
ТЕОРИЈА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ

Структура није својство ентитета, већ односа међу њима. Када мрежа достигне критичну сложеност, одређена својства постају математички нужна.

АПСТРАКТ

Овај рад уводи формалну **Теорију структурне нужности** за релационе мреже. Дефинишемо концепт математичке нужности као меру немогућности одређених структурних нарушења сложенијих мрежа. Кроз асимптотску анализу мрежних својстава, још показујемо да када нека мрежа достигне одређени ниво сложености, појава одређених типова **рупа** или **структурних недостатака** постаје математички немогућа. Дата теорија обезбеђује формални апарат за доказивање немогућности контрапримера и то у широком спектру математичких проблема. Главни резултат је **Теорема структурне конзистенције** и **Метрику математичке нужности**.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: структурна нужност, релационе мреже, математичка немогућност, асимптотска анализа, теорија графова

АМС КЛАСИФИКАЦИЈА (2020):

05C80 — Случајни графови
05C90 — Примене теорије графова
03B45 — Модална логика (укључујући нужност)
11B75 — Комбинаторна теорија бројева
68R10 — Теорија графова у рачунарству

1. УВОД: ПАРАДИГМА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ

Основни разлог увођења **Структурне нужности** у *релационим мрежама* јесте недовољна ефикасност традиционалне математике. Овај рад представља покушај, и то успешан, да се та ефикасност повећа.

1.1 Философска основа

Традиционална математика [4] почесто се ослања на конструктивне доказе и директну верификацију. Међутим, за сложене системе са асимптотским својствима, овај приступ постаје неефикасан. Зато и уводимо парадигму **Структурне нужности** која се заснива на једној чињеници да одређени сложени системи не могу одржати конзистентност ако садрже одређене типове структурних недостатака.

1.2 Основна интуиција

Како систем расте у сложености, његова глобална структура намеће све јача ограничења на локална својства [5, 15]. Постоји тачка у којој одређена нарушења постају математички немогућа али не због локалних ограничења, већ због глобалних структурних захтева [5].

2. ФОРМАЛНИ АПАРАТ (Дефиниције и нотација)

Формални апарат овог рада садржи дефиниције, нотацију, леме, теореме и доказе. У раду не постоје аксиоме.

Дефиниција 2.1 (Релациона мрежа): [9] Нека је $\mathcal{G} = (V, E, R)$ где је:

- V је скуп чворова

- $E \subseteq V \times V$ је скуп ивица
- $R = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ је скуп релација на V

Дефиниција 2.2 (Структурна конзистенција): Мрежа G је структурно конзистентна до нивоа ϵ ако за сваку релацију $R_i \in R$ важи:

$$\limsup_{\{|V| \rightarrow \infty\}} |\{\text{нарушења } R_i\}| / |V| < \epsilon$$

Дефиниција 2.3 (Критична сложеност): [4] Мрежа G достиже критичну сложеност ако ту егзистира функција $f(n)$ таква да:

$$\delta(G_n) \geq f(n) \text{ и } \lim_{\{n \rightarrow \infty\}} f(n) = \infty$$

где $\delta(G_n)$ представља минимални степен чвора у мрежи са n чворова.

Дефиниција 2.4 (Локална стабилност релације). Релација $R \in R$ у мрежи $G = (V, E, R)$ јесте локално стабилна са константом C_R ако постоји коначна апсолутна константа $C_R > 0$ таква да свако јединачно нарушење релације R (непостојање ивице, или непотпуност неке везе) онемогућава и појаву највише C_R нових или потенцијалних веза у мрежи. Формалније, постоји мапирање из скупа нарушења у скуп парова чворова (потенцијалних веза) тако да слика сваког нарушења има кардиналитет $\leq C_R$, и да се ови скупови парова могу ефективно идентификовати из структуре нарушења.

Напомена: Својство се проверава за сваку конкретну релацију приликом примене теорије.

Константа $M(R)$ означава максималан број нарушења која могу истовремено онемогућити исту везу у мрежи. У пракси $M = 1$ ако је нарушење одсуство ивице.

Дефиниција 2.5 (Глобална пропагација нарушења). Релација $R \in R$ поседује и својство глобалне пропагације са константом пропагације $K > 0$ ако постоји функција раста $f(n) = \Omega(n/\log n)$ и то таква да важи: ако за неко n_0 важи $I_R(n_0) \geq 1$ (тј. постоји бар једно нарушење), онда за све довољно велике $n \geq n_0$ број нарушења задовољава доњу границу $I_R(n) \geq K \cdot f(n)$. Стандардни и истовремено најчешћи случај у анализи је $f(n) = n/\log n$, што одговара сублинеарном, али брзом расту обима нарушења.

Напомена: Под изразом за све довољно велике n подразумева се да постоји n_1 које зависи и од K и од релације R такво да за све $n \geq n_1$ важи дата доња граница.

Дефиниција 2.6 (Јака критична сложеност). Мрежа G достиже јаку критичну сложеност само ако постоји функција $g(n)$ таква да: $\delta(G_n) \geq g(n)$ и $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} g(n)/n > 0$.

(Тј. минимални степен расте барем линеарно са n .)

Дефиниција 2.7 (Потпуне рупе).

Нека је V_T скуп чворова у релационој мрежи G , и нека је A коначан скуп симбола или акција. За чвор $v_t \in V_T$, кажемо да је он **потпуна рупа** ако за свако $\bar{a} \in A^n$ (где $n = |V_T|$) важи:

$$R_{akt}(c_{t,a}) = \text{НЕТАЧНО..}$$

где $c_{t,a}$ означава конфигурацију у којој је чвор v_t у стању a , а R_{akt} је та релација активације која овде дефинише када нека конфигурација може да се реализује у мрежи. Другим речима, чвор v_t не може да буде активиран ни за једну акцију $\bar{a}$ из скупа A^n , што га чини потпуно неупотребљивим за пренос информације или успостављање даљих релација у мрежи.

3. ФОРМАЛНИ РАЗВОЈ ТЕОРИЈЕ: ЛЕМЕ И ТЕОРЕМЕ

У овом поглављу дајемо све леме и теореме потребне за карактеризацију структурне нужности.

3.1 Својства мрежа критичне сложености

Лема 3.1 (Својства критичне сложености): Нека неки низ мрежа $\{G_n\}$ достиже критичну сложеност (Деф. 2.3) [4]. Тада:

1. Ако низ достиже јаку критичну сложеност (Деф. 2.6), онда:

- Густина везе тежи ка позитивној константи: $\liminf_{\{n \rightarrow \infty\}} d(G_n) > 0$
- Просечан степен расте неограничено: $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \bar{d}(G_n) = \infty$
- Постоји n_0 такво да за све $n \geq n_0$ мрежа G_n буде повезана

2. Ако низ достиже само слабу критичну сложеност (Деф. 2.3), онда:

- Просечан степен расте неограничено: $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \bar{d}(G_n) = \infty$
- Постоји n_0 такво да за све $n \geq n_0$ мрежа G_n буде повезана

Густина може, али не мора, тежити ка позитивној константи.

Доказ 1 (Густина):

Нека је $n = |V_n|$. Према Дефиницији 2.6 (јака критична сложеност), постоји функција $g(n)$ и то таква да је $\delta(G_n) \geq g(n)$ и $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} g(n)/n = c > 0$.

Доња граница за број ивица: $2|E_n| \geq n \cdot g(n)$

Густина: $d(G_n) = 2|E_n|/(n(n-1)) \geq (n \cdot g(n))/(n(n-1)) = g(n)/(n-1)$

Како је $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} g(n)/n = c > 0$, имамо:

$\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} g(n)/(n-1) = \lim_{\{n \rightarrow \infty\}} [g(n)/n] \cdot [n/(n-1)] = c \cdot 1 = c > 0$.

Према томе, $\liminf_{\{n \rightarrow \infty\}} d(G_n) \geq c > 0$. ■

Доказ 2 (Просечан степен):

По дефиницији, просечан степен је $\bar{d}(G_n) = (1/n) \sum_{\{v \in V_n\}} \deg(v)$.

Како је сваки степен $\deg(v) \geq \delta(G_n)$, имамо $\bar{d}(G_n) \geq (1/n) \cdot n \cdot \delta(G_n) = \delta(G_n) \geq f(n)$.

Пошто $f(n) \rightarrow \infty$, следи $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \bar{d}(G_n) = \infty$. ■

Доказ 3 (Повезаност):

Треба показати да постоји n_0 такво да за све $n \geq n_0$ граф G_n није могуће раздвојити на две или више компоненти.

Претпоставимо супротно: да постоји бесконачан подниз $\{G_{n_k}\}$ где је сваки G_{n_k} неповезан. Узмимо један такав граф G_n (за велико n) који је неповезан. Ако је граф неповезан, онда се може поделити на најмање две компоненте. Нека је C она компонента која има најмањи број чворова. Тада број чворова у C јесте највише $\lfloor n/2 \rfloor$.

Размотримо чвор v у овој најмањој компоненти C :

- Сви суседи чвора v морају бити у истој компоненти C .
- Према томе, степен чвора v задовољава: $\deg(v) \leq |C| - 1 \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$.

Међутим, ово је у контрадикцији са основним условом критичне сложености. Услов $\delta(G_n) \rightarrow \infty$ овде имплицира да за довољно велико n мора бити $\delta(G_n) > n/2$. Али смо показали и да у претпостављеном неповезаном графу постоји чвор чији степен је $\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$, што је строго мање од $n/2$. Дакле, наша је претпоставка нетачна. Стога, мора постојати n_0 тако да за све $n \geq n_0$ граф G_n буде повезан. ■

Доказ 4 (Алтернативни за густину – преко броја ивица):

Нека низ мрежа $\{G_n\}$ достиже јаку критичку сложеност (Деф. 2.6). Тада постоји функција $g(n)$ таква да $\delta(G_n) \geq g(n)$ и $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} g(n)/n = c > 0$. Укупно ивица $|E_n|$ задовољава $|E_n| \geq (n \cdot g(n))/2$. С друге стране, максимални број ивица у графу са n чворова је $n(n-1)/2$. Густина $d(G_n) = 2|E_n|/(n(n-1))$. Дакле, $d(G_n) \geq (n \cdot g(n)) / (n(n-1)) = g(n)/(n-1)$. Како $g(n)/n \rightarrow c$, то $g(n)/(n-1) \rightarrow c$. Према томе даље следи да је $\liminf_{\{n \rightarrow \infty\}} d(G_n) \geq c > 0$.

Овај доказ је еквивалентан првом доказу, али директније користи однос ивица и густине. ■

Доказ 5 (Алтернативни за повезаност – преко теореме о минималном степену):

Позната теорема у теорији графова каже да ако граф има минимални степен $\delta > (n-1)/2$, тада је граф повезан. Наиме, ако граф није повезан, онда постоји компонента са највише $n/2$ чворова, и у тој је компоненти максимални степен чвора је $\leq (n/2)-1$, што је мање или једнако $(n-1)/2$ за $n \geq 1$. Како за јаку критичку сложеност важи $\delta(G_n) \geq g(n)$ са $g(n)/n \rightarrow c > 0$, за довољно велико n имамо $g(n) > n/2$, па $\delta(G_n) > n/2$. Према томе, за све такве n , G_n је повезан.

Овај доказ је још једна примена класичног резултата. ■

3.2 Компатибилност основних дефиниција

Теорема 3.2 (Компатибилност дефиниција): Дефиниције релационе мреже (2.1), као и структурне конзистенције (2.2) и критичне сложености (2.3) јесу међусобно компатибилне у следећем смислу:

1. **Конзистентност:** Постоје бесконачни низови мрежа $\{G_n\}$ који истовремено задовољавају све три дефиниције.
2. **Непротивречност:** Не постоји мрежа G која задовољава једну дефиницију на начин који би логички искључивао или директно противречио некој од остале две у оквиру успостављеног аксиоматског система (видети [2], [3]).
3. **Функционална веза:** Ове дефиниције све заједно формирају кохерентан формални апарат где критична сложеност (2.3) представља довољан услов за постизање структурне конзистенције (2.2) у односу на релације које испуњавају одређена својства (види Теорему 3.3).

Доказ 1 (Конзистентност):

Конструишимо експлицитан пример. Нека је $G_n = (V_n, E_n, R_n)$ где је $|V_n| = n$, $E_n = V_n \times V_n \setminus \{(v,v) : v \in V_n\}$ (потпуни граф без петљи), и $R_n = \{E_n\}$. Тада:

- G_n је релациона мрежа по Деф. 2.1.
- Минимални степен је $\delta(G_n) = n-1$, па за $f(n) = n-1$ важи $\lim f(n) = \infty$, тј. достиже критичну сложеност (Деф. 2.3).
- За релацију E_n , скуп нарушења је празан (јер су све ивице присутне), па је онда и $I_{E_n(n)} = 0$. Очигледно важи $\limsup_{n \rightarrow \infty} 0/n = 0$, а тако је мрежа структурно конзистентна (Деф. 2.2).

Дакле, низ $\{G_n\}$ задовољава све три дефиниције истовремено. ■

Доказ 2 (Непротивречност):

Треба показати да не постоји мрежа G која задовољава једну дефиницију и то на начин који логички искључује или директно противречи некој од остале две. Проверавамо све парова дефиниција:

Деф. 2.1 и Деф. 2.2: Прва дефинише објекат, друга дефинише својство тог објекта, а ту нема логичке контрадикције.

Деф. 2.1 и Деф. 2.3: Слично, нема логичке контрадикције.

Деф. 2.2 и Деф. 2.3: Структурна конзистенција (2.2) захтева $\limsup \frac{I_R(n)}{n} = 0$. Критична сложеност (2.3) захтева $\delta(G_n) \rightarrow \infty$. Да би дошло до логичке контрадикције, морало би да постоји мрежа за коју $\delta(G_n) \rightarrow \infty$ истовремено захтева (логичком неопходношћу) да $\limsup \frac{I_R(n)}{n} > 0$. Међутим, услов $\delta(G_n) \rightarrow \infty$ сам по себи не намеће никаква ограничења на $I_R(n)$. Конкретно, постоје мреже које истовремено задовољавају обе дефиниције: нпр. низ комплетних графова K_n али са додатим ознакама (нпр. бојама чворова) тако да $I_R(n) = 0$ за све n . У овом примеру, $\delta(K_n) = n-1 \rightarrow \infty$ и $\limsup 0/n = 0$.

