detlefsen, M.** (1993). *What Does Gödel's Theorem Prove*?. Philosophia Mathematica 1(1): 26–36.
[10] **Feferman, S.** (1960). *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* Fundamenta Mathematicae, 49(1), 34-92.
[11] **Friedman, H.** (1975). *Some systems of second order arithmetic and their use*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1, 234-242.
[12] **Gentzen, G.** (1936). *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Mathematische Annalen, 112(1), 493-565.
[13] **Gödel, K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I, Monatshefte für Mathematik und Physik, 38(1), 173-198.
[14] **Hamkins, J. D.** (2012). *The set-theoretic multiverse*. Review of Symbolic Logic, 5(3), 416-449.
[15] **Hamkins, J. D., & Gitman, V.** (2014). *The Multiverse View of Set Theory*. Synthese 191(1): 1–18.
[16] **Henkin, L.** (1949). *The completeness of the first-order functional calculus*. Journal of Symbolic Logic, 4(3), 159-166.
[17] **Hilbert, D.** (1926). *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen, 95(1), 161-190.
[18] **Kock, A.** (2006). *Synthetic Differential Geometry* (2nd ed.). Cambridge University Press.
[19] **Колмогоров, А. Н.** (1965). *Три подхода к определению понятия "количество информации"*. Проблемы передачи информации, 1(1), 3–11.
[20] **Kuhn, T. S.** (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press.
[21] **Lehrer, K.** (1990). *Theory of Knowledge*. Westview Press.
[22] **Löb, M. H.** (1955). *Solution of a problem of Leon Henkin.* Journal of Symbolic Logic, 20(2), 115–118.
[23] **Maddy, P.** (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford University Press.
[24] **Martin-Löf, P.** (1984). *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis.
[25] **Paulson, L. C., Nipkow, T., & Wenzel, M.** (2019). *From LCF to Isabelle/HOL*. Formal Aspects of Computing, 31(6), 675–698.
[26] **Pohlers, W.** (2009). *Proof Theory: The First Step into Impredicativity*. Springer.
[27] **Priest, G.** (2006). In Contradiction: A Study of the Transconsistent (2nd ed.). Oxford University Press.
[28] **Quine, W. V. O.** (1951). *Two Dogmas of Empiricism*. The Philosophical Review, 60(1), 20-43.
[29] **Rathjen, M.** (2006). *The art of ordinal analysis.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2, 45-69.
[30] **Rathjen, M.** (2006). *The Realm of Ordinal Analysis*. Bulletin of Symbolic Logic 12(4): 485–519.
[31] **Rathjen, M.** (2012). *An Overview of Predicative Proof Theory*. In Feferman Festschrift, ed. P. Hájek et al., College Publications, pp. 81–111.
[32] **Rawls, J.** (1971). *A Theory of Justice*. Harvard University Press. (For reflective equilibrium)
[33] **Robinson, R. M.** (1950). *An essentially undecidable axiom system.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge 1950, 1, 729–730.
[34] **Smoryński, C.** (1977). *The incompleteness theorems.* In J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic* (pp. 821-865). North-Holland.
[35] **Tarski, A.** (1959). *What is elementary geometry*? In L. Henkin, P. Suppes, & A. Tarski (Eds.), *The Axiomatic Method* (pp. 16-29). North-Holland.
[36] **Troelstra, A. S., & van Dalen, D.** (1988). *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (Vols. 1-2). North-Holland.

POST SCRIPTUM

Овај рад служи као увод у један шири истраживачки циклус, где ће примене концепта Гедел–Хилбертових парова и Аксиома логичке могућности бити истражене у другим доменима знања.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Нови Сад
06.01.2026.

Научни часопис:
„ПОЛИХИСТОР“

Author: Ranko Bošnjak
Co-authors: Milica Bošnjak & Danica Bošnjak
Institution: META-POLIHISTOR
DOI: 10.5281/zenodo.19762864
"POLIHISTOR" N: PH-MAT-01-01A-SRB
polihistor@meta-ns.co.rs

THE GÖDEL–HILBERT PAIR AND RELATIONAL UNION

Truth and proof meet not in domination, but in reflection.

ABSTRACT

We introduce the concept of **GH-pairs** — two formal systems that mutually prove each other's consistency, while individually remaining subject to Gödel's incompleteness theorems. The notion of **GH-union** enables a dualistic realization of Hilbert's program. We demonstrate the absence of any principled logical prohibition against such pairs, develop a theory of incomparability as a necessary condition, and analyze the possibilities of various constructions, which reveal deep structural challenges. We examine alternative candidates through reverse mathematics and constructive foundations, while further developing detailed epistemological justifications through coherentist frameworks and the Axiom of Logical Possibility (**ALP**). Our central result (Theorem 5.2): under the **ALP principle** — that what is not logically forbidden is mathematically realizable — it follows that **GH-pairs** exist in mathematical space. This existence proof combines the absence of logical prohibition with a modal-logical principle confirmed by historical patterns in mathematics. Thus the remaining challenge becomes identification, not existence: finding explicit examples of a phenomenon whose existence we have proven. The framework fully respects Gödel's incompleteness theorems: it does not propose a system that proves its own consistency, but rather a pair whose mutual consistency is externally defined and therefore logically uncontested.

Keywords: Gödel's incompleteness theorems, Hilbert's program, mutual interpretability, complementarity, proof-theoretic ordinals, epistemology of mathematics, axiom of logical possibility, existence theorems, consistency proofs,

AMS Classification (2020):

03F25 (Relative consistency and interpretations);
03F40 (Gödel numbering and incompleteness questions);
03A05 (Philosophical and critical).

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
06.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"