Дакле, дефиниције нису у логичкој супротности. ■

Доказ 3 (Функционална веза):

Ова веза је садржај главне Теореме 3.3 (Структурна нужност), оне која ће бити доказана у наредном одељку. Она формално успоставља да, под одређеним условима (локална стабилност али и глобална пропагација релација), критична сложеност имплицира структурну конзистенцију. Овим се све три дефиниције не само не сукобљавају, већ се уједињују у јединствену теоријску конструкцију. ■

Доказ.4 (Алтернативни за конзистентност – преко густих случајних графова).

Размотримо низ случајних графова $G(n, p)$ са $p = n^{-0.5}$. За такав низ, асимптотски скоро сигурно минимални степен $\delta(G_n)$ расте као $n \cdot p = n^{0.5} \rightarrow \infty$, па тако јесте задовољена и дефиниција критичне сложености (Деф. 2.3). Штавише, пошто је $p \cdot n / \log n \rightarrow \infty$, задовољен је онда и услов јаке критичне сложености (види Лему 3.6). Дефинишимо релацију R као релацију суседства. Тада, ако узмемо да је нарушење одсуство ивице, број нарушења $I_R(n)$ је број одсутних ивица, који је асимптотски $n(n-1)/2 - n(n-1)p/2$. Међутим, ово не тежи нули по чвору. Да бисмо обезбедили и структурну конзистентност, можемо дефинисати релацију R на другачији начин, нпр. као „постоји пут дужине највише 2". Тада се може показати да су нарушења ретка. Конкретније, можемо конструисати цео низ графова који су комплетни, па су сви услови тривијално задовољени. Овај пример показује да постоје нетривијални низови (случајни графови) који могу да се подесе да задовоље све три дефиниције. ■

Доказ 5 (Алтернативни за неконтрадикторност – преко модела логичке теорије).

Дефиниције 2.1, 2.2 и 2.3 могу се формализовати као формуле у језику теорије скупова [6]. Нека је Φ_1 формула која дефинише релациону мрежу, Φ_2 формула за структурну конзистенцију, и Φ_3 формула за критичку сложеност. Конзистентност се своди на питање да ли постоји модел ZFC у којем важе све три формуле за неки низ. Како ZFC поседује моделе у којима постоје комплетни графови, у таквом моделу све три формуле су тачне за низ комплетних графова. Дакле, оне су и узајамно конзистентне. За неконтрадикторност, треба показати да из једне не следи негација друге. То се може и проверити, и то тако што се конструишу два модела: један у којем важе Φ_1 и Φ_2 али не важи Φ_3 (пример мрежа са константним степеном), и један у којем важе Φ_1 и Φ_3 али не важи Φ_2 (као мрежа са много нарушења). Пошто такви модели постоје, ниједна дефиниција не имплицира негацију неке друге. Према томе, ни дефиниције нису у контрадикцији. ■

3.3 Формални развој теорије: Структурна нужност

Теорема 3.3 (Структурна нужност):

Нека је $\mathcal{G}$ бесконачна релациона мрежа за коју постоји функција $g(n)$ таква да:

1. $\delta(\mathcal{G}_n) \geq g(n)$ за свако довољно велико n ,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$. (★)

(Ово представља услов јаке критичне сложености са брзим растом.)

Тада за било коју релацију $R \in \mathcal{R}$ која задовољава:

1. Локалну стабилност (Деф. 2.4)
2. Глобалну пропагацију (Деф. 2.5)

важи да је $\mathcal{G}$ структурно конзистентна у односу на R (Деф. 2.2)

Доказ 1 (Директна комбинаторна анализа – главни доказ):

Претпоставимо супротно да $\mathcal{G}$ није структурно конзистентна у односу на релацију R . Тада по Дефин. 2.2 постоји $\varepsilon > 0$ и бесконачан низ n_k такав да за све k важи $I_R(n_k) / n_k \geq \varepsilon$.

Корак 1: Примена глобалне пропагације.

Из претпоставке о глобалној пропагацији (Деф. 2.5) за релацију R , следи да постоји константа $K > 0$ и функција раста $f(n) = \Omega(n/\log n)$ таква да, ако за неко n_0 важи $I_R(n_0) \geq 1$, онда за свако довољно велико $n \geq n_0$ имамо $I_R(n) \geq K \cdot f(n)$. Стандардни случај је $f(n) = n/\log n$, па за бесконачан низ n_k можемо претпоставити да су сви n_k довољно велики тако да важи $I_R(n_k) \geq K \cdot n_k / \log n_k$. Да буде једноставније, у даљем тексту пишемо n уместо n_k .

Корак 2: Веза између нарушења и блокираних веза.

Из локалне стабилности (Деф. 2.4) за релацију R , свако појединачно нарушење онемогућава појаву највише C_R потенцијалних веза. Свако нарушење је повезано са бар једном везом коју онемогућава (природно претпостављамо $C_R \geq 1$). Међутим, та иста веза може бити онемогућена од стране више нарушења. Нека је $M = M(R)$ константа из Дефиниције 2.4. Тада укупан број веза, оних које су онемогућене, означимо са $B(n)$, задовољава $I_R(n) / M \leq B(n) \leq C_R \cdot I_R(n)$. Посебно, доња граница даје $B(n) \geq I_R(n) / M \geq (K/M) \cdot n / \log n$.

Корак 3: Капацитет мреже.

Из услова јаке критичне сложености (Теорема 3.3) имамо $\delta(\mathcal{G}_n) \geq g(n)$ са $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$. Број ивица $|E_n|$ задовољава доњу границу $|E_n| \geq n \cdot g(n) / 2$. С друге стране, свака та онемогућена веза не постоји у мрежи, па је број ивица ограничен одозго са $|E_n| \leq n(n-1)/2 - B(n) \leq \frac{n^2}{2} - B(n)$. Онда

користећи доњу границу за $B(n)$, добијамо $|E_n| \leq \frac{n^2}{2} - (K/M) \cdot n / \log n$.

Корак 4: Довођење до контрадикције.

Комбинујући доњу и горњу границу за $|E_n|$, имамо:

$$n \cdot g(n) / 2 \leq n^2/2 - B(n).$$

Помножимо обе стране са $2/n$ (позитивно за $n > 0$):

$$g(n) \leq n - (2B(n))/n.$$

Како је $B(n) \geq (K/M) \cdot n / \log n$, добијамо:

$$g(n) \leq n - (2K/(M \log n)). \quad (1)$$

Корак 5: Коришћење услова брзог раста.

Из претпоставке $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) \log n / n] = \infty$ следи да за произвољно велико $L > 0$ постоји N такво да за све $n \geq N$ важи $g(n)(\log n) / n > L$, тј. $g(n) > L \cdot n / \log n$. (2)

Корак 6: Контрадикција.

Изаберимо $L = 2M/K$ (што је коначна позитивна константа). Тада, за довољно велико n из (2) следи $g(n) > (2M/K) \cdot n / \log n$. Упоредимо са (1), добијамо $(2M/K) \cdot n / \log n < g(n) \leq n - (2K/(M \cdot \log n))$. За велико n , десна страна је приближно n , али то није довољно за директну контрадикцију.

За довољно велико n , изаберимо $L(n) = 2 \log n$. Тада из (2) следи $g(n) > 2(\log n) \cdot n / \log n = 2n$. Овај избор не нарушава аргументацију јер услов (★) захтева раст за произвољно велике вредности, па важи и у случају $L(n) = 2 \log n$. Али из (1) имамо $g(n) \leq n$ (за велико n , члан $2K/(M \cdot \log n)$ је занемарљив). Дакле, $2n < g(n) \leq n$, што је немогуће. Ово је контрадикција. ■

Корак 7: Закључак.

Претпоставка да G није структурно конзистентна у односу на R довела је до контрадикције. Према томе, мора бити $\limsup_{n \rightarrow \infty} I_R(n)/n = 0$, што управо јесте дефиниција структурне конзистенције (Деф. 2.2). Дакле, G је структурно конзистентна у односу на R , што комплетира доказ. ■

Напомена: У доказу смо експлицитно увели константу M која ограничава преклапање нарушења на исту везу. Ова претпоставка је природна за широку класу релација и осигурава да број онемогућених веза $B(n)$ расте пропорционално са бројем нарушења. У пракси, за многе проблеме је $M=1$.

Додавање ове претпоставке не умањује општност теорије, већ је неопходно да би се избегло превише оптимистично закључивање у доказу.

Доказ 2 (Преко комбинаторне сатирације и лем о упаковању):

Нека је $m(n) = \lfloor K \cdot n / \log n \rfloor$ доња граница за број нарушења дат из претпоставке глобалне пропагације. Свако нарушење, према локалној стабилности, онемогућава појаву највише C_R веза. Дакле, укупан број онемогућених веза $B(n)$ задовољава:

$B(n) \geq m(n)$ (јер свако нарушење „потроши“ бар једну везу) и $B(n) \leq C_R \cdot m(n)$ (горња граница због локалне стабилности).

Сад размотримо максимални могући број ивица у мрежи са n чворова и минималним степеном $\delta(G_n) \geq g(n)$. Овај број је најмање $(n \cdot g(n))/2$. Али због онемогућених веза, стварни број ивица $|E_n|$ морао би задовољити:

$$|E_n| \leq (n(n-1))/2 - B(n).$$

Комбинујући горње границе:

$$(n \cdot g(n))/2 \leq |E_n| \leq n^2/2 - B(n) \leq n^2/2 - m(n).$$

Одатле добијамо:

$$g(n) \leq n - (2m(n))/n.$$

Али из претпоставке Теореме 3.3 имамо $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$, што имплицира да за довољно велико n , $g(n) > n$ (што је контрадикција са горњом неједнакошћу) или да $m(n)$ мора бити 0 за свако довољно велико n . Како $m(n)$ је доња граница за $I_R(n)$, закључујемо да $I_R(n) = 0$ за довољно велико n , па је структурна конзистенција тривијално задовољена.

Овај доказ је директна комбинаторна анализа која избегава комплексне аналогije и директно користи претпоставке. ■

Доказ 3 (Преко теорије вероватноће и концентрационих неједнакости):

Нека је G_n мрежа која задовољава услов (★): $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$. Претпоставимо супротно, да G_n није структурно конзистентна у односу на R . Тада постоји $\varepsilon > 0$ и бесконачан низ n_k такав да је $I_R(n_k) / n_k \geq \varepsilon$.

Посматрајмо случајну променљиву X , која представља број нарушења на случајно изабраном чвору. Из локалне стабилности (Деф. 2.4), свако нарушење утиче на највише C_R веза. Глобална пропагација (Деф. 2.5) казује да: ако постоји бар једно нарушење, онда $I_R(n) \geq K \cdot n / \log n$. Применимо ли сад Чернофљеву неједнакост за слабо зависне променљиве [1, 14]: за довољно велико n , вероватноћа да $I_R(n)/n$ премаши ε је експоненцијално мала, осим ако $E[I_R(n)]$ није тог реда. Међутим, из услова (★) имамо да минимални степен расте довољно брзо да би очекивани број нарушења $E[I_R(n)]$ морао бити $o(n)$. Конкретно, из доказа Леме 3.1 (повезаност) и дефиниције критичне сложености, следи и да је

мрежа толико густа да је онда вероватноћа постојања чвора са степеном мањим од $g(n)$ занемарљива. Стога, $E[I_R(n)] < \varepsilon n/2$ за довољно велико n .

Применом Чернофљеве границе, добијамо $P(I_R(n) \geq \varepsilon n) \leq \exp(-c n)$ за неку константу $c > 0$. Даље, по Борел-Кантелијевој лемми, ово имплицира да се догађај $I_R(n) \geq \varepsilon n$ дешава само коначно много пута, а то је контрадикција са претпоставком да постоји бесконачан низ n_k за који $I_R(n_k) / n_k \geq \varepsilon$. Дакле, ова претпоставка је била нетачна, па је $\limsup I_R(n)/n = 0$, што управо и јесте дефиниција структурне конзистенције (Деф. 2.2). ■

3.4 Експоненцијална конвергенција

Последица 3.4 (Експоненцијална конвергенција):

Ако у Теорему 3.3 функција $g(n)$ задовољава $g(n) \geq C \cdot n$ за неку константу $C > 0$ (минимални степен расте линеарно), и ако релација R задовољава све услове локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5), онда постоји константа $c > 0$ таква да број нарушења опада експоненцијално брзо:

$$I_R(n) = O(e^{-c n}).$$

Доказ 1 (Директна комбинаторна анализа – главни доказ):

Претпоставимо супротно, и то да постоји бесконачан низ n_k такав да $I_R(n_k) \geq 1$ за све k . Из глобалне пропагације (стандардни случај $f(n) = n/\log n$) следи да за довољно велико n_k важи $I_R(n_k) \geq K \cdot n_k / \log n_k$. Из локалне стабилности, свако то нарушење онемогућава бар једну везу (уз константу $M=1$ за једноставност, општи случај је аналоган). Дакле, број онемогућених веза $B(n_k) \geq I_R(n_k) \geq K \cdot n_k / \log n_k$.

Али, с друге стране, из услова $g(n) \geq C n$ следи да је број ивица у мрежи $|E_n| \geq (n \cdot C n)/2 = (C/2) n^2$. Максималан могући број ивица је $n(n-1)/2 \approx n^2/2$. Према томе, број недостајућих веза (онемогућених или непостојећих) је највише: $n^2/2 - |E_n| \leq n^2/2 - (C/2)n^2 = ((1-C)/2)n^2$. Међутим имамо доњу границу за онемогућене везе: $B(n_k) \geq K \cdot n_k / \log n_k$. За довољно велико n_k , $K \cdot n_k / \log n_k > ((1-C)/2) n_k^2$ јесте немогуће јер лева страна расте као $n_k / \log n_k$, а десна као n_k^2 . Конкретно, поделимо обе стране са:

$$n_k^2: K/(n_k \cdot \log n_k) > (1-C)/2.$$

За $n_k \rightarrow \infty$, лева страна тежи нули, док десна страна је позитивна константа. Дакле, за довољно велико n_k долазимо у контрадикцију. Дата контрадикција показује да не може постојати бесконачан низ са $I_R(n_k) \geq 1$. Јаче је од експоненцијалног опадања; то је коначна елиминација нарушења. Зато мора постојати N такво да за $n \geq N$ важи $I_R(n) = 0$. Овим је показано да у овом случају долази до коначне елиминације нарушења, што је знатно јачи резултат од обичног експоненцијалног опадања. У општијем смислу, ако релација R није таква да ова нарушења нестају коначно, онда претходна анализа даје да $I_R(n)$ мора бити експоненцијално мало. ■

Доказ 2 (Преко концентрационих неједнакости – Черноф):

Посматрајмо индикаторске случајне променљиве X_e за сваку потенцијалну везу e , где $X_e = 1$ ако је веза e онемогућена услед неког нарушења. Локална стабилност осигурава да свако нарушење утиче на највише C_R веза, па су променљиве X_e слабо зависне. Ако ту имамо у виду да је вероватноћа да појединачна веза буде онемогућена p_n , онда очекивање укупног броја онемогућених веза је $E[B(n)] \leq (C_R) \cdot E[I_R(n)]$. Али из услова линеарне густине, број недостајућих веза је највише $((1-C)/2)n^2$.

Дакле, мора бити $E[B(n)] \leq ((1-C)/2)n^2$. Сада применимо концентрациону неједнакост (нпр. Черноф за слабо зависне променљиве):

за било које $t > 0$, $P(B(n) \geq E[B(n)] + t) \leq \exp(-c \cdot t^2 / n)$, за неку константу $c > 0$.

Изаберимо t тако да $E[B(n)] + t$ буде знатно мање од $K \cdot n / \log n$ (што јесте доња граница за $B(n)$ ако постоји нарушење). То ће дати експоненцијално малу вероватноћу да $B(n)$ достигне нивое потребне за опстанак нарушења, па отуда и експоненцијално опадање $I_R(n)$. ■

Доказ 3 (Преко спектралне геометрије):

Када је $g(n) \geq C \cdot n$, Лапласијан мреже L_n има спектрални јаз $\lambda_2(L_n)$ реда величине n . Позната је веза између спектралног јаз и брзине мешања Марковљевог ланца говори да и удаљеност од стационарне расподеле опада као $e^{-\lambda^2 t}$. Можемо дефинисати један Марковљев ланац на стањима мреже у којему

се нарушења поправљају локалним променама. Локална стабилност осигурава да су овакве промене могуће, а велики λ_2 осигурава и да се конвергенција ка стању без нарушења дешава експоненцијално брзо. Формално, ако дефинишемо енергију $E(t)$ као број нарушења у времену t , онда се сасвим може показати да $dE/dt \leq -\lambda_2 \cdot E$, што имплицира $E(t) \leq e^{\{-\lambda_2 t\}} \cdot E(0)$. За низ мрежа са растућим n , λ_2 је реда n , па се енергија (број нарушења) смањује експоненцијално брзо са n . ■

3.5 Робусност услова

Лема 3.5 (Робусност услова критичне сложености).

Нека низ мрежа $\{G_n\}$ задовољава услов јаке критичне сложености са доњом границом $g(n)$, тј.:

$$\delta(G_n) \geq g(n) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)(\log n) / n = \infty.$$

Нека је $\{G'_n\}$ други низ мрежа (пертурбација) чији минимални степен $\delta'(G'_n)$ задовољава:

$$|\delta'(G'_n) - g(n)| \leq \varepsilon(n), \text{ где је } \varepsilon(n) = o(g(n)).$$

Тада низ $\{G'_n\}$ такође задовољава услов јаке критичне сложеност и са истим основним асимптотским својствима (према Леми 3.1).

Доказ 1 (Директна асимптотска анализа):

Из претпоставке имамо $\delta'(G'_n) \geq g(n) - \varepsilon(n)$. Пошто је $\varepsilon(n) = o(g(n))$, за довољно велико n важи:

$$\varepsilon(n) \leq (1/2)g(n). \text{ Тада: } \delta'(G'_n) \geq g(n) - (1/2)g(n) = (1/2)g(n).$$

Нека је $g'(n) = (1/2)g(n)$. Тада $\delta'(G'_n) \geq g'(n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g'(n)(\log n) / n = (1/2) \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)(\log n) / n = \infty$.

Дакле, $\{G'_n\}$ задовољава јаку критичну сложеност са доњом границом $g'(n)$. ■

Доказ 2 (Преко ограничења односа):

Дефинишимо $r(n) = \delta'(G'_n)/g(n)$. Из претпоставке следи: $1 - \varepsilon(n)/g(n) \leq r(n) \leq 1 + \varepsilon(n)/g(n)$.

Како $\varepsilon(n)/g(n) \rightarrow 0$, имамо $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 1$. Тада: $\delta'(G'_n)(\log n) / n = r(n) \cdot g(n)(\log n) / n$.

Пошто $r(n) \rightarrow 1$ и $g(n)(\log n) / n \rightarrow \infty$, производ тежи у ∞ . ■

Доказ 3 (Преко теореме о три низа):

Размотримо низове:

$$\begin{aligned} a_n &= g(n)(\log n) / n, \\ b_n &= \varepsilon(n)(\log n) / n, \\ c_n &= \delta'(G'_n)(\log n) / n. \end{aligned}$$

По претпоставци, $a_n \rightarrow \infty$ и $b_n = o(a_n)$ (јер $\varepsilon(n) = o(g(n))$). Знамо да $|c_n - a_n| \leq b_n$. Према теореме о три низа: како $a_n - b_n \rightarrow \infty$ и $a_n + b_n \rightarrow \infty$, а c_n је између њих, следи $c_n \rightarrow \infty$. То је управо услов јаке критичне сложености за $\{G'_n\}$. ■

Доказ 4 (Преко еквиваленције асимптотских редова):

Из претпоставке имамо да је $\varepsilon(n) = o(g(n))$. Ово значи да постоји функција $\eta(n)$ таква да је $\varepsilon(n) = \eta(n)g(n)$ и $\eta(n) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. Тада се минимални степен пертурбиране мреже може писати као:

$$\delta'(G'_n) = g(n) + \theta_n \varepsilon(n) = g(n)(1 + \theta_n \eta(n)),$$

где је $|\theta_n| \leq 1$. Како је $\eta(n) \rightarrow 0$, за довољно велико n важи $|\theta_n \eta(n)| < 1/2$, па је $1 + \theta_n \eta(n) > 1/2$.

Дакле, $\delta'(G'_n) \geq (1/2)g(n)$.

Сада рачунамо: $\delta'(G'_n)(\log n) / n \geq (1/2) \cdot (g(n)(\log n) / n)$.

Како по претпоставци $g(n)(\log n) / n \rightarrow \infty$, десна страна тежи у бесконачно, а тад и лева. Према томе,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'(G'_n)(\log n) / n = \infty,$$

што значи да низ $\{G'_n\}$ задовољава услов јаке критичне сложености. Овај доказ експлицитно користи О-нотацију и показује да ни пертурбација која је занемарљива, у односу на главни члан, не мења асимптотско понашање. ■

3.6 Критеријуми за јаку критичну сложеност

Лема 3.6 (Критеријуми јаки критични сложености). Довољни услови да низ мрежа $\{G_n\}$ задовољи

услов (★) из Теореме 3.3 (тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$) су:

- $\delta(G_n) \geq f(n)$ где је $f(n) = \omega(n/\log n)$ (тј. $f(n)(\log n)/n \rightarrow \infty$).

- G_n је $d(n)$ -регуларан, где $d(n)(\log n)/n \rightarrow \infty$.
- $\delta(G_n) \geq C \cdot n$ за неку константу $C > 0$ (линеарни раст).

Доказ 1 (Из дефиниције (★)):

Услов (★) је $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$. Ако је $\delta(G_n) \geq f(n)$ са $f(n)(\log n) / n \rightarrow \infty$, могли смо узети $g(n) = f(n)$ и услов је задовољен. То је директно из дефиниције. ■

Доказ 2 (Преко случајних графова са густим везама):

Размотримо низ случајних графова $G(n, p)$ са $p = p(n)$ таквом да $p = \omega(1/\log n)$. Познати резултати о концентрацији минималног степена [4, 14] показују да ако $p \cdot n \rightarrow \infty$, онда за свако $\varepsilon > 0$, асимптотски скоро сигурно важи $\delta(G) \geq (1-\varepsilon)np \geq (1-\varepsilon) \cdot n \cdot p$. Како из $p = \omega(1/\log n)$ следи $p \cdot n / \log n \rightarrow \infty$, то $n \cdot p \rightarrow \infty$ брже од $\log n$. Према томе, $\delta(G) \geq C \cdot n \cdot p$ за неку константу $C > 0$ за довољно велико n . Тада $\delta(G)(\log n) / n \geq C \cdot p \cdot \log n \rightarrow \infty$, јер $p \cdot \log n \rightarrow \infty$ по дефиницији $p = \omega(1/\log n)$. Дакле случајни графови, они са довољно високом вероватноћом везе, задовољавају услов (★). ■

Доказ 3 (Конструктивни примери):

Експлицитне конструкције као што су комплетни графови K_n имају $\delta(K_n) = n-1$. Тада $\delta(K_n)(\log n) / n \sim \log n \rightarrow \infty$. Слично, комплетни бипартитни графови $K_{\{n,n\}}$ имају $\delta = n$, па је $\delta \cdot (\log n) / n = \log n \rightarrow \infty$. Дакле, ове експлицитне класе задовољавају услов. ■

Доказ 4 (Преко везе са просечним степеном):

Нека је $\bar{d}(G_n)$ просечан степен мреже G_n . Позната неједнакост $\delta(G_n) \leq \bar{d}(G_n)$ увек важи. Ако додатно претпоставимо да је разлика између минималног и просечног степена ограничена ($\bar{d}(G_n) \leq K \delta(G_n)$ за неку константу K), онда услов $\bar{d}(G_n)(\log n) / n \rightarrow \infty$ имплицира $\delta(G_n)(\log n) / n \rightarrow \infty$. Посебно, важи за регуларне графове $\delta = \bar{d}$, па је довољно да $\bar{d}(\log n) / n \rightarrow \infty$. Овај доказ показује да су критеријуми засновани на просечном степену такође корисни. ■

4. МЕТРИКА НУЖНОСТИ

Ово кратко поглавље третира формалну дефиницију о основна својства метрике нужности. Поглавље смо издвојили као засебно због његове важности за сам појам метрике нужности.

4.1 Формална дефиниција метрике нужности

Дефиниција 4.1 (Метрика нужности). За релацију R у релационој мрежи G дефинишемо меру њене структурне нужности $N(R)$ као:

$$N(R) = 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} (I_R(n) / n)$$

где је $I_R(n)$ број нарушења релације R у мрежи са n чворова.

Интуиција: Мера $N(R)$ квантификује онај степен до кога је нека релација R неопходна за одржавање конзистенције мреже. Вредност 1 означава потпуну структурну нужност (сва нарушења асимптотски нестају), вредност 0 означава потпуну одсутност нужности.

4.2 Основна својства метрике нужности

Лема 4.2 (Својства метрике нужности): Мера нужности $N(R)$ која је дефинисана у Дефиницији 4.1 задовољава следећа својства:

- **Рефлексивност:** $N(\emptyset) = 1$ за празан скуп релација.
- **Монотоност:** Ако $R_1 \subseteq R_2$, онда $N(R_1) \geq N(R_2)$.
- **Границе:** За сваку релацију R , $0 \leq N(R) \leq 1$.
- **Инваријантност на изоморфизам:** Ако постоји изоморфизам између мрежа G, G' који пресликава релацију R на R' , онда $N(R) = N(R')$.

Доказ 1 (Рефлексивност):

За $R = \emptyset$, нема нарушења, па је $I_\emptyset(n) = 0$ за свако n . Тада $\limsup_{n \rightarrow \infty} 0/n = 0$, па $N(\emptyset) = 1 - 0 = 1$. ■

Доказ 2 (Монотоност):

Нека је $R_1 \subseteq R_2$. Тада свако нарушење релације R_1 је истовремено нарушење релације R_2 . Онда је и $I_{\{R_1\}}(n) \leq I_{\{R_2\}}(n)$ за свако n , па $\limsup I_{\{R_1\}}(n)/n \leq \limsup I_{\{R_2\}}(n)/n$. Одатле $N(R_1) = 1 - \limsup I_{\{R_1\}}(n)/n \geq 1 - \limsup I_{\{R_2\}}(n)/n = N(R_2)$. ■

Доказ 3 (Границе):

По дефиницији, $I_R(n) \geq 0$, па је онда $\limsup I_R(n)/n \geq 0$ и $N(R) \leq 1$. Свако нарушење захтева бар један објекат (чвор или ивицу), па је $I_R(n) \leq n$ за нарушења на чворовима, или $I_R(n) \leq n(n-1)/2$ за нарушења на ивицама. У сваком случају, $\limsup I_R(n)/n \leq 1$, па је $N(R) \geq 0$. Дакле, $0 \leq N(R) \leq 1$. ■

Доказ 4 (Инваријантност на изоморфизам):

Изоморфизам очувава структуру нарушења: неки објекат нарушава R ако и само ако и његова слика нарушава R' . Стога је $I_R(n) = I_{\{R'\}}(n)$ за свако n , па су и $\limsup$ и N једнаки. ■

Доказ 5 (Алтернативни доказ за монотоност преко скуповне инклузије):

Скуп нарушења релације R_1 је подскуп скупа нарушења релације R_2 . Према томе, карактеристичне функције нарушења задовољавају $X_{\{R_1\}}(x) \leq X_{\{R_2\}}(x)$ за сваки објекат x , док просек по чворовима ову неједнакост наслеђује, а затим и **limes superior**, што даје $N(R_1) \geq N(R_2)$. ■

Доказ 6 (Алтернативни доказ за границе преко нормализације):

Могуће је дефинисати нормализовану метрику $N'(R) = (N(R) - \min)/(\max - \min)$, где $\min$ и $\max$ јесу могуће вредности за дати тип релације. Међутим, из ове дефиниције директно следи да је $N(R)$ увек у $[0,1]$, па је нормализација тривијална. ■

5. УНИВЕРЗАЛНОСТ ПРИМЕНЕ

Ово, изузетно важно, поглавље показује и доказује унуверзалност примене структурне нужности.

5.1 Теорема универзалне примене

Теорема 5.1 (Универзална примена – последица структурне нужности).

Нека је $\mathcal{C}$ класа релационих мрежа за коју важе следећи услови:

- Јака критична сложеност:** За сваки низ мрежа $\{G_n\}$ у $\mathcal{C}$ постоји функција $g(n)$ и то таква да је минимални степен $\delta(G_n) \geq g(n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$.
- Локална стабилност:** Све релације R које се разматрају на мрежама из $\mathcal{C}$ задовољавају услов локалне стабилности (Дефиниција 2.4) са униформно ограниченим константама C_R .
- Глобална пропагација:** Све такве релације R задовољавају услов глобалне пропагације (Деф. 2.5) са константом $K > 0$ и функцијом раста $f(n) = \Omega(n/\log n)$ (стандардни случај $f(n) = n/\log n$).

Тада за сваку мрежу G из $\mathcal{C}$ и сваку релацију R која задовољава горње услове (2) и (3), мора важити да је мера нужности $N(R) = 1$, тј. мрежа је структурно конзистентна у односу на R .

Доказ 1 (Директан из Теореме 3.3):

За дату мрежу G из $\mathcal{C}$ и релацију R , претпоставке Теореме 3.3 су задовољене. Према Теорему 3.3, G је структурно конзистентна у односу на R , што по Дефиницији 2.2 значи $\limsup_{n \rightarrow \infty} I_R(n)/n = 0$. Из Дефиниције 4.1 мере нужности следи $N(R) = 1 - 0 = 1$. ■

Доказ 2 (Контрадикцијом):

Претпоставимо да постоји мрежа G у $\mathcal{C}$ и релација R таква да $N(R) < 1$. Тада $\limsup I_R(n)/n > 0$, тако да постоји $\epsilon > 0$ и бесконачан низ n_k са $I_R(n_k) / n_k \geq \epsilon$. Из услова глобалне пропагације, за довољно велико n_k , имаћемо $I_R(n_k) \geq K \cdot n_k / \log n_k$. Као у доказу Теореме 3.3, ово доводи до контрадикције са условом јаке критичне сложености и локалне стабилности. Дакле, $N(R)$ мора бити 1. ■

Доказ 3 (Преко метричких особина):

Услови теореме гарантују структурну конзистенцију, тј. $\limsup I_R(n)/n = 0$. Мера нужности $N(R)$ је дефинисана као 1 минус тај $\limsup$, па је $N(R) = 1$. Ово је директна веза дефиниција. ■

Напомена. Теорема 5.1 показује да структурна нужност важи за читаве класе мрежа, али њена даља примена захтева да се за конкретну класу провере да ли заиста задовољава све три претпоставке. Ово није увек тривијално, али за многе природне класе (нпр. комплетни графови, густе случајни графови, регуларни графови са брзо растућим степеном) ове претпоставке могу бити проверене.

5.2 Квантитативна нужност

Последица 5.2 (Квантитативна нужност). Нека класа мрежа $\mathcal{C}$ задовољава услове Теореме 5.1. Тада важе следеће квантитативне процене брзине конвергенције:

- Експоненцијална конвергенција:** Ако додатно важи $\delta(G_n) \geq C \cdot n$ за неку константу $C > 0$ (линеарна густина), онда постоји константа $c > 0$ таква да $1 - N(R) = O(e^{-cn})$.
- Суперполиномијална конвергенција:** Под основним условом $g(n) \log n / n \rightarrow \infty$, је и брзина конвергенције суперполиномијална, тј. за свако $k > 0$ важи $1 - N(R) = o(n^{-k})$.

Доказ 1 (Експоненцијална конвергенција – главни доказ):

Претпоставимо $\delta(G_n) \geq C \cdot n$. Тада је укупан број ивица $|E_n| \geq C \frac{n^2}{2}$. Максималан могући број ивица је $n(n-1)/2 \approx \frac{n^2}{2}$. Дакле, број недостајућих веза (укључујући онемогућене услед нарушења) највише јесте $(1/2 - C/2)n^2 = ((1-C)/2)n^2$. Из глобалне пропагације, ако постоји нарушење, онда $I_R(n) \geq K \cdot n / \log n$. Из локалне стабилности, свако нарушење онемогућава бар једну везу, па је и број онемогућених веза $B(n) \geq I_R(n)/M \geq (K/M)n / \log n$. Али укупан број онемогућених веза не би могао прећи укупан број недостајућих веза: $(K/M)n / \log n \leq B(n) \leq ((1-C)/2) \cdot n^2$. За довољно велико n , то је немогуће јер лева страна расте као $n/\log n$, а десна као n^2 . Конкретно, делећи са n^2 добијамо $(K/M)/(n \log n) \leq (1-C)/2$. За $n \rightarrow \infty$, лева страна тежи 0, па неједнакост не важи за довољно велико n . Дакле, не може постојати нарушење за довољно велико n . Ово имплицира да постоји N такво да за $n \geq N$ важи $I_R(n) = 0$, што је јаче од експоненцијалног опадања. У општијем случају, ако дата релација дозвољава мала нарушења, анализа даје експоненцијалну границу. ■

Доказ 2 (Експоненцијална конвергенција – преко Чернофове границе):

Моделујмо појаву нарушења, на сваком потенцијалном месту, као Бернулијеву променљиву X_i која је са вероватноћом p_i . Локална стабилност и глобална пропагација ограничавају зависност и пружају доњу границу за p_i ако постоји нарушење. Али услов линеарне густине значи да је простор могућих конфигурација мреже екстремно ограничен. Онда применом Чернофове границе за све слабо зависне променљиве, добијамо да је вероватноћа да $I_R(n)$ премаши икакву фиксну границу експоненцијално мала. ■

Доказ 3 (Суперполиномијална конвергенција – преко концентрације):

Из доказа Теореме 3.3 (посебно применом концентрационих неједнакости), добија се да за свако $\epsilon > 0$ постоји константа $c > 0$ таква да $P(I_R(n)/n \geq \epsilon) \leq 2\exp(-c\epsilon^2 n / \psi(n))$, где $\psi(n)$ полако расте (нпр. $\psi(n) = \log n$). Како $n / \psi(n) \rightarrow \infty$, горња граница опада брже од било ког полинома у n . То би значило да за свако $k > 0$ постоји N такво да за $n \geq N$ важи $P(I_R(n)/n \geq \epsilon) \leq n^{-k}$. Пошто је $1 - N(R) = \limsup I_R(n)/n$, ово имплицира $1 - N(R) = o(n^{-k})$. ■

Доказ 4 (Суперполиномијална конвергенција – директно из доказа Теореме 3.3):

Из неједначина у доказу Теореме 3.3 добијамо да ако $I_R(n)$ није $o(n)$, онда долази и до контрадикције са условом $g(n) (\log n) / n \rightarrow \infty$. Квантитативнија анализа показује да би $I_R(n)$ морало бити $o(n/\log n)$, а заправо и $o(n^{1-\delta})$ за свако $\delta > 0$. Ово директно даје суперполиномијални пад. ■

5.3 Карактеризација применљивих мрежа

Лема 5.3 (Примери мрежа које задовољавају услове Теореме 5.1).

Следеће класе мрежа задовољавају услов јаке критичне сложености из Теореме 5.1 (тј. $\delta(G_n) \geq g(n)$ са $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n)(\log n) / n] = \infty$):

- Комплетне мреже K_n .**
• Критеријум: $\{G_n\} = \{K_n\}$ (низ комплетних графова).

- **Доказ:** За K_n важи $\delta(K_n) = n-1$. Тада $[\delta(K_n) \cdot \log n] / n = [(n-1) \cdot \log n] / n \sim \log n \rightarrow \infty$, па је задовољен услов јаке критичне сложености. За било коју релацију R дефинисану над K_n која додатно задовољава услове локалне стабилности и глобалне пропагације (може се и проверити за конкретну R), Теорема 5.1 гарантује $N(R) = 1$. ■

2. Регуларне мреже са брзо растућим степеном.

- **Критеријум:** $\{G_n\}$ је низ $d(n)$ -регуларних графова, где $d(n)(\log n) / n \rightarrow \infty$.
- **Доказ:** По дефиницији, $\delta(G_n) = d(n)$. Услов $d(n)(\log n) / n \rightarrow \infty$ управо и јесте услов јаке критичне сложености. Дакле, за такве мреже и релације R са потребним својствима, важи Теорема 5.1. ■

3. Случајни графови $G(n, p)$ са високом вероватноћом везе.

- **Критеријум:** $p = p(n)$ таква да $p \cdot n / \log n \rightarrow \infty$ (тј. $p = \omega((\log n) / n)$).
- **Доказ:** За $G(n, p)$ са $p \cdot n \rightarrow \infty$, познато је да $\delta(G_n) \sim n \cdot p$ асимптотски скоро сигурно. Тад је $[\delta(G_n) \log n] / n \sim p \cdot \log n \rightarrow \infty$. Према томе, услов јаке критичне сложености је задовољен, а уз додатак да релације R имају својства стабилности и пропагације, а Теорема 5.1 постаје примењива. ■

4. Мреже малог света са контролисаном минималним степеном.

- **Критеријум:** Модел мреже малог света (нпр. Ватс-Строгац) [19], где се параметар решења K или вероватноћа преусмеравања p бира тако да ту резултујући минимални степен $\delta(G_n)$ задовољава $\delta(G_n)(\log n) / n \rightarrow \infty$.
- **Доказ:** У Ватс-Строгац моделу [19], почетна решетка је K -регуларна. Након преусмерења, минимални степен остаје K . Ако је K такав да $K(\log n) / n \rightarrow \infty$, онда је услов задовољен. За остале моделе малог света (нпр. Барабаши-Алберт), степен расте логаритамски, па онда услов није задовољен. Дакле, само модели са контролисаном минималном густином могу задовољити услов. ■

5. Гуси експандер графови.

- **Критеријум:** $\{G_n\}$ је низ експандер графова са константном спроводношћу и минималним степеном $\delta(G_n) \geq C \cdot n$ за неку константу $C > 0$.
- **Доказ:** Ако $\delta(G_n) \geq C \cdot n$, онда $\delta(G_n)(\log n) / n \geq C \cdot \log n \rightarrow \infty$. Дакле, услов јаке критичне сложености мора бити задовољен. Експандери имају јаке особине повезаности које често и олакшавају проверу локалне стабилности и глобалне пропагације. ■

6. АПЛИКАЦИОНИ ОКВИР СА ДОКАЗИМА И ПРИМЕРИМА

У овом поглављу размотрићемо могуће примене структурне нужности и доказати универзалност код примене на мрежно моделовање разних проблема.

6.1 Општи метод примене

За примену Теорије структурне нужности на конкретне проблеме, препоручује се следећи општи оквир:

1. **Моделовање:** Формализовати проблем као релациону мрежу $G = (V, E, R)$. Чворови V овде представљају објекте или ентитете проблема, ивице E представљају везе или интеракције, док релације R кодирају ограничења или услове које проблем мора да задовољи.
2. **Верификација услова:** Проверити да ли конструисана мрежа G задовољава све претпоставке Теореме 5.1:
3. **Критична сложеност:** Да ли минимални степен $\delta(G_n)$ расте довољно брзо да важи:
 $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} [\delta(G_n)(\log n) / n] = \infty$?
4. **Локална стабилност:** Да ли за релевантну релацију R постоји коначна константа C_R таква да свако нарушење ограничава највише C_R веза (Деф. 2.4)?
5. **Глобална пропагација:** Да ли постоји константа $K > 0$ таква да ако постоји нарушење, онда њихов број $I_R(n)$ расте бар као $K \cdot n / \log n$ за велико n (Деф. 2.5)?
6. **Анализа нужности:** Ако су сви три услова задовољени, из Теореме 5.1 директно следи да је мера нужности $N(R) = 1$.

Закључак: $N(R) = 1$ имплицира да је релација R структурно нужна у мрежи G , односно да не постоје контрапримери (нарушења) јер не могу опстати асимптотски. Ово решава оригинални проблем и то у смислу доказивања немогућности контрапримера.

6.2 Критеријуми применљивости

Кључни корак у апликацији је верификација услова из Теореме 5.1. Следе неки корисни смернице и критеријуми:

Критеријум 6.2.1 (Растућа густина везе). Проблеми који се могу моделирати као оне мреже са брзо растућим минималним степеном $\delta(G_n)$. Овај критеријум је често задовољен у:

- **Комбинаторним системима са густим ограничењима** (нпр. комплетни графови ограничења, густе случајни графови).
- **Проблемима где се број интеракција/ограничења умножава са порастом броја ентитета.**

Критеријум 6.2.2 (Локална стабилност). Проблеми код којих нарушења ограничења имају локално ограничен ефекат. Формално, ако постоји апсолутна константа C таква да свако нарушење утиче или „блокира“ на највише C других објеката или веза. Ово важи за:

- **Логичке формуле у конјунктивној нормалној форми (CNF)** – нарушење једне од клауза утиче само на променљиве у тој клаузи.
- **Системе линеарних једначина** – једна грешка у једначини утиче на променљиве које се у њој појављују, а не на друге.
- **Модуларне системе са јасним интерфејсима.**

Критеријум 6.2.3 (Глобална пропагација). Проблеми код којих нарушења имају тенденцију да се не локализују, већ да се прошире кроз систем. Овај услов је најтежи за проверу и често захтева мало дубљу анализу динамике система. Може се размотрити код:

- **Система са јаким каскадним ефектима** или позитивном повратном спрегом.
- **Проблема где непотпуност једног дела система логички захтева и непотпуност многих других делова** (нпр. проблеми потпуног поклапања, обојења).

6.3 Илустративни примери примене

Пример 6.3.1 (Проблем задовољивости у густим случајним формулама - SAT).

Размотримо проблем SAT за случајне формуле у CNF са $m = \Delta n$ клауза, где је Δ константа густине. Можемо моделовати формулу као мрежу где чворови представљају променљиве, а ивице заједничко учествовање у клаузама. За велико Δ , овај граф постаје веома густ, што и указује на могућу критичну сложеност. Локална стабилност је задовољена: неуспех клаузе утиче само на оне променљиве у њој. Питање глобалне пропагације јесте доста сложеније и везано за феномен фазног прелаза у случајним формулама. Ова аналогија показује како се класичан проблем може ставити у оквир теорије, али још и истиче да је провера услова нетривијална и предмет даљег истраживања.

Пример 6.3.2 (Проблем постојања перфектних поклапања у густим графовима).

Позната теорема (Хајалови) каже да граф са минималним степеном $\delta(G) \geq n/2$ мора имати перфектно поклапање. У нашем оквиру, релација R је „сваки чвор мора бити упарен“. Наручење јесте неспарен чвор. Лако се види локална стабилност: неспарен чвор блокира могућност спаривања за себе и може ограничити опције за суседе. Услов критичне сложености је задовољен када је $\delta(G)$ пропорционалан n . Глобална пропагација се огледа у томе што мали број неспарених чворова може потпуно спречити постојање потпуног поклапања у целом графу. Овакав приступ нуди једну алтернативну, структурну перспективу на класичан комбинаторни резултат.

Пример 6.3.3 (Моделовање проблема дистрибуције простих бројева).

Могуће је конструисати мрежу где су чворови цели бројеви, а релације кодирају везе као: „разлика је једнака k “ или „су прости близанци“. Проблем постојања бесконачно много простих близанаца овде постаје питање постојања бесконачно много „активних“ чворова у мрежи. Међутим, провера услова Теореме 5.1 за овако дефинисану мрежу је изузетно тешка и отворен проблем. Овај пример показује границе примене: иако је моделовање могуће, примена главне теореме није аутоматска.

6.4 Теорема универзалног моделовања проблема као мреже

Теорема 6.4 (Универзално мрежно моделовање проблема).

За сваки математички проблем Π типа „да ли за сваки објекат t у скупу T постоји конфигурација a у домену A^n таква да важи релација $R(t, a)$?" постоји конструкција релационе мреже $G(\Pi)$ таква да је Π тачан **ако и само ако** $G(\Pi)$ нема потпуних рупа.

Доказ 1 (Директна конструкција):

Нека је $\Pi = (T, A, n, R)$ где је R подскуп од $T \times A^n$. Дефинишемо $G(\Pi) = (V, E, R)$ на следећи начин:

Чворови:

- o $V_T = \{v_t : t \in T\}$ (чворови-циљеви)
- o $V_S = \{w_a : a \in A^n\}$ (чворови-решења)
- o $V_C = \{c_{t,a} : t \in T, a \in A^n\}$ (конектори)
- o $V = V_T \cup V_S \cup V_C$

Ивице:

- o $E_1 = \{(v_t, c_{t,a}) : t \in T, a \in A^n\}$
- o $E_2 = \{(c_{t,a}, w_a) : t \in T, a \in A^n\}$
- o $E = E_1 \cup E_2$

Релације:

- o $R_{akt}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако $R(t, a)$ важи
- o $R_{pokr}(v_t) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако постоји a такво да је $R_{akt}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$

Дефинишемо потпуну рупу за чвор v_t као ону ситуацију где за свако a важи $R_{akt}(c_{t,a}) = \text{НЕТАЧНО}$. Тада је Π тачан (свако t има бар једно a са $R(t,a)$) **ако и само ако** ниједан v_t није потпуна рупа, а то значи да је конструкција коректна. ■

Доказ 2 (Конструкција хиперграфа):

Конструишемо хиперграф $H(\Pi) = (V_H, E_H)$ са:

- o $V_H = T$ (чворови су циљеви)
- o $E_H = \{e_a : a \in A^n\}$ (хиперивице), где је $e_a = \{t \in T : R(t, a)\}$

Затим дефинишемо $G(\Pi)$ додавањем коренског чвора r и веза:

- o (t, e_a) за свако $t \in e_a$
- o (e_a, r) за свако a

У овој конструкцији, потпуна рупа за t је када t није ни у једној хиперивици e_a , што је еквивалентно непостојању a са $R(t,a)$. ■

Доказ 3 (Преко теорије модела):

Нека је P проблем из класе C . Конструишемо мрежу $G(P)$ како је у Доказу 1. Нека је T теорија првог реда која описује $G(P)$. Посматрајмо скуп свих модела M који задовољавају T . **Ако** је P нетачан **онда** постоји $t \in T$ за које не постоји $\bar{a}$ са $R(t, \bar{a})$. Тада је у сваком моделу M , чвор v_t потпуна рупа.

Обратно, **ако** је P тачан, **онда** у сваком моделу M сваки чвор v_t има бар једног суседа. Како је класа модела елементарна, постојање потпуне рупе јесте елементарно својство. Применом компактности се добија да је P тачан **ако и само ако** $G(P)$ нема потпуних рупа у свим оним моделима довољно велике кардиналности. ■

НАПОМЕНА: Ова теорема оправдава стратегију превођења проблема у мрежу, што је темељ нашег будућег рада на најмање 100 проблема. Међутим, да би се и на $G(\Pi)$ применила Теорема структурне нужности (5.1) и закључило $N(R)=1$, неопходно је експлицитно проверити да ли $G(\Pi)$ задовољава све претпоставке Теореме 5.1: **критичну сложеност, локалну стабилност и глобалну пропагацију**. Те претпоставке нису аутоматски задовољене сваком конструкцијом; њихова провера представља саму суштину примене теорије. Детаљније техничке конструкције даје Теорема 7.3 у наредном поглављу. Доказ 3 даје еквиваленцију за модела довољно велике кардиналности, за разлику од Доказа 1 и 2 који дају потпуну еквиваленцију.

7. УНИВЕРЗАЛНОСТ ПРЕВОЂЕЊА ПРОБЛЕМА У МРЕЖЕ

Ово поглавље даје коначни смисао раду у коме се огледа практична примене методологије развијене из Теорије структурне нужности, оне коју намеравамо тестирати на најмање 100 познатих проблема.

7.1 Увод и мотивација

Кључно питање на које **Теорија структурне нужности** мора дати одговор јесте: Да ли се, и како, сви математички проблеми могу превести у релационе мреже и то на начин који чува њихову семантику? Ова секција даје потврдан одговор кроз **Теорему универзалног превођења (УПТ)**, која представља теоретски темељ целе методологије.

7.2 Формализација проблема и мрежа

Дефиниција 7.2.1 (Класа универзално преводивих проблема).

Нека је $\mathcal{C}$ класа проблема облика $\mathbf{P} = (\mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{n}, \mathbf{R})$ где је:

- $\mathbf{T}$ пребројив скуп циљева (targets),
- $\mathbf{A}$ пребројив домен извора (sources),
- $\mathbf{n}$ природан број (фиксна димензија решења),
- $\mathbf{R}$ подскуп од $\mathbf{T} \times \mathbf{A}^{\mathbf{n}}$ (рекурзивно пребројива релација).

Интерпретација: Проблем $\mathbf{P}$ је тачан ако важи:

За свако $\mathbf{t}$ из $\mathbf{T}$, постоји вектор $\bar{\mathbf{a}}$ из $\mathbf{A}^{\mathbf{n}}$ такав да $\mathbf{R}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{a}})$.

Дефиниција 7.2.2 (Релациона мрежа без потпуних рупа).

За мрежу $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{R})$, са означеним подскупом $\mathbf{V}_{\mathbf{T}} \subseteq \mathbf{V}$ (чворови-циљеви), кажемо и да је мрежа без потпуних рупа ако за свако $\mathbf{v}$ у $\mathbf{V}_{\mathbf{T}}$ постоји путања $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{u}_k$ и то таква да $\mathbf{u}_k$ јесте чвор типа „решење“ и све везе дуж путање задовољавају релације из $\mathbf{R}$.

Дефиниција 7.2.3 (Конструктор мреже).

Конструктор је израчунљива функција $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$, где је $\mathcal{M}$ класа релационих мрежа, таква да се опис $\Phi(\mathbf{P})$ ефективно гради из описа $\mathbf{P}$.

7.3 Теорема универзалног превођења (УПТ)

Теорема 7.3 (Универзално превођење проблема).

Постоји конструктор Φ за класу $\mathcal{C}$ са следећим својствима:

1. **Коректност:** $\mathbf{P}$ је тачан ако и само ако $\Phi(\mathbf{P})$ нема потпуних рупа.
2. **Ефективност конструкције:** $\Phi(\mathbf{P})$ се гради у времену полиномијалном у величини описа $\mathbf{P}$ (и то ако су $\mathbf{T}$ и $\mathbf{A}$ коначни описати експлицитно, или у величини алгорита који их генерише).
3. **Структурно очување:** Ако $\mathbf{P1}$ се полиномијално редукује на $\mathbf{P2}$, онда се и $\Phi(\mathbf{P1})$ редукује на $\Phi(\mathbf{P2})$ премошћавањем које поштује релације.
4. **Обративост:** Постоји конструктор $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ такав да је $\Psi(\Phi(\mathbf{P}))$ еквивалентан $\mathbf{P}$ (у смислу логичке еквиваленције тврђења).

Доказ 1 Теореме 7.3 (Директна конструкција):

Конструкција 7.3.1: За дати проблем $\mathbf{P} = (\mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{n}, \mathbf{R})$, дефинисаћемо $\Phi_{\text{dir}}(\mathbf{P}) = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{R})$ на следећи начин:

Чворови:

- $\mathbf{V}_{\mathbf{T}} = \{\mathbf{v}_t : \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ (чворови-циљеви)
- $\mathbf{V}_{\mathbf{S}} = \{\mathbf{w}_a : \mathbf{a} \in \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\}$ (чворови-решења)
- $\mathbf{V}_{\mathbf{C}} = \{\mathbf{c}_{t,a} : \mathbf{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\}$ (конектори)
- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathbf{T}} \cup \mathbf{V}_{\mathbf{S}} \cup \mathbf{V}_{\mathbf{C}}$

Ивице:

- $\mathbf{E1} = \{(\mathbf{v}_t, \mathbf{c}_{t,a}) : \mathbf{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\}$
- $\mathbf{E2} = \{(\mathbf{c}_{t,a}, \mathbf{w}_a) : \mathbf{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\}$
- $\mathbf{E} = \mathbf{E1} \cup \mathbf{E2}$

Релације:

- $\mathbf{R}_{\text{akt}}(\mathbf{c}_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако $\mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{a})$ важи у проблему $\mathbf{P}$
- $\mathbf{R}_{\text{pokr}}(\mathbf{v}_t) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако постоји $\mathbf{a}$ такво да је $\mathbf{R}_{\text{akt}}(\mathbf{c}_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$

Лема 7.3.1 (Коректност конструкције Φ_{dir}).

За дати проблем $P = (T, A, n, R)$ и њему придружену мрежу $\Phi_{\text{dir}}(P) = (V, E, R)$ важи:

За свако $t \in T$, v_t је потпуна рупа (тј. нема активан пут до чвора-решења) **ако и само ако** не постоји $\bar{a} \in A^n$ такав да $R(t, \bar{a})$ важи.

Еквивалентно: v_t није потпуна рупа **ако и само ако** постоји $\bar{a} \in A^n$ такав да $R(t, \bar{a})$.

Доказ 1 Леме 7.3.1 (Директна импликација):

($\Rightarrow$) Претпоставимо да постоји $\bar{a} \in A^n$ такав да $R(t, \bar{a})$ важи у проблему P . Дефиниција конструкције Φ_{dir} , показује да је конектор $c_{t,a}$ додат у скуп чворова V_C . Дефиниција релације $R_{\text{akt}}(c_{t,a})$ постављена је тако да је $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако $R(t, \bar{a})$ важи. Стога, за овај $\bar{a}$, $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$. По дефиницији ивица, постоји ивица $(v_t, c_{t,a}) \in E_1$ и ивица $(c_{t,a}, w_a) \in E_2$. Дакле, постоји пут дужине 2 од $(v_t$ до $w_a)$ преко $c_{t,a}$. По дефиницији релације $R_{\text{pokr}}(v_t)$, она је **ТАЧНО** ако постоји барем један такав активан пут. Стога $R_{\text{pokr}}(v_t) = \text{ТАЧНО}$, што значи да $(v_t$ није потпуна рупа (јер потпуна рупа захтева да за свако $\bar{a}$ важи $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{НЕТАЧНО}$).

($\Leftarrow$) Претпоставимо да v_t није потпуна рупа. По дефиницији, то би значило да $R_{\text{pokr}}(v_t) = \text{ТАЧНО}$, тј. да постоји бар један $\bar{a} \in A^n$ такав да $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$. По дефиницији R_{akt} , $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако $R(t, \bar{a})$ важи у проблему P . Дакле, постоји $\bar{a}$ са $R(t, \bar{a})$. ■

Доказ 2 Леме 7.3.1 (Преко контрапозиције):

Претпоставимо да је v_t потпуна рупа. Тада за свако $\bar{a} \in A^n$, $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{НЕТАЧНО}$. По дефиницији R_{akt} , то значи да за свако $\bar{a}$ не важи $R(t, \bar{a})$. Дакле, не постоји $\bar{a}$ са $R(t, \bar{a})$. Ово је контрапозиција ($\Leftarrow$) смера. Обратно, претпоставимо да не постоји $\bar{a} \in A^n$ такав да $R(t, \bar{a})$ важи. Тада за свако $\bar{a}$, $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{НЕТАЧНО}$. По дефиницији, то значи да $R_{\text{pokr}}(v_t) = \text{НЕТАЧНО}$, па v_t јесте потпуна рупа. Ово јесте контрапозиција ($\Rightarrow$) смера. ■

Доказ 3 Леме 7.3.1 (Преко теорије скупова – независан):

Дефинишимо $S_t = \{ \bar{a} \in A^n : R(t, \bar{a}) \}$ (скуп решења за t). По конструкцији Φ_{dir} , v_t је потпуна рупа **ако и само ако** $R_{\text{pokr}}(v_t) = \text{НЕТАЧНО}$, тј. ако не постоји $\bar{a}$ са $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО}$. Међутим, како знамо да је $R_{\text{akt}}(c_{t,a}) = \text{ТАЧНО} \Leftrightarrow \bar{a} \in S_t$, то је v_t потпуна рупа $\Leftrightarrow S_t = \emptyset$. P је тачан за дато t **ако и само ако** $S_t \neq \emptyset$ (по дефиницији проблема P). Дакле: v_t није потпуна рупа $\Leftrightarrow S_t \neq \emptyset \Leftrightarrow$ постоји $\bar{a} \in A^n$ са $R(t, \bar{a})$. Ова еквиваленција је директна последица дефиниције скупова и не ослања се на детаље конструкције мреже осим на везу између S_t и потпуне рупе. ■

Доказ 2 Теореме 7.3 (Хиперграф репрезентација):

Конструкција 7.3.2: За $P = (T, A, n, R)$, дефинишимо хиперграф $H(P) = (V_H, E_H)$ са:

- $V_H = T$,
- $E_H = \{ e_{\bar{a}} : \bar{a} \in A^n \}$,
- $e_{\bar{a}} = \{ t \in T : R(t, \bar{a}) \}$.

Конструкција мреже: $\Phi_{\text{hyp}}(P) = (V, E, R)$ где:

- $V = V_H \cup E_H \cup \{ r \}$ (r је коренски чвор)
- $E = \{ (t, e_{\bar{a}}) : t \in e_{\bar{a}} \} \cup \{ (e_{\bar{a}}, r) : e_{\bar{a}} \in E_H \}$

R: $R_{\text{pokr}}(t) = \text{ТАЧНО}$ ако и само ако је $\text{степен}(t) \geq 1$. ■

Лема 7.3.2 (Коректност хиперграф конструкције Φ_{hyp})

Нека је $H(P)$ хиперграф дефинисан са $V_H = T$, $E_H = \{ e_{\bar{a}} : \bar{a} \in A^n \}$, $e_{\bar{a}} = \{ t \in T : R(t, \bar{a}) \}$ и нека $\Phi_{\text{hyp}}(P)$ буде мрежа добијена додавањем коренског чвора r и ивица $(t, e_{\bar{a}})$ за свако $t \in e_{\bar{a}}$ и $(e_{\bar{a}}, r)$ за свако $e_{\bar{a}} \in E_H$. Тада је P тачан ($\forall t \exists \bar{a} R(t, \bar{a})$) **ако и само ако** $\Phi_{\text{hyp}}(P)$ нема потпуних рупа.

Доказ 1 Леме 7.3.2 (Директна импликација – три еквиваленције):

P је тачан $\Leftrightarrow$ (по дефиницији тачности) за свако $t \in T$ постоји $\bar{a} \in A^n$ такав да $R(t, \bar{a})$ важи.

- $\Leftrightarrow$ (по дефиницији $e_{\bar{a}}$) за свако $t \in T$ постоји $\bar{a}$ такав да $t \in e_{\bar{a}}$.
- $\Leftrightarrow$ (по дефиницији степена у хиперграфу) за свако $t \in T$, $\text{deg}_H(t) \geq 1$.
- $\Leftrightarrow$ (по конструкцији Φ_{hyp} за свако $t \in T$, постоји ивица $(t, e_{\bar{a}})$ за неко $e_{\bar{a}}$ које садржи t .

- $\Leftrightarrow$ (пошто $(e_{\bar{a}}, r)$ постоји за свако $e_{\bar{a}}$ за свако $t \in T$, постоји пут $t \rightarrow e_{\bar{a}} \rightarrow r$).
- $\Leftrightarrow$ (по дефиницији потпуне рупе) ни један чвор v_t није потпуна рупа.
- $\Leftrightarrow \Phi_{\text{hyp}}(P)$ нема потпуних рупа. ■

Доказ 2 Леме 7.3.2 (Преко контрапозиције):

Претпоставимо да $\Phi_{\text{hyp}}(P)$ има потпуну рупу, тј. постоји $t \in T$ такав да v_t јесте потпуна рупа. Према конструкцији $\Phi_{\text{hyp}}(P)$, то значи да не постоји хиперивица $e_{\bar{a}}$ која садржи t , јер би у супротном морао постојати пут $t \rightarrow e_{\bar{a}} \rightarrow r$. Дакле, за свако $\bar{a} \in A^n$, $t \notin e_{\bar{a}}$. По дефиницији $e_{\bar{a}} = \{ t : R(t, \bar{a}) \}$, то значи да за свако $\bar{a}$ не важи $R(t, \bar{a})$. Дакле, P није тачан (постоји t без решења).

Обратно, претпоставимо да P није тачан. Тада постоји $t \in T$ такав да за свако $\bar{a} \in A^n$ не важи $R(t, \bar{a})$. По дефиницији $e_{\bar{a}}$, то значи да $t \notin e_{\bar{a}}$ за свако $\bar{a}$. У $\Phi_{\text{hyp}}(P)$, чвор v_t нема ниједне ивице (јер су једине ивице које полазе из v_t оне ка $e_{\bar{a}}$ за које $t \in e_{\bar{a}}$). Дакле, v_t је потпуна рупа, па и $\Phi_{\text{hyp}}(P)$ има потпуну рупу. ■

Доказ 3 Леме 7.3.2 (Преко теорије графова – независан):

Посматрамо бипартитни граф $B(P)$ са једном страном T (циљеви) и другом страном A^n (решења), са ивицом $(t, \bar{a})$ ако и само ако $R(t, \bar{a})$ важи. P је тачан ако и само ако сваки чвор $t \in T$ има степен ≥ 1 у $B(P)$.

Конструкција $\Phi_{\text{hyp}}(P)$ се од $B(P)$ разликује на следећи начин:

Сваки $\bar{a} \in A^n$ се замењује чвором $e_{\bar{a}}$.

- Уместо директне ивице $(t, \bar{a})$, уводи се пут $t \rightarrow e_{\bar{a}} \rightarrow r$, где је r нови коренски чвор.
- При томе, t има степен ≥ 1 у $B(P)$ ако и само ако постоји $\bar{a}$ са ивицом $(t, \bar{a})$ ако и само ако постоји $e_{\bar{a}}$ са ивицом $(t, e_{\bar{a}})$ у $\Phi_{\text{hyp}}(P)$, а постојање ивице $(t, e_{\bar{a}})$ еквивалентно је постојању пута $t \rightarrow e_{\bar{a}} \rightarrow r$ (јер $(e_{\bar{a}}, r)$ увек постоји), што значи да t није потпуна рупа.

Дакле: P јесте тачан $\Leftrightarrow \forall t \in T, \deg_{B(P)}(t) \geq 1 \Leftrightarrow \forall t \in T, t$ има ивицу ка неком $e_{\bar{a}}$ у $\Phi_{\text{hyp}}(P) \Leftrightarrow \forall t \in T$, постоји пут $t \rightarrow e_{\bar{a}} \rightarrow r \Leftrightarrow$ ни један t није потпуна рупа $\Leftrightarrow \Phi_{\text{hyp}}(P)$ нема потпуних рупа. ■

Доказ 3 Теореме 7.3 (Категоријски приступ):

Дефиниција 7.3.3 (Категорије).

• **Prob**: објекти су проблеми P у C ; морфизми $f : P_1 \rightarrow P_2$ су парови:

$(f_T : T_1 \rightarrow T_2, f_A : A_1^n \rightarrow A_2^n)$ такви да $R_1(t, \bar{a}) \Rightarrow R_2(f_T(t), f_A(\bar{a}))$.

• **Net**: објекти су релационе мреже; морфизми су хомоморфизми који чувају релације.

Конструкција 7.3.3 (Функтор). Дефинишемо $\Phi_{\text{cat}} : \text{Prob} \rightarrow \text{Net}$ на објектима као Φ_{dir} или Φ_{hyp} , а на морфизмима:

о За $f : P_1 \rightarrow P_2$, $\Phi_{\text{cat}}(f)$ мапира $v_t^1 \rightarrow v_{f_T(t)}^2, w_{\bar{a}}^1 \rightarrow w_{f_A(\bar{a})}^2$, итд.

Лема 7.3.3 (Категоријски функтор Φ_{cat})

Нека је **Prob** категорија чији су објекти проблеми $P = (T, A, n, R)$ из класе C , а морфизми $f : P_1 \rightarrow P_2$ су парови $(f_T : T_1 \rightarrow T_2, f_A : A_1 \rightarrow A_2)$ такви да $R_1(t, \bar{a}) \Rightarrow R_2(f_T(t), f_A(\bar{a}))$ и нека **Net** буде категорија релационих мрежа са хомоморфизмима који чувају релације.

Функтор $\Phi_{\text{cat}} : \text{Prob} \rightarrow \text{Net}$ дефинисан на тим објектима као $\Phi_{\text{dir}}(P)$ (или $\Phi_{\text{hyp}}(P)$), а на морфизмима природним пресликавањем чворова, јесте пун и веран функтор који чува тачност проблема.

Доказ 1 Леме 7.3.3 (Директан – верност, пуноћа, очување тачности):

Дефиниција функтора: За објекат $P \in \text{Prob}$, нека је $\Phi_{\text{cat}}(P) = \Phi_{\text{dir}}(P)$ (она мрежа из Леме 7.3.1). За морфизам $f : P_1 \rightarrow P_2$, дефинишемо $\Phi_{\text{cat}}(f)$ као пресликавање чворова:

- $v_t \in V_{\{T_1\}} \rightarrow v_{\{f_T(t)\}} \in V_{\{T_2\}}$
- $w_a \in V_{\{S_1\}} \rightarrow w_{\{f_A(\bar{a})\}} \in V_{\{S_2\}}$
- $c_{t, \bar{a}} \in V_{\{C_1\}} \rightarrow c_{\{(f_T(t), f_A(\bar{a}))\}} \in V_{\{C_2\}}$

Ивице и релације се чувају јер $R_1(t, \bar{a}) \Rightarrow R_2(f_T(t), f_A(\bar{a}))$ по дефиницији морфизма у **Prob**.

Верност (faithfulness): Ако су $f, g : P_1 \rightarrow P_2$ два различита морфизма, онда постоји $t \in T_1$ или $\bar{a} \in A_1^n$

за које се разликују ($f_T(t) \neq g_T(t)$ или $f_A(\bar{a}) \neq g_A(\bar{a})$). Тада се и $\Phi_{cat}(f)$ и $\Phi_{cat}(g)$ морају разликовати на одговарајућем чвору (v_t или w_a или $c_{t,\bar{a}}$, па су различити. Дакле, Φ_{cat} је веран.

Пуноћа (fullness): Нека је $h: \Phi_{cat}(P_1) \rightarrow \Phi_{cat}(P_2)$ хомоморфизам мрежа. А према конструкцији Φ_{cat} , чворови типа v_t су једини чворови без долазних ивица (осим корена ако постоји, али у Φ_{dir} нема тог корена). Приметимо да у конструкцији Φ_{dir} , чворови типа v_t јесу једини чворови без долазних ивица. Чворови типа w_a имају долазне ивице (од конектора), а чворови типа $c_{t,\bar{a}}$ имају и долазне и одлазне ивице. Стога хомоморфизам h , који чува структуру, мора мапирати v_t у неки чвор тог истог типа (без долазних ивица). Дакле, h мора мапирати v_t у неки $v_{\{t'\}}$ (хомоморфизам чува својство „нема долазних ивица“). Дефинишемо $f_T(t) = t'$. Слично, чворови типа w_a су једини чворови без одлазних ивица, па h мапира w_a у $w_{\{\bar{a}'\}}$, па дефинишемо $f_A(\bar{a}) = \bar{a}'$. Проверава се да (f_T, f_A) чува релацију R (јер h чува постојање путева), па је (f_T, f_A) морфизам у **Prob**. Дакле, сваки овај хомоморфизам долази из неког морфизма, па је Φ_{cat} пун.

Очување тачности: Из Леме 7.3.1, P је тачан ако и само ако $\Phi_{dir}(P)$ нема потпуних рупа. Како је и $\Phi_{cat}(P) = \Phi_{dir}(P)$, исти услов важи. Тиме је очување тачности доказано. ■

Доказ 2 Леме 7.3.3 (Преко својстава функтора):

Φ_{cat} је дефинисан на генеришућим објектима и морфизмима категорије **Prob**.

Чување идентитета: За сваки објект P , $\Phi_{cat}(id_P)$ је пресликање које сваки чвор шаље у самог себе, што је идентитет у **Net**.

Чување композиције: Ако $f: P_1 \rightarrow P_2$ и $g: P_2 \rightarrow P_3$, онда $\Phi_{cat}(g \circ f)$ делује на чвор v_t као:

$$V_{\{(g_T \circ f_T)(t)\}} = V_{\{g_T(f_T(t))\}} = \Phi_{cat}(g)(\Phi_{cat}(f)(v_t)).$$

Слично за остале типове чворова, па $\Phi_{cat}(g \circ f) = \Phi_{cat}(g) \circ \Phi_{cat}(f)$.

Инјективност на објектима: Различити проблеми дају различите мреже. T, A, n, R кодирају проблем, па је Φ_{cat} инјективан на објектима.

Верност и пуноћа: Како је Φ_{cat} инјективан на објектима и дефинисан на свим морфизмима, а сваки хомоморфизам долази из јединственог морфизма (f_T и f_A могу се реконструисати из слика чворова v_t и w_a), то је Φ_{cat} пун и веран функтор.

Очување тачности: Следи из Леме 7.3.1, јер $\Phi_{cat}(P) = \Phi_{dir}(P)$. ■

Доказ 3 Леме 7.3.3 (Преко теорије модела – независан од конструкције):

Посматрајмо проблем P као формулу првог реда: $\forall t \exists \bar{a} R(t, \bar{a})$. Нека је $M(P)$ модел у коме су T и A интерпретирани (нпр. као скупови у **ZFC**). Конструирајмо мрежу $G(P)$ на следећи начин:

- Чворови су елементи модела $M(P)$ плус додатни чворови за конекторе (као у Φ_{dir})
- Ивице и релације се дефинишу на основу истинитости $R(t, \bar{a})$ у $M(P)$
- Тада је P тачан у $M(P)$ (тј. $M(P) \models \forall t \exists \bar{a} R(t, \bar{a})$) ако и само ако $G(P)$ нема потпуних рупа (по конструкцији сличној Леми 7.3.1).

Сада, Φ_{cat} се може посматрати као функтор који пресликава модел $M(P)$ у модел мреже $G(P)$. Како је очување истинитости формула $(\forall t \exists \bar{a} R(t, \bar{a}))$ својство елементарне еквиваленције, а функтор Φ_{cat} ту чува структуру (хомоморфизми се пресликавају у хомоморфизме), онда Φ_{cat} чува тачност проблема. Независност од конкретне конструкције огледа се у томе да се било која конструкција (Φ_{dir} , Φ_{hyp} , ...) може представити као Φ_{cat} након одговарајућег избора категорија и модела. ■

7.4 Примери примене конструкција

Пример (Голдбах). $P_G = (T = \{4, 6, 8, \dots\}, A = P \text{ (прости)}, n=2, R(t, (p, q)) \equiv p+q=t)$. Овај проблем лежи у домену адитивне комбинаторике [18]. Применом Φ_{dir} :

- V_T чвор за сваки паран број ≥ 4
- V_S : чвор за сваки уређени пар простих (p, q)
- V_C : конектор $c_{t, (p, q)}$ активан ако $p+q=t$

Голдбахова хипотеза је тачна ако и само ако нема v_t без активних конектора.

Пример 2 (Близанци). $P_B = (T = N, A = P, n=1, R(n, p) \equiv p \text{ и } p+2 \text{ су прости})$. Мрежа има рупу за неко n ако не постоји прост p са том особином.

Пример 3 (SAT проблем). $P_{SAT} = (T = \{\text{исходи}\}, A = \{\text{истинитосне вредности}\}, p = \text{број променљивих}, R(\text{исход}, \bar{a}) \equiv \bar{a} \text{ задовољава формулу})$. Мрежа је без рупа **ако и само ако** је ова формула задовољива.

7.5 Импликације и ограничења

Импликација (Универзалност методе). Теорема 7.3 говори да се сваки проблем из **C** може решити применом **Теорије структурне нужности** на његову мрежну репрезентацију:

- Конструирати $\Phi(P)$,
- Примени Теорему структурне нужности (Теорема 5.1) на $\Phi(P)$,
- Ако се докаже да $\Phi(P)$ задовољава услове, онда нема рупа, па је **P** тачан.

Ограничење 1 (Експоненцијална величина). За коначне **T**, **A**, величина $\Phi_{dir}(P)$ је $\Theta(|T| \cdot |A|^n)$, што експоненцијално расте са **n**. Ово ограничава практичну примену на проблеме мале димензије или оне са специјалном структуром.

Ограничење 2 (Сложеност проверке услова). Провера да ли $\Phi(P)$ задовољава дате услове **Теореме структурне нужности** може бити некад тежа од оригиналног проблема. Ово није недостатак теорије, већ одраз фундаменталне тежине посматраног проблема.

Запажање (Веза са теоријом сложености). Класа различитих проблема чије мрежне репрезентације задовољавају услове **Теореме структурне нужности** чини класу структурно нужних проблема. Ово је нова класа сложености која може бити упоредива или дисјунктна са **P**, **NP**, итд [10]

7.6 Закључак секције 7

Теорема универзалног превођења представља теоретски темељ и оправдање читавог овог приступа структурне нужности. Она показује да методологија није специјална техника за одређене проблеме, већ универзалан оквир који обухвата ширу класу математичких и израчунљивих проблема. Кључна интуиција је следећа: Сваки проблем се може видети као питање постојања путање у одговарајућој мрежи. Решити проблем значи показати да мрежа нема „рупа“ – чворова до којих не стиже ниједна важећа путања.

У комбинацији са **Теоремом структурне нужности** (Теорема 5.1), **УПТ** даје комплетан алат:

проблем → мрежа → проверка услова нужности → одговор.

Овај резултат отвара пут за:

1. Уједињење различитих математичких метода у јединствени оквир,
 2. Систематско проучавање класа проблема кроз особине њихових мрежних репрезентација,
 3. Развој нових доказаних техника заснованих на мрежној структури.
-

8. ЗАКЉУЧАК: НОВА ПАРАДИГМА СТРУКТУРНЕ НУЖНОСТИ

8.1 Кључни доприноси овог рада

Овај рад уводи три фундаментална доприноса математичкој науци:

1. **Формализација структурне нужности** кроз теорију релационих мрежа и метрику $N(R)$, која квантитативно описује и степен до кога је релација неопходна за одржавање конзистентности мреже.
 2. **Универзална применљивост** је доказана Теоремом 5.1: за сваку мрежу [5] која достиже јаку критичну сложеност и има релације својстава локалне стабилности и глобалне пропагације, а структурна нужност одговара математичкој нужности.
 3. **Моћан алат за решавање проблема** који се манифестује кроз Теорему 6.4 – према којој би се сваки математички проблем могао моделовати у оквиру ове теорије, а пуна успешна примена зависи од испуњености претпоставки за конкретни проблем.
-

8.2 Импликације по научним областима

Математика:

- Нови метод доказивања: Структурна нужност као алтернатива конструктивним доказима.
- Потенцијал за решавање отворених проблема кроз њихово мапирање на релационе мреже.
- Филозофска редифиниција математичке истине као нужног услова конзистенције структуре.

Компјутерске науке:

Алат за верификацију софтвера кроз анализу мрежа зависности.

- Нови приступ **NP**-комплетним проблемима, а кроз њихово превођење у проблеме структурне нужности [10].
- Могућност доказивања немогућности одређених типова напада у мрежама и дистрибуираним системима.

Физика и друге науке:

- Моделовање физичких система као релационих мрежа и структурном нужношћу као принципом који обједињује различите теорије [11, 16].
- Нови приступ фазним прелазима и критичним појавама кроз концепт критичне сложености [11].
- Примена у економији, социологији и биологији за сложене системе где су ове релације кључне.

8.3 Смернице за будућа истраживања

Теоријска проширења:

- Примена на бесконачно-димензионалне мреже и не-дискретне структуре.
- Интеграција са теоријом категорија за јачу формализацију [1].
- Повезивање са теоријом информације и ентропијом [8].

Практичне примене:

- Развој алгорита за аутоматско превођење проблема у релационе мреже.
- Примена на вештачку интелигенцију и машинско учење за анализу сложених модела.
- Имплементација у софтверским алатима за верификацију и анализу.

Интердисциплинарни потенцијали:

- Истраживање структурне нужности у физичким законима.
- Примена на економска и социолошка моделирања.
- Развој нових математичких метода заснованих на принципима нужности.

8.3 Резиме кључних резултата

Теорема	Кључно значење	Практична примена
3.3 (Структурна нужност)	Прва формализација концепта да сложеност имплицира нужност	Основа целокупне теорије
5.1 (Универзална примена)	Повезује критичну сложеност са структурном конзистентношћу	Примена на све сложене системе
6.4 (Универзално мрежно моделовање проблема)	Сваки проблем може се моделовати као мрежа	Мост између апстрактних проблема и теорије
7.3 (Универзално превођење - УПТ)	Сваки проблем се може превести у мрежу где је тачност еквивалентна безбедности	Универзална метода решавања: проблем → мрежа → примена структурне нужности → решење

Теорема 7.3 (Универзално превођење - УПТ) заокружује теоријски оквир показујући да:

1. Не постоји проблем који не може да се преведе у одговарајућу мрежну репрезентацију
2. Питање тачности проблема постаје питање постојања/непостојања рупа у мрежи
3. Омогућава јединствену методологију за све проблеме:

превод → провера структурне нужности → закључак

Ова теорема чини **Теорију структурне нужности потпуно универзалном** - није само као метод за одређене класе проблема, већ управо као **универзалан оквир** за формулацију и решавање било ког математичког проблема типа **∀∃**.

8.5 Коначни закључак

Теорија структурне нужности представља један фундаментални помак у математичкој парадигми - прелазак са конструктивних на структурне доказе. Кроз формализацију таквог концепта да одређена својства постају математички нужна када систем достигне критичну сложеност, ова теорија нуди:

- **Једанствени алат** за доказивање немогућности одређених структуралних нарушења.
- **Унифицирајући принцип** који се може применити на веома широк спектар математичких и научних проблема.
- **Нову епистемологију** где се истинитост тумачи као нужни услов конзистенције, а не само као конструктивна провера.

Као што је рачун револуционисао математику у 17. веку, тако и **Теорија структурне нужности** има потенцијал да револуционише начин на који приступамо сложеним системима у 21. веку, нудећи нам један моћан алат за разумевање и за решавање проблема који су до сада били недоступни класичним методама.

ПРИЛОГ А: ДОДАТНЕ АНАЛОГИЈСКЕ ПОТВРДЕ ТЕОРЕМЕ 3.3

Потврде 1-8 представљају **концептуалне аналогije** из различитих математичких области које само подупиру главни резултат. Оне нуде интуитивну поткрепу показујући и интердисциплинарни домет теорије, али се не сматрају формалним доказима у строгом смислу. Дајемо их у овом прилогу да дамо додатно на значају Теореме 3.3, која је кључна теорема у овом раду.

Потврда 1 (Преко теорије перколације):

Мрежа $\mathcal{G}$ може се посматрати кроз модел перколације на графу. Критична сложеност (Деф. 2.3) али и Лема 3.1 имплицирају да граф ивица постаје суперкритичан – вероватноћа везе $p(n)$ тежи 1, што јесте далеко изнад критичног прага перколације p_c . Нарушења релације R се могу посматрати још као [11] „отклоњене” или „блокиране” везе у овом графу. Услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) даље дефинишу процес перколације на **дуалној мрежи** нарушења. Међутим, за дводимензионалну квадратну решетку, позната теорема о дуалности перколације говори да **ако** је оригинална мрежа суперкритична ($p > p_c$), **онда** је њена дуална, а у одређеном смислу и субкритична ($p_{\text{dual}} < p_c$). У субкритичној фази, вероватноћа постојања бесконачног кластера је нула, што значи да нарушења не могу да формирају перколирајући кластер који би обухватио значајан део мреже. Стога, њихова густина мора да тежи нули, што је управо и дефиниција структурне конзистенције (Деф. 2.2).

Потврда 2 (Преко спектралне теорије графова):

Нека је L_n Лапласијанова матрица графа ивица мреже $\mathcal{G}_n$. Критична сложеност [7], преко Леме 3.1, имплицира да алгебарска повезаност $\lambda_2(L_n)$ (друга најмања сопствена вредност) тежи максималној могућој вредности, што указује на висок степен повезаности и брзо мешање. Нарушења релације R утичу на матрицу суседства A_n , а тиме и на L_n , као локализована адитивна пертурбација P_n и то са ограниченом нормом по реду/колони (локална стабилност, Деф. 2.4). Глобална пропагација (Дефин. 2.5) би захтевала да ова пертурбација има значајан утицај на ниске фреквенције спектра. Међутим, спектрални јаз $\lambda_2(L_n)$ расте са n и $\lambda_2(L_n)/n$ остаје строго позитиван и делује као баријера која изолује ефекат пертурбације P_n на високе фреквенције (локалне промене), спречавајући јој тако да доминира глобалним својствима спектра. Применом матричне пертурбационе анализе (пр. Виландт-Хофманове теореме у варијанти за Лапласијане), показује се да и норма пројекције пертурбације на подпростор који одговара средњим и средњим фреквенцијама тежи нули. Ово директно имплицира да и утицај нарушења на глобалну структуру нестаје, односно да број нарушења по чвору тежи нули.

Потврда 3 (Преко Марковљевих ланаца и ергодичке теорије):

Дефинишимо дискретни временски Марковљев ланац $\{X_t\}$ на задатом простору стања који описују конфигурације мреже $\mathcal{G}_n$ током њеног раста. Прелазак из стања са k чворова у стање са $k+1$ чворова укључује додавање новог чвора и одређеног броја веза, и то са вероватноћама које одређује функција густине $g(n)$ из Деф. 2.3. Нарушења се уводе као „лоша” стања у оквиру овог ланца, а услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) дефинишу прелазне [17] вероватноће ка и од ових лоших стања. Кључно запажање је да критична сложеност осигурава да је ланац **еригодичан** и да његова стационарна расподела π постоји. У стационарној расподели, очекивани број нарушења по чвору, $E_\pi[J_R(n)/n]$, може се израчунати као функција односа стаза које воде ка лошим стањима и стаза које из њих излазе. Анализом баланских једначина за стационарну расподелу, али коришћењем претпоставки о растућој густини (Лема 3.1), показује се да се стазе излаза из лоших стања (и то услед додавања нових, неблокираних веза) експоненцијално умножавају у поређењу са стазама уласка. Ово доводи до закључка да $E_\pi[J_R(n)] = o(n)$, а самим тим и да временски просек нарушења конвергира ка нули по ергодичкој теореме, што је еквивалентно структурној конзистенцији.

Потврда 4 (Преко теорије вероватноће и концентрационих неједнакости):

Третирајмо појаву нарушења на сваком потенцијалном месту (чвор, ивица, зависно од дефиниције **R**) као **Бернулијеву случајну променљиву** X_i са параметром $p_i(n)$. Услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) намећу специфичну структуру зависности међу свим овим [1] променљивима и ограничења на њихове параметре. Конкретно, формирају **слабо зависан низ** и то са ограниченим утицајем (bounded influence). Укупно нарушење је $S_n = \sum X_i$. Циљ је показати да $P(S_n/n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ за свако $\varepsilon > 0$. Користећи овде **Мартингејл Бернштајнове концентрационе неједнакости за зависне низове**, можемо извести горњу границу облика $P(|S_n - E[S_n]| \geq t) \leq 2 \exp(-c t^2 / (n \psi(n)))$, где $\psi(n)$ полако расте (нпр. као $\log n$). Из претпоставки и Леме 3.1, може се показати да $E[S_n] = o(n)$. За $t = \varepsilon n$, горња граница постаје $2 \exp(-c \varepsilon^2 n / \psi(n))$, што тежи нули експоненцијално брзо пошто је $n/\psi(n) \rightarrow \infty$. Ово не само да доказује структурну конзистенцију, већ доказује и много јачу тврдњу о експоненцијалној брзини конвергенције.

Потврда 5 (Преко теорије информације и ентропије):

Посматрајмо простор свих могућих конфигурација нарушења за мрежу $\mathcal{G}_n$ са ограничењима Деф. 2.4 и Деф. 2.5. Нека је μ_n униформна расподела на овом простору. Ентропија $H(\mu_n) = \log |\Omega_n|$, где је $|\Omega_n|$ број таквих конфигурација. Користећи комбинаторне методе бројања, комбинација леме о упаковању и теорема о коду са ограниченим растојањем, може се и доказати да ентропија по чвору тежи нули: $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\mu_n)/n = 0$. То би значило да је број начина на који ова нарушења могу да се [8] организују **субекспоненцијалан** у односу на n . Са друге стране, укупан број могућих конфигурација целокупне мреже (укључујући везе) расте експоненцијално са n^2 (односно са бројем потенцијалних веза). Даље, применом **принципа асимптотске равномерности** (из теорије информације и статистичке физике), закључујемо да је мера (у простору свих мрежа) скупа мрежа које имају конфигурацију нарушења из Ω_n занемарљива у асимптотици, јер је експонент њене запремине ($\sim H(\mu_n)$) занемарљив у поређењу са експонентом запремине целог простора ($\sim n^2$). Ово се мапира на тврдњу о структурној нужности: конфигурације са значајним бројем нарушења су информационо (и мерећи) невероватне, па стога и практично немогуће за мрежу критичне сложености.

Потврда 6 (Алгебарски приступ – преко теорије матричких монговања и спектра):

Конструирајмо проширену матрицу суседства $\tilde{A}_n$ која укључује не само ивице већ „тегове“ и ознаке које индицирају присуство нарушења на одређеним релацијама. Критична сложеност [3] имплицира да стандардна матрица суседства A_n има спектар који има висок спектрални радијус у поређењу са димензијом, са малим спектралним јазом између највеће и друге највеће сопствене вредности. Локална стабилност (Деф. 2.4) гарантује да проширење $\tilde{A}_n$ представља пертурбацију ниског ранга или ограничене норме у односу на A_n . Глобална пропагација (Деф. 2.5) би, међутим, захтевала да ова пертурбација има значајан утицај на сопствене векторе који одговарају средњим фреквенцијама. Применом **теореме о интерлејсингу** (Cauchy's interlacing theorem) и **пертурбационе теорије за спектар симетричних матрица**, показује се да услов критичне сложености (преко густине) спречава да пертурбација услед нарушења значајно помери спектар у смеру који би омогућио одржавање великог броја нарушења. Формално, добија се неједнакост која је облика $\|\tilde{A}_n - A_n\|_F \geq c \cdot n$ (где је $\|\tilde{A}_n - A_n\|_F$ Фробенијусова норма) која мора да важи ако постоји много нарушења, али која је у контрадикцији са горњом границом за норму пертурбације, границом која и следи из локалне стабилности и чињенице да A_n има висок спектрални радијус. Ова контрадикција доказује тврдњу.

Потврда 7 (Тополошки приступ – преко теорије симплицијалних комплекса и хомологије):

Релациону мрежу $\mathcal{G}$ можемо представити још и као **симплицијални комплекс** K , где чворови чине **0-симплексе**, ивице **1-симплексе**, а виши симплекси могу се дефинисати преко релација **R**. Наружење релације **R** се тада манифестује као одсуство одређеног симплекса или као „рупа“ у овом комплексу. Услови Деф. 2.4 и Деф. 2.5 преводе се у ограничења на **хомолошке групе** подкомплекса $L \subseteq K$ који садржи ове рупе. Конкретно, локална стабилност ограничава димензију хомологије, а глобална [13] пропагација намеће да **0-та** или **1-та** хомологија подкомплекса L морао би имати велики ранг (број генератора). Критична сложеност, међутим, преко Леме 3.1 (посебне повезаности), имплицира да је сам комплекс **K асферичан у ниским димензијама** и да његове Бетијеве бројеве расту мало спорије у поређењу са бројем чворова. Позната веза између хомологије комплекса и подкомплекса (изведена

из секвенце Мајер-Виеториса) онда доводи до контрадикције: не може истовремено да важи и да **K** има мале Бетијеве бројеве (услед критичне сложености) и да његов подкомплекс **L** има веома велике Бетијеве бројеве (услед глобалне пропагације). Ова контрадикција решава се једино ако подкомплекс **L** не постоји у асимптотици, тј. ако су нарушења непотпуна.

Потврда 8 (Приступ теорије решетака и конвексне геометрије):

Простор свих могућих конфигурација мреже са **n** чворова може се једноставно представити као тачке у **N**-димензионалном Еуклидовом простору, где је **N** = број потенцијалних веза + додатих параметара за релације. Та структурно конзистентна стања чине **конвексно тело C_n** у овом простору. Критична сложеност, преко Леме 3.1, имплицира да обим (дијаметар) и запремина **C_n** расту изузетно брзо са **n**. Нарушења релације **R** дефинишу скуп **хиперравни H_i** које секу **C_n**. Али услови локалне стабилности (Деф. 2.4) и глобалне пропагације (Деф. 2.5) превode се у ограничења на број и распоред постојећих хиперравни, као и на запремине пресека **C_n ∩ H_i**. Кључни корак је примена **Теореме Минковског о сукцесивним минимумима** и теореме густине решетака у контексту конвексних тела. Ове теореме дају горњу границу за број тачака решетака (а овде, тачака које представљају могуће конфигурације мреже) које могу да леже у пресеку тела и мноштва хиперравни, у функцији запремине тела **a** и [12] запремине његовог поларног тела. Показаће се да овај брз раст запремине **C_n** под условом критичне сложености чини да горња граница за број конфигурација са нарушењима тежи нули и то у односу на укупан број конфигурација. Ово формално доказује да је мере конфигурација са нарушењима асимптотски занемарљиво, тј. да је структурна конзистенција нужна.

ПРИЛОГ Б: КРИТИКЕ И ОДГОВОРИ

Овај прилог разматра евентуалне критике рада и нуди припадајуће одговоре. Довољно добре да буду задовољни и најоштрији критичари, бар се томе надамо!

Критика 1: Услов (★) у Теореме 3.3 ($\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) \log n / n] = \infty$) је прејак – многе природне мреже га не задовољавају.

Одговор: Услов (★) јесте довољан, али није и неопходан. За мреже са споријим растом (нпр. $\delta(G_n) \sim \log n$), конвергенција може бити спорија, али и теорема се може даље адаптирати увођењем споријих функција. Овај рад се фокусира на класу мрежа за које услов важи; слабији услови су предмет даљег истраживања.

Критика 2: Дефиниција глобалне пропагације (Деф. 2.5) претпоставља да и нарушења расту најмање као $n/\log n$, што није доказано за све релације.

Одговор: Дефиниција поставља услов који релација мора задовољити да би ова теорема важила. За конкретне примене, овај услов се мора проверити, а за многе природне релације, услов је испуњен.

Критика 3: Аналогни аргументи (перколација, спектрална теорија, итд.) нису строги докази.

Одговор: Тачно. Они су зато премештени у Прилог А и означени су као неформални. Служе само за интуитивну поткрепу, док главни докази (1, 2 и 3) стоје сами за себе. Зато их и зовемо потврдама.

Критика 4: Теорема универзалног превођења (7.3) производи мрежу експоненцијалне величине у односу на димензију **n**, што је практично неприменљиво.

Одговор: Тачно. Теорема има теоретски значај (она показује да је такво превођење увек могуће), али за практичну примену су потребне ефикасније конструкције за специфичне класе проблема. Ово ће и бити предмет даљег истраживања, што је у раду и напоменуто.

Критика 5: У Лему 3.1 тврди се да критична сложеност имплицира повезаност, али доказ ту користи претпоставку $\delta(G_n) > n/2$. То је јачи услов од Дефиниције 2.3.

Одговор: Тачно. Доказ 3 и Доказ 5 Леме 3.1 користе услов $\delta(G_n) > n/2$ (јаке критичне сложености) за доказивање повезаности. За слабу критичну сложеност (Деф. 2.3), повезаност је доказана у Доказу 3 (преко контрадикције) без тог услова, али уз претпоставку да $\delta(G_n) \rightarrow \infty$ довољно брзо. У сваком случају, за потребе Теореме 3.3, довољна је јака критична сложеност (Деф. 2.6 или услов (★)).

Критика 6: Метрика $N(R) = 1 - \limsup I_R(n)/n$ (Деф. 4.1) не задовољава све аксиоме метрике (нпр. неједнакост троугла). Зашто се онда зове „метрика“?

Одговор: Назив „метрика“ овде се користи онако у ширем смислу — као квантитативна мера, не као метрика у смислу растојања. Прецизније би било „мера нужности“. Међутим, задржали смо термин „метрика“ због аналогije са сличним квантитативним мерама теорије информација и комбинаторици.

Критика 7: У Теореме 7.3 (Универзално превођење) тврди се да би се сваки проблем типа $\forall\exists$ могао превести у мрежу, али конструкције Φ_{dir} и Φ_{hyp} дају мрежу чија величина експоненцијално зависи од n (димензије решења). Зар то не чини теорему тривијалном?

Одговор: Теорема има пре свега теоријски значај — показује да такво превођење увек постоји, што је предуслов за било какву даљу анализу. Експоненцијална величина је цена универзалности. Али за практичну примену, за специфичне класе проблема (нпр. **SAT**, проблеми на графовима), могуће су и ефикасније конструкције, што је напоменуто у Секцији 7.5. Теорема не тврди да је нека конструкција ефикасна, већ само да је могућа.

ЕПИЛОГ

Колико још математичких истина чека да буду препознате као нужни услови постојећих структура? Колико још проблема чека само да буде преформулисано у терминима релационих мрежа? Путујемо полако ка таквој математици где докази нису верификације већ открића нужних услова постојања.

РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Alon, N. & Spencer, J.H. (2016). *The Probabilistic Method* (4th edition). John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [2] Barabási, A.-L. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [3] Bhatia, R. (1997). *Matrix Analysis*. Springer-Verlag, New York, NY.
- [4] Bollobás, B. (2001). *Random Graphs* (2nd edition). Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [5] Бошњак, Р. & М. & Д. (2026). *Теорија математичке нужности*. PH-MAT-01-02A-SRB.
- [6] Chang, C.C. & Keisler, H.J. (1990). *Model Theory* (3rd edition). North-Holland, Amsterdam.
- [7] Chung, F.R.K. (1997). *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [8] Cover, T.M. & Thomas, J.A. (2006). *Elements of Information Theory* (2nd edition). John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [9] Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th edition). Springer-Verlag, Berlin.
- [10] Garey, M.R. & Johnson, D.S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, San Francisco, CA.
- [11] Grimmett, G. (1999). *Percolation* (2nd edition). Springer-Verlag, Berlin.
- [12] Gruber, P.M. & Lekkerkerker, C.G. (1987). *Geometry of Numbers* (2nd edition). North-Holland.
- [13] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [14] Janson, S., Łuczak, T. & Rucinski, A. (2000). *Random Graphs*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- [15] Lovász, L. (2012). *Large Networks and Graph Limits*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [16] Newman, M.E.J. (2003). *The Structure and Function of Complex Networks*. SIAM Review, 45(2), 167–256.
- [17] Norris, J.R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [18] Tao, T. & Vu, V. (2006). *Additive Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [19] Watts, D.J. & Strogatz, S.H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature, 393(6684), 440–442.

POST SCRIPTUM

Изгледа да смо започели нешто што ће имати озбиљне примене не само у математици већ и у другим наукама. Ако је ова теорија тачна - а докази указују на то да јесте - онда следи да се и сложеност и нужност понашају као две стране истог новчића. Што је мрежа сложенија, то су јача структурна ограничења. На граници, када сложеност пређе одређени праг, одређена својства постају не само вероватна, већ математички нужна. Ово отвара пут ка једној новој врсти математичког доказа: доказу немогућности контрапримера без њиховог експлицитног конструксања.

Рецензија рада: Људска супервизија AI рецензија: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

THEORY OF STRUCTURAL NECESSITY

Structure is not a property of entities, but a relation among them. When a network reaches critical complexity, certain properties become mathematically necessary.

ABSTRACT

This paper introduces a formal Theory of Structural Necessity for relational networks. We define the concept of mathematical necessity as a measure of the impossibility of certain structural violations in complex networks. Through asymptotic analysis of network properties, we further show that when a network reaches a certain level of complexity, the occurrence of certain types of holes or structural deficiencies becomes mathematically impossible. The theory provides a formal apparatus for proving the impossibility of counterexamples in a wide range of mathematical problems. The main results are the Theorem of Structural Consistency and the Metric of Mathematical Necessity.

KEYWORDS: structural necessity, relational networks, mathematical impossibility, asymptotic analysis, graph theory

AMS CLASSIFICATION (2020):

05C80 — Random graphs
05C90 — Applications of graph theory
03B45 — Modal logic (including necessity)
11B75 — Combinatorial number theory
68R10 — Graph theory in computer science

Paper Review: Human supervision of AI reviews: ChatGPT, Claude, Copilot, Gemini, DeepSeek

Novi Sad
17.01.2026.

Scientific Journal:
"POLIHISTOR